Sistemas Sintéticos. Lo Inteligible en los Manuales para la Enseñanza

Alberto Camacho
Instituto Tecnológico de Chihuahua II
México
camachoalberto@hotmail.com
Epistemología – Nivel Superior

Resumen

¿Cómo se puede analizar una obra elemental? Las obras elementales fueron manuales que se usaron a lo largo de los siglos XVIII al XIX para la enseñanza matemática. Dicha pregunta ha estado inmersa en el contexto de investigación del grupo de Matemática Educativa y particularmente en las sucesivas RELMEs. El enfoque que justifica el análisis de las obras elementales, ha sido la búsqueda en la historia de las reformulaciones de los conceptos matemáticos que nos han guiado en la definición de nuestros proyectos de investigación, dentro del concurso de las dimensiones social, conceptual y epistemológica, y en el diseño de situaciones didácticas de conceptos matemáticos que recurrentemente nos causan problemas de aprendizaje en el salón de clase.

Al finalizar el siglo XIX y a lo largo del siglo XX los historiadores de la ciencia vieron con profundidad la importancia de la investigación textual. L. Brunshvicg realizó en Francia a principios del siglo XX, una disertación extensa de la historia de las matemáticas que partía de los clásicos griegos hasta finalizar con la matemática expuesta en las respectivas obras de Comte, Cauchy, Lagrange y Fresnel (Brunshvicg, 1922). Un discípulo suyo, G. Bachelard, propuso a mediados del siglo dos nociones imprescindibles para el estudio de la historia de la ciencia: aquella de *obstáculo epistemológico* y la otra, de *acto epistemológico*. El primero de estos ampliamente reconocido, es por hoy un pilar de nuestra disciplina. El segundo corresponde a las *sacudidas del genio que aporta impulsos inesperados en transcurso del desarrollo científico*. Esta dialéctica entre *obstáculo* y *acto* deja ver con transparencia como los *impulsos* del pensamiento científico refieren las reformulaciones o epistemologías sufridas por el conocimiento a lo largo del tiempo (Bachelard, 1971). El punto de vista de Bachelard sugería que en el estudio de la historia de las ciencias, a partir de el análisis documental, se debía *distinguir el error y la verdad, lo inerte y lo activo, lo perjudicial y lo fecundo* siguiendo la huella de las diferentes *rupturas* y discontinuidades del conocimiento y no solamente la continuidad de la historia de los conocimientos mismos. En 1962 T. Khun, al tratar de encontrar las diferencias sobre los fundamentos de la historia de las ciencias, reconoció la importancia del papel que desempeña el concepto de *paradigma*, vio estos como síntesis históricas del conocimiento que han desencadenado cambios que afectan la estructura de las revoluciones científicas. A diferencia de Bachelard, Khun consideraba las transformaciones del conocimiento a partir de un saber ya constituido o bien como la mejor imagen que la historia de la ciencia ofrece de este último, el cual enmarca el paradigma en cuestión, toda vez que estos archivan el paso de una teoría a otra. A finales de los setenta Koyré impulso la idea de analizar la evolución del pensamiento científico a través de estrechar las concepciones trans-científicas de disciplinas antiguas como la filosofía, metafísica y religión, ello dio para un estudio del paso del espacio finito griego hacia una concepción geométrica del espacio infinito que merecía la modernidad del siglo XVII. La ruta de investigación que siguió la noción de ruptura y paradigma a lo largo del siglo

XX, orientó la visión de las diferentes disertaciones que al respecto se han obtenido desde los años sesenta en adelante.

En esencia, el objeto de la tarea de los investigadores de la ciencia a través del análisis textual, ha sido a lo largo del siglo pasado y en lo que va del presente, el restablecimiento de *tradiciones científicas*. Una *tradición* científica significa la acción de *transmitir* a lo largo de cierto período de tiempo un saber. Este último puede ser colocado en las obras en forma de proposición, de teorema, como resultado de una práctica, como protocolos que indican los modos en que se deben enseñar ciertos conceptos, como una definición manipulada, etc. La labor del especialista será, en una primera etapa, la de *entender* dicho material para, con ello, se dice fácil, concurrir a la reconstitución de la tradición textual, la cual es sustentada por el discurso conceptual del saber.

