La influencia de la percepción en la construcción de conjeturas geométricas

David Benítez Mojica
Universidad Autónoma de Coahuila
dbenitez@mail.uadec.mx
Lizet Aimé Castañeda Valdez
Universidad Autónoma de Coahuila
mar_aime@yahoo.com

1. Introducción

El mundo actual se caracteriza por la difusión y la apropiación de la tecnología en todos los ámbitos de la vida, así como por la evolución de las prácticas laborales y ciudadanas que impone un extraordinario dinamismo a la sociedad. Vivimos en una era computacional en la que los estudiantes acceden con relativa facilidad a su uso. Atendiendo estas necesidades, los investigadores en educación matemática deben proponer y desarrollar proyectos de resolución de problemas de matemáticas.

El objetivo central del estudio que se reporta en el presente documento fue describir la influencia que ejerce la percepción en la construcción de conjeturas en alumnos de segundo año de secundaria en México (equivale a séptimo grado en el sistema educativo Colombiano).

Así mismo, el trabajo pretende documentar sobre los aspectos de instrucción que ayudan a propiciar en el aula un ambiente que permita contribuir al desarrollo de procesos fundamentales del pensamiento matemático (búsqueda de patrones, construcción de conjeturas, uso de múltiples representaciones, comunicación de ideas matemáticas, etc.) con estudiantes de segundo año de secundaria.

Por último, en el estudio que aquí se reporta, se implementó el uso de la geometría dinámica y se analiza el impacto que tuvo en la búsqueda de patrones y formulación de conjeturas.

En México se han elaborado programas mediante los cuales los profesores y estudiantes discuten aspectos de la matemática apoyados por la tecnología computacional (Calculadoras y Computadoras) y con Hojas de Trabajo diseñadas para favorecer el autoaprendizaje. El programa de Enseñanza de las Matemáticas Asistidas con Tecnología (EMAT) que diseñado, aplicado y evaluado a nivel piloto por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-I.P.N, actualmente se lleva a cabo de manera masiva en las secundarias públicas del Estado de Coahuila- México.

El programa EMAT está vigente en 256 escuelas secundarias del Estado de Coahuila. Se han capacitado aproximadamente 800 maestros de matemáticas en el manejo de Cabri, Excel y Calculadora TI-92 y en los aspectos didácticos que requieren la incorporación de la tecnología en el aula. Existe una metodología de la expansión basada