El computador en la enseñanza de la matemática mito y realidad

Iván Castro Chadid
Profesor Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá D.C, Colombia
icastro@javeriana.edu.co

> "*He oído decir a un matemático que lo importante no es la solución del problema sino el camino que conduce a su solución*"
>
> León Tolstoi

Hablar sobre la importancia del computador en la enseñanza de la matemática parece ser un tema trillado del cual se hacen todo tipo de especulaciones, desde quienes lo rechazan completamente, hasta quienes lo idealizan atribuyéndole casi un papel mágico llegando inclusive a confundir el "*hacer matemáticas*"con utilizar el computador para acortar caminos, corroborar teorías , construir gráficos, realizar cálculos y otros aspectos que son útiles no sólo al "*hacer*"sino, también, al "*aprender*"matemáticas.

En la mayoría de los casos el computador se utiliza como una calculadora y desde esa perspectiva se corre el peligro de inducir al aprendiz a desestimar los procesos teóricos que conducen a los cálculos que el computador puede realizar, no pocas veces, en décimas de segundo, desestimándose que lo importante no es la solución del problema, sino el camino para resolverlo.

Hasta mediados de la década de los 70 del siglo pasado, la teoría de los logaritmos hacía parte fundamental de los cursos introductorios de matemáticas básicas, era necesario aprender algunas técnicas y consultar tablas para poder calcular los logaritmos; con el surgimiento de la calculadora se hizo innecesario aprender a realizar estos cálculos.

En forma semejante se hizo innecesario aprender a calcular raíces cuadradas de números naturales, condición fundamental que se exigía hace 50 años para poder aprobar el curso de matemáticas del 5º grado de primaria. Ahora resulta difícil encontrar un matemático que conozca algoritmos que permitan realizar tales cálculos.

Cada época desarrolla su propia tecnología y es un deber de las respectivas generaciones ponerla a su servicio. La matemática no ha sido ajena a este hecho, por el contrario, los matemáticos han estado atentos a adaptar dicha tecnología y ponerla a su servicio, e incluso se han basado en ella para diseñar muchos de los instrumentos para calcular.

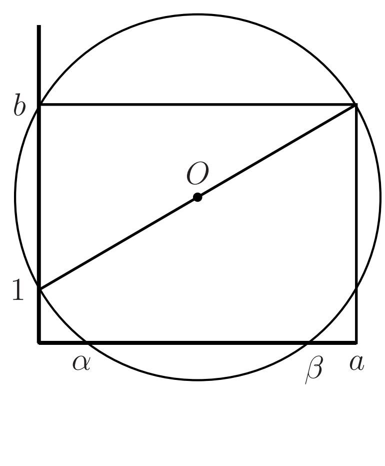
A Eratóstenes, en el siglo III a.n.e. se le atribuye la invención de una rueda circular con huecos que funciona con una manivela, de modo que al darle un número dado de vueltas deja obturado un agujero si el número es compuesto y el agujero queda abierto si el número es primo.

Los griegos empleaban los aparatos de mayor precisión para operar en matemáticas: **La regla y el compás**, con ellos podían sumar, restar, multiplicar, dividir, resolver problemas geométricos, calcular áreas de regiones, e incluso resolvían problemas algebraicos. A manera de ejemplo veamos como se soluciona con regla y compás la ecuación de segundo grado

$$x^2 - ax + b = 0 \qquad \text{con} \qquad a^2 > 4b$$

1. Trace dos rectas perpendiculares.
2. Sobre la vertical coloque los segmentos de longitud 1 y b.
3. Sobre la horizontal coloque el segmento de longitud a.
4. Construya el rectángulo de lados a y b como se indica en la figura siguiente.
5. Una el punto $P(a, b)$ con el punto $(0, 1)$ y encuentre el punto medio O.
6. Construya el círculo con centro en O y radio OP.
7. Los puntos de corte del círculo con el eje horizontal, son las soluciones de la ecuación $x^2 - ax + b = 0 \qquad \text{con} \qquad a^2 > 4b$

La justificación de este procedimiento es la siguiente:



Sabemos que

$$x^2 - ax + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{b+1}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{b-1}{2}\right)^2$$

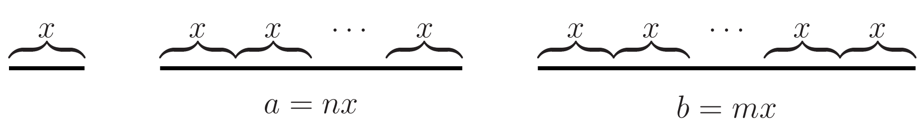
Por otra parte, la ecuación $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+1}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} + \left(\frac{b-1}{2}\right)^2 \quad (1)$

es el círculo con centro en $\left(\frac{a}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$ y radio $\sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{b-1}{2}\right)^2}$

Haciendo $y = 0$ en esta ecuación, (1) se obtiene la ecuación original.

Sin la regla y el compás hubiera sido muy difícil que la geometría euclidiana alcanzara el grado de desarrollo al cual llegó. La demostración geométrica que condujo a la primera gran crisis de la matemática al probarse que la diagonal y el lado de un cuadrado no son conmensurables es un ejemplo ilustrativo de la forma como la regla y el compás acompaño a los griegos en los momentos decisivos de su praxis matemática.

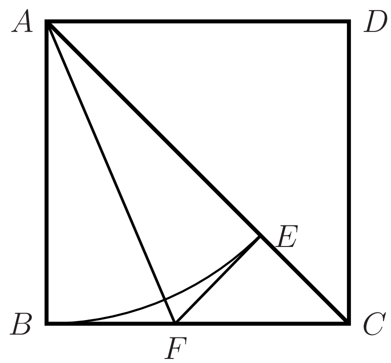
En efecto, dos segmentos a y b son conmensurables, si existe un tercer segmento x tal que $a = nx$ y $b = mx$ para algunos enteros positivos n y m.



Supongamos que la diagonal del cuadrado sea conmensurable con su lado. Entonces existe x medida común de la diagonal y el lado del cuadrado $ABCD$.

Tracemos una recta perpendicular a AC en el punto E tal que $AE = AB$. Existen m y n naturales tales que $AB = mx$ y $AC = nx$, luego $EC = (n - m)x$.

Los triángulos rectángulos ABF y AEF son iguales (congruentes) porque tienen un cateto igual $AB = AE$ y la hipotenusa AF común. Luego $BF = FE$.



Por otra parte los triángulos CEF y CBA son semejantes ya que

$$\angle E = \angle B = \angle 90^\circ \quad \text{y} \quad \angle C \quad \text{es común;}$$

entonces $EC = FE$ (porque $AB = BC$). De donde $BF = EC$ y por lo tanto

$FC = mx - (n-m)x = (2m-n)x$. Llamemos

$$n_2 = (2m-n) \quad \text{y} \quad m_2 = n - m$$

Es claro que

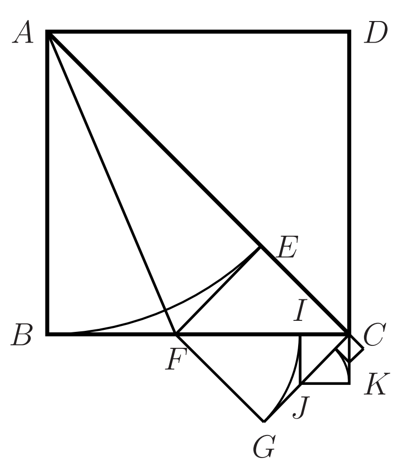
$$0 < n_2 < n.$$

Construimos el cuadrado de lado

$$\overline{EC} = m_2 x \quad \text{y diagonal} \quad \overline{FC} = n_2 x.$$

Procediendo en forma similar a como lo hicimos con el cuadrado $ABCD$, tenemos que es posible construir un cuadrado $IJKC$ sobre la diagonal FC del cuadrado $FECG$, tal que

$$\overline{IC} = m_3 x \quad \text{y} \quad \overline{JC} = n_3 x \quad \text{con } m_3 \text{ y } n_3 \text{ naturales y además} \quad 0 < n_3 < n_2.$$



Este proceso puede continuar indefinidamente (infinitamente) y en particular se van generando indefinidamente números naturales,

$$n > n_2 > n_3 > \ldots > n_k > \ldots$$

lo cual es una contradicción ya que toda sucesión decreciente de números naturales tiene un elemento mínimo.

Ante la imposibilidad de resolver algunos problemas con el uso de la regla y el compás los geómetras griegos construyeron instrumentos que les permitían solucionarlos. Hipócrates de Quios (440 a.n.e.) introdujo un instrumento mecánico denominado Tetragonizusa que permite duplicar el cubo; Platón también construyó un aparato para cuadrar el rectángulo y Arquímedes ideó un aparato que permitía trisecar un ángulo arbitrario.

Como herencia del imperio romano, en la Edad Media cristiana se empleaba fundamentalmente el ábaco de fichas para calcular y como forma de representar los números se recurría a la numeración romana. Este instrumento lo heredaron a su vez los Romanos de los griegos. Las operaciones aritméticas con el ábaco requerían numerosos ejercicios de aprendizaje, especialmente para las incómodas operaciones de multiplicación y división que las ejecutaban por medio de adiciones y sustracciones reiteradas.

En este periodo histórico, el problema central consistía en cómo calcular, a tal punto que esta actividad era realmente una forma de poder, los notarios dependían de quienes supieran calcular, mientras que en la actualidad son muchos los que saben hacerlo, en esa época muy pocas eran los que poseían esta habilidad pues dependían completamente del ábaco.

La influencia del ábaco prevaleció hasta finales del siglo XV, en donde después de más de ocho siglos de lucha, finalmente, se imponen los métodos empleados por los algoristas sobre los que utilizaban los abalistas, lográndose un hecho de excepcional importancia para la el desarrollo de la matemática y es que la habilidad para calcular pasa de ser un patrimonio de tan sólo un pequeño grupo de privilegiados, para convertirse en una opción que está al alcance de muchas personas, lo cual acercó mucho más la matemática a las personas y a los matemáticos les permitió ampliar su horizonte del conocimiento creando un ambiente propicio para la construcción de nuevas teorías matemáticas. En pocas palabras: El conocimiento se popularizo y el saber calcular dejó de ser una fuente de poder.

Esta victoria representa el triunfo del sistema de numeración indu-arábico (o decimal) y se convierte en uno de los acontecimientos más importante en la matemática de la Edad Media, por los siguientes motivos:

1. Se muestra claramente la relación finito-vs-infinito: con sólo diez cifras o dígitos es posible nombrar cualquier número. Las secuencias de cifras crecen indefinidamente.

2. Se introduce el cero, hasta entonces inusitado, cuyo nombre inicial era **circulus** (círculo pequeño), posteriormente **cifra** (el vacío del árabe as-sifr) y también **figura nihili** (cifra de nada). Aunque en honor a la verdad tardó mucho tiempo para que este número fuera aceptado en el mundo occidental cristiano.

3. Se introducen por primera vez las fracciones decimales, aunque sin sacar todo el partido a este descubrimiento.

4. Surgen algoritmos para realizar operaciones aritméticas mucho más ágiles que los utilizados con el ábaco.

Se habían dado las condiciones necesarias para la construcción de máquinas de cálculo. Es así como por ejemplo, Pascal construyó en 1642 una máquina para calcular con engranajes y Leibniz inventó una máquina que realiza las cuatro operaciones y cuyo diseño básico fue el que se empleó en la construcción de las denominadas máquinas sumadoras que fueron utilizadas en los siglos posteriores.

En el siglo XIX inspirado en los telares, el matemático Charles Babbage, profesor de la Universidad de Cambridge crea el primer computador moderno el cual denominó "*El Motor Analítico*"; y años más tarde construye el "*Motor Diferencial*". Su alumna Ada Byron Lovelace además de haber patrocinado estas máquinas, diseña el primer programa computacional que fue empleado en el *Motor Analítico*.

Podríamos continuar mencionando muchos otros matemáticos que jugaron un papel trascendental en la fundamentación teórica de la computación moderna: Desde los logicistas del siglo XIX como Boole, Lewis y DeMorgan hasta Alan Turing, en Inglaterra quien por primera vez establece matemáticamente el concepto de máquina de cálculo. Siguiendo la tradición de la escuela de Gottingen, se destacan Kurt Godel y John von Neumann, el primero sienta las bases de la computación teórica con la teoría de las funciones recursivas y el segundo presenta los fundamentos de la denominada inteligencia artificial y lleva a la práctica la teoría computacional mediante la construcción de los primeros computadores electrónicos.

Como podemos darnos cuenta los matemáticos han sido artífices fundamentales de la computación moderna, pero por las características particulares del surgimiento y desarrollo de la educación superior en Colombia, por la ignorancia de la componente matemática que subyace al problema de la calculabilidad y por el desconocimiento de la historia que hay alrededor del tema, los matemáticos colombianos hemos relegado el liderazgo que deberíamos ejercer en este campo, a manos de otros profesionales.

En el reciente homenaje que organizo el capítulo de Colombia de la IEEE a la memoria de Alan Turing, el 7 de Junio pasado, con motivo de los 50 años de su controvertida muerte, me sorprendió que tan solo cuatro matemáticos estuviéramos presentes y la gran mayoría de los asistentes eran ingenieros y estudiantes de ingeniería.

Aquí se está repitiendo la historia de lo que pasó con el problema de la enseñanza de la matemática en Colombia se menosprecio por los matemáticos. Aunque la actividad fundamental que realizaban era la de la enseñanza de esta ciencia, parecía que muchos de ellos se sentían avergonzados que se les llamaran profesores porque consideraban de menor cuantía el enseñar. En pocas palabras se consideran a si mismos investigadores puros, por cierto, con muy pocas publicaciones de valía internacional. Cuando algunos empezaron a despertar, se encontraron con que otras personas, muchas de ellas alejadas del mundo matemático, han ocupado el liderazgo en la enseñanza de esta ciencia y muchas veces fueron quienes trazaron las directrices y sirvieron de consultores de los gobiernos de turno acerca las políticas que deben implementarse en relación con la enseñanza de las matemáticas. Sobra decir que las consecuencias de este error han sido funestas para el desarrollo de la matemática y su enseñanza en nuestro país.

Colombia es una nación que en septiembre del 2003 tenía una población de 43.043.060 de habitantes con 2.819.081 desempleados y 6.584.000 subempleados, en donde de cada 100 jóvenes entre 18 y 25 años tan sólo 15 llegan a las puertas de la universidad.

Muchas veces se hace caso omiso de nuestra realidad y se implementan políticas educativas que se ajustan a situaciones ideales y por consiguiente fracasan, de ahí que se haga necesario construir con realismo nuestras propias alternativas y no copiar acríticamente métodos foráneos en relación con el problema que nos compete. Por los motivos expuestos, me permito poner a consideración de ustedes las siguientes propuestas:

1. Aprovechar el sofware de distribución libre cuyas ventajas son:

    1.1. El costo económico es muy bajo.

    1.2. Es evaluable por pares académicos.

1.3. El estudiante puede hacer sus prácticas en su casa o en donde quiera.

1.4. Es de constante actualización.

1.5. El costo social es la capacitación de la gente (el sofware propietario también tiene este costo).

1.6. Dinamiza la generación de empleo basada en la prestación de servicios desde la academia.

1.7. Se pueden formar redes de usuarios que se truncan con el sofware propietario.

1.8. No compromete la autonomía universitaria, ni se tienen que pagar costos onerosos de propiedad intelectual, lo que si sucede con el sofware propietario.

Dentro del sofwarw libre es posible encontrar programas de excelente calidad como XMAXIMA en álgebra computacional; DRGEO en geometría computacional; el procesador de texto para lenguaje matemático TECSMAX y el programa R para estadística.

Con la combinación de XMAXIMA y TECSMAX se tiene un programa equivalente por ejemplo al Scientific Work Place; el programa R es equivalente por ejemplo al SPS o al SAS; y el SCILAB es equivalente al costosísimo y omnipresente MATLAB.

La Facultad de Ciencias de la Universidad Javeriana ha creado el sistema operativo SCILIX que está conformado por los paquetes de sofware libre ya mencionados y otros más, que cualquier persona puede bajar de la siguiente dirección electrónica:

www.javeriana.edu.co/ciencias/u_sistemas

2. Desde hace más de 15 años todos los programas de álgebra computacional o de geometría computacional están en condiciones de resolver cualquier problema soluble en matemática básica y también muchos otros en matemática superior; la diferencia en el tiempo de ejecución de un proceso entre una versión y otra de uno cualquiera de estos programas es mínima, pero en cambio, la diferencia en costos entre las últimas versiones y las anteriores es muy grande.

   Yo he construido cerca de 220 programas de álgebra y geometría computacionales con las versiones para DOS del programa DERIVE, las cuales me han prestado una gran ayuda en mis cursos y en mis trabajos de investigación. Algunos de estos programas han sido publicados en libros y revistas

> y, además, los he presentado en congresos y coloquios; cuando los he llevado a versiones más recientes me he dado cuenta que la pequeña diferencia en tiempo de ejecución muchas veces depende más de la máquina que del programa.
>
> Mis hipotéticos críticos no me han podido demostrar que estoy equivocado, pues la única manera válida sería el construir programas más eficientes que los míos en versiones más recientes. Si así lo hicieren, no tendría inconveniente en aceptar sus afirmaciones; mientras tanto me permito sugerir como otra alternativa viable en los procesos **masivos** de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas asistidas por computador, que se dé a través de la de adquisición de versiones útiles y de bajo costo de los programas de álgebra o geometría computacionales.
>
> Hace ocho años cuando la Prentice Hall insertó una copia de la versión 3.00 del programa DERIVE en cada uno de los libros de *Matemáticas con Tecnología Aplicada* para los grados 6 a 11, tuvo que pagar tan sólo un dólar por cada una de estas copias.

Un problema central que debemos debatir estriba en lograr definir cómo debe emplearse el computador en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Cualquiera que sean las políticas que se piensen poner en práctica al respecto, deben partir de la necesidad de capacitar tanto a los profesores como a los alumnos, no sólo en el manejo de comandos (como se ha hecho tradicionalmente), sino fundamentalmente debe lograrse que docentes y alumnos estén en capacidad de programar, ya que si esto no se cumple, es muy probable que se termine usando el computador sólo para calcular y no como un importante instrumento que contribuye al desarrollo en el alumno de su capacidad de análisis lógico-deductivo.

Reducir la enseñanza de las matemáticas al uso de comandos de programas de álgebra o geometría computacional, nada tiene que ver con la formación matemática del estudiante, resulta un engaño y tiene efectos nocivos ya que se desvirtúa el objetivo central de la enseñanza de la matemática, por tanto es una actitud antiética.

Para tratar un problema en matemáticas, usualmente empiezo con una motivación del mismo muchas veces apoyándome en el contexto histórico; recurro, a menudo y cuando es posible, al enfoque geométrico. A continuación paso al enfoque analítico; después viene el enfoque algebraico y, finalmente, apoyándome en la programación matemática, utilizo el enfoque computacional: Esta es, en esencia, la forma principal como creo que debe emplearse el computador en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

David Hilbert sostenía que se domina una teoría matemática cuando se logra explicarla con tanta claridad de modo que cualquier persona puede entenderla. La experiencia me ha demostrado que la programación matemática estimula la capacidad de síntesis; permite familiarizarse con el paso de lo discreto a lo continuo; desarrolla la creatividad; hace más atractiva, motivante y dinámica la matemática, y, en no pocas ocasiones, nos depara sorpresas al descubrir alumnos que encuentran en la programación matemática un camino válido para mostrarnos un talento que permanecía oculto.