En torno al estudio de los manuales para la enseñanza de la matemática de los siglos XVII al XIX, en Shubring (1987) se propuso un enfoque holístico comprendido en un diseño tridimensional que involucraba analizar los cambios de las varias ediciones de los textos, la verificación de los cambios en otros libros correspondientes a la misma *oeuvre*, y la observación de los cambios en el contexto: planes y programas de estudio, decretos ministeriales, epistemologías, etc. Al finalizar el siglo, en (Belhoste, Dalmedico, *et, al*, 1994), se dirigió un estudio en tres partes de la *école polytechnique*. Ha sido esta la primera obra sobre historia de la enseñanza de las matemáticas y de la formación en la escuela desde su fundación hasta nuestros días. Es el fruto de un examen crítico, apoyado por una investigación histórica de los fondos documentales y textuales de la escuela, de la que desgranan historiografías, conocimientos, tradición científica y enseñanza a partir de su vocación militar.

A lo largo del último lustro del siglo XX, y hasta el año 2000, el enfoque utilizado en Camacho (2000) para el análisis de los manuales fue establecido a través del conocimiento matemático que aparece en dichos documentos, el cual fue vehiculado por *flujos de difusión* de conocimientos que emergieron de Europa desde finales del siglo XVIII y a lo largo del siglo XIX, fundamentalmente de España y Francia, y que tuvieron consecuencias poco favorables en la enseñanza de la matemática de los colegios mexicanos, por las *prácticas de transculturación* acontecidas al conocimiento en los textos: obras compendiadas, cortes, inserciones, traslación de ideologías, sujeción cultural, etc.

Para el 2001, R. Rashed, presidente de la International Union of History and Philosophy of Science, hizo distinción entre lo *proto-científico* y lo científico, ofreciéndole como una distinción exclusiva que domina enteramente la historia de las ciencias (Rashed, 2001). Esta oposición debe ser entendida como histórica y lógica a la vez, permitiendo por consecuencia distinguir una obra de ciencia de otra en la que se pretenda tratar el mismo objeto. No obstante, Rashed sustrajo las matemáticas de esta oposición debido a que las piezas exclusivas de la *proto-matemática* pertenecen a la matemática misma: *los indivisibles, las consideraciones sobre la noción de límite a lo largo del siglo XVIII, etc.* Esto último no ocurre con las otras disciplinas en las que lo proto-científico les cubre de diversas maneras.

Para comprender mejor el pensamiento de Rashed, evoquemos aquí los casos de los fundamentos de dos tradiciones preocupadas por un mismo objetivo. La definición del cálculo de las fluxiones de Newton, tomó sentido a partir de *engendrar las cantidades* por la permisibilidad que da su naturaleza, la de *aumentar* o *disminuir* con movimiento uniforme. Por su parte Leibniz, incorporó a las cantidades una convención de naturaleza no-real, las *cantidades infinitamente pequeñas*.

A pesar de las diferencias en los dominios, en Newton, las cantidades se engendran a partir del movimiento uniforme dando lugar a un modelo geométrico, en tanto que en Leibniz esta posibilidad ocurre por los infinitamente pequeños, configurando una propuesta algorítmica, se puede decir que cada uno habla el lenguaje del otro y pareciera que ambos proyectos sólo son traducibles en la estructura notacional del análisis estándar contemporáneo. La posible traducción es el punto de vista de Rashed. Bajo esta óptica el cálculo estándar marca un principio de orden, una noción de distancia que rectifica no sólo a los *proto-conocimientos* sino, además, al sinnúmero de epistemologías que le sostienen.

No obstante, y como es sabido, la conciliación de estos dominios del cálculo llevó a una traducción que duró varios siglos. Los primeros acercamientos tuvieron en su inicio contradicciones en las formas del conocimiento que engendraron, pudiéndose explicar estos últimos con el adjetivo de *meta-conceptos*; es decir, conocimientos abstractos u oscuros, situados en una etapa primitiva o en una *proto-matemática,* siguiendo a Rashed, difíciles de determinar en el dominio de lo real.

Estas expresiones fueron resultado de una deliberación del pensamiento, el cual fue sujeto a la noción universal de *espacio* y a sus cualidades de extensión establecidas por los primeros analistas, como Newton. Este concibió el *espacio absoluto* (sin definirle) como *siempre similar e inmóvil.* Empero la contingencia, el *espacio relativo* fue pensado como *cierta dimensión móvil o medida de los espacios absolutos.* Consecuentemente, su extensión, y particularmente las cantidades, fueron pensadas como *crecientes o decrecientes con movimiento continuo, a la manera del espacio que describe un cuerpo en movimiento.*

A tal definición llegó a partir de suprimir, de la noción de espacio, una o varias determinaciones, a excepción de la idea de extensión, lo cual le originó una idea genérica a la que ya no respondió el espacio en lo real. Este corte le hizo a determinaciones que conservaban un carácter finito, las cuales, al ser suprimidas, hicieron que la extensión deviniera infinita. Ello le permitió reconsiderar el espacio a partir de un atributo de éste, la *noción de cantidad*.

En su caso, la noción de cantidad representaba recintos del espacio, y era el concepto en juego. La definición de esa noción antes de Newton era: *Cantidad es todo aquello que aumenta o disminuye.* La reformulación de Newton a través de su concepción geométrico-espacial fue: *Cantidades son crecientes o decrecientes con movimiento continuo.* De esta forma la noción original y su accesoria pueden conectarse y formar la proposición sintética siguiente: *Todo lo que es capaz de aumentar o disminuir es descrito con movimiento continuo.*

Esta última reformulación es una unificación o *síntesis* del pensamiento newtoniano con el pensamiento clásico de su época, a la que se pudo remontar gracias a la trascendencia o universalidad de la noción de espacio; particularmente a su atributo más representativo, la noción de cantidad. Con este primer axioma Newton fue capaz en 1665-66 de dar una explicación matemática, a partir de las series que surgen del teorema binomio, de los fenómenos físicos y astronómicos que estudió, y considerarle eje medular de la estructura de los *Principia.* No obstante, con la síntesis no se pretendía resolver problemas particulares, sino, en principio, ordenar la totalidad de la ciencia en un sistema textual.

En este contexto, y siguiendo el modelo de sintetización de Newton, la cantidad se ancló como noción de orden cuyas posibilidades de implicación rebasaron a cualquier otro concepto, llevando a los analistas y geómetras a escribir bajo esa perspectiva las primeras *Obras de conocimientos avanzados*. En el caso de L´ Hôpital, arrogando del cálculo de Leibniz, transfirió en 1696, (L´ Hôpital, 1696), la noción de cantidad extrapolándole del espacio como *porciones infinitamente pequeñas de cantidades variables que aumentan y disminuyen continuamente.* Esta síntesis fue definida *diferencia* y es el fundamento que permea el *Analyse des infiniment petits*. Euler hizo algo semejante en 1755 para escribir los *Principes de calcul différentiel*, extendió la noción de cantidad al infinito percibiéndole en una sola proposición como *Las cantidades pueden por su propia naturaleza aumentar o disminuir al infinito* (Euler, 1755).

Dicha práctica, aunque parezca, no se refiere solamente al diseño de obras de conocimientos avanzados que tengan que ver con el cálculo diferencial. Pascal expresó que la geometría tomaba su fundamento a partir de generalizar la noción de extensión en términos de establecer sus límites entre la *nada* o sea el cero, y el infinito. Laplace hizo uso del *principio de la razón suficiente*, de Leibniz, axioma evidente *a priori,* basado en el principio de que *una cosa no puede comenzar a existir sin una causa que le produzca.* Hecho empírico que le llevó a sustentar los *Essai philosophique sur les probabilités,* considerando el estado actual del universo como el efecto del estado anterior y como la causa del que ha de seguirle.

¿Pero qué alcance tuvieron esas perspectivas en el diseño de los manuales?

Desde principios del siglo XVIII los elementos se concebían como *aquella parte que denotaba las componentes originales de un cuerpo.* Reynaud, en su texto de cálculo llamado *Analyse demontrée*, (Reynaud, 1708) y Bèzout en sus *Principios de cálculo infinitesimal* de mediados del siglo XVIII (Bèzout, 1760), llamaban *elemento* a la extensión infinitesimal o diferencial que se tomaba en las figuras geométricas con las cuales es posible determinar la cantidad de área, longitud o volumen correspondiente. En este sentido el diferencial de área dA, es un *elemento* distintivo que unifica y hereda sus fundamentos al área total.

En la escritura del *Traité du calcul différentiel et integral*, por cantidad Lacroix había concebido todo aquello *cuya magnitud por su naturaleza es comparable con otra de su misma especie* (Lacroix, 1797). La comparación sólo era posible, como en Newton, con el auxilio de los números, y se lograba a partir de establecer la dependencia entre cantidades. Para justificar el paso de las cantidades en juego por sus diferentes estados de magnitud, sean estos infinitamente pequeños o infinitos, Lacroix hubo de reducir esta operación a un *hecho analítico,* reposado sobre nociones consistentes que esperaba llegaran a responder a las aplicaciones geométricas de la mecánica, asignatura central en la enseñanza de la é*cole polytechnique* al iniciar funciones en 1794, y de la cual el cálculo infinitesimal era parte fundamental. El *hecho analítico* fue su intento por sintetizar el concepto de límite newtoniano para con ello tener un argumento o proposición central en el diseño del *Traité.*

La posición de Lacroix hacia el concepto de límite se colocaba en la postura en esa dirección de los escritos de Euler, D´Alembert y Cousin y era totalmente opuesta a la de Lagrange, incluyendo su negación a la notación propuesta por este último. Dos problemas sirvieron para la justificación, aquel de las tangentes analizado algebraicamente por Barrow, y la caída de los cuerpos graves tomado de la experiencia de Galileo. La transparencia del objetivo era dejar ver que ambos problemas, resueltos en su momento sin la concepción de los límites, son consustanciales con éste. Ello probaría el origen apodíctico del concepto a partir de unificar las concepciones de Barrow y Galileo con las propias ideas que Lacroix tenía del concepto de límite.

Para el efecto hizo uso del método de reducción al absurdo, o sea, no suponer aquello que se encuentra en la proposición inicial, dejando ver que ello surge natural, en este caso el concepto de límite (Lacroix, 1819, *nota A* al final de la obra).

En el problema de las tangentes de Barrow, inició con la parábola ordinaria $y^2 = px$. Cortándole con una secante hizo: AP=*x,* PM=*y,* PP´=*h*, M´Q=*k*, A´P=*x*+*h,* P´M=*y*+*k*. Comparando los triángulos semejantes M´Q: MQ :: PM: PS, es decir *k: h :: y:* PS, llegó a la expresión PS=P $y\frac{h}{k}$. Desarrollando $(y+k)^2 = p(x+h)$, y restándole la primitiva $y^2 = px$, le quedó: $2yk + k^2 = ph$, de donde resulta el cociente $\frac{h}{k} = \frac{2y+k}{p}$. Sustituyendo esta última en: PS=P $y\frac{h}{k}$, llegó a: PS= $\frac{2y^2}{p} + k\frac{y}{p}$, la cual es llamada *subsecante.*

Para hacer ver que en esta parte del problema el concepto de límite aparece, el argumento de Lacroix fue el siguiente: *Una primera observación se ofrece, es esta que, a pesar del evanecimiento de las cantidades h, k, la fracción que sugiere su relación continua existiendo; o bien tiene un valor apreciable, o ella se reduce a* $\frac{2y}{p}$*, valor donde la cantidad* PS= $\frac{2y^2}{p} + k\frac{y}{p}$, *se aproxima a medida que k disminuye, y donde ella puede diferir tan poco como queramos.*

La proposición, o *elemento* final de esta argumentación, fue colocada por Lacroix en las *Notions préliminaires* del *Traité*, como una definición en los siguientes términos:

Así, luego que las variaciones respectivas de una función y su variable se envanecen, esto no ocurre con su relación; la cual tiende hacia un límite aproximándose a él por diversos grados, existiendo, entre este límite y la función, una dependencia mutua quien determina a una por la otra (Lacroix, 1819, en *premiére partie de calcul différentiel*).

A partir de este argumento le fue expedito ir formulando la estructura proposicional del *Traité*. Como es el caso del ejemplo siguiente: (Sea) $u = ax^2$, *pongamos x*+*h en lugar de x, quedando* $u' = ax^2 + 2axh + ah^2$*, y restando la primera ecuación de la segunda* $u' - u = 2axh + ah^2$*, dividiendo los dos miembros por h, se tiene* $\frac{u'-u}{h} = 2ax + ah$*, hasta aquí la relación de variación de la función y de la variable es compuesta de dos partes.*

No obstante, aun cuando Lacroix sólo afirmaba que *h, k* son pequeñas, el orden en que Barrow les estimó fue viéndoles como infinitamente pequeños. Barrow tomaba la hipotenusa del triángulo que asumen estos valores como un arco infinitamente pequeño, que más tarde se llamaría *triángulo característico*, y desarrolló el mismo trabajo que Lacroix para evanecer h y k ; pero es obvio que en los cocientes que resultan del proceso, y por el contexto infinitesimalista a que se sujeta, se encuentra implícita la derivada como pendiente de la recta tangente, trabajo que no convence, en tanto desear ver el resultado como anterior a cualquier hipótesis posterior al concepto de límite. Lacroix debió pensar en esta ambigüedad al proponer el ejemplo de la *caída libre de los cuerpos.*

En resumen, la trascendencia de los resultados anteriores constituyeron *sistemas sintéticos* integrados en corpus de conocimiento que matematizaban toda la ciencia de las épocas referidas. Un sistema sintético hace referencia a un conjunto ordenado y coherente de conocimientos constituido en un corpus textual, en el cual los conocimientos y el sistema son integrados a partir de un primer axioma o principio que les organiza y, como vimos, les es común; además, el conocimiento y el sistema debían pretender ser objetivos y corresponder a la realidad de su objeto, es decir la verdad.

Luego, el trabajo previo al diseño de un sistema textual refiere a una *lógica trascendental* que se dividía en dos partes: 1º La enfocada a los problemas concernientes a la unificación de conocimientos a través de establecer la verdad de la primera proposición, y 2º Aquella abocada a la sistematización de los conocimientos en la obra a partir de la primera proposición en la forma de: *definiciones, problemas, corolarios, postulados, lemas, escolios, casos, pruebas, hipótesis, tesis,* etc.

Referencias Bibliográficas

Bachelard, G. (1971). *Épistémologie*. Presses Universitaires de France. Paris.

Belhoste, G., Dalmedico, A. D. y Picon, A (1994). *La formation polytechnicienne 1794-1994*. Dunod Paris.

Bèzout, E. (1760). *Cálculo infinitesimal*. De la colección de Textos Politécnicos. IPN México 1999: Noriega-Limusa.

Brunschvicg, L. (1922). *Les étapes de la philosophie mathématique*. De la edición de A. Blanchard. París 1986.

Camacho, A. (2000). *Difusión de conocimientos matemáticos a los colegios mexicanos del siglo XIX. De la noción de cantidad al concepto de límite*. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Camacho, A. (2004). Los elementos de análisis trascendente de Francisco Díaz Covarrubias. *Revista de educación matemática 16* (2)*, México.*

Euler, L. (1755). *Institutiones calculi diffrentialis*. Saint-Petésbourg.

Koyré, A. (1973). *Études d´histoire de la pensée scientifique*. Paris: Gallimard

Kuhn, T. (1992). *Las estructuras de las revoluciones científicas*. México: Fondo de Cultura Económica

Lacroix, S. F. (1797). *Traité du calcul différéntiel et integral*. Courcier Paris.

Lacroix, S. F. (1819). *Traité elementaire du calcul différéntiel et de calcul integral*. Bachelier-Courcier. Paris.

Laplace, P. S. (1845). *Essai philosophique sur les probabilités,* en http://gallica.bnf.fr/.

L´ Hôpital. (1696). *Analyse des infiniment petits pour l´intelligence de lignes courbes*. De la edición de A. Blanchard, París 1988.

Newton, I. (1685). *Mathematical principles of natural philosophy*. Great Books of the Western World. Chicago, USA: Enciclopædia Britannica Inc.

Newton, I. (1723). *Analysis per quantitatum. Series, Fluxiones ac Diffrentias: cum enumeratione linearum.* Tertii Ordinis. Amstælodami, Sumptibus Societatis.

Pascal, B. (1845). Pensées. *Charpentier*. Paris: Librairie

Rashed, R. (2001). Histoire des sciences et diversité au debut du XXIe siècle. *Conferencia Inaugural publicada en "Science and Cultural Diversity". Proceedings of the XXIst International Congress of History of Science.* UNAM-Sociedad Mexicana de Historia de la Ciencia, Vol. I. México 2003.

Reynaud (1708). *Analyse demontrée.* De la edición de A. Blanchard París.

Shubring, G. (1987). On the methodology of analyzing historical textbooks. Lacroix as textbooks author. *For the Learning of Mathematics.* Publishing Association, Montreal, Quebec Canada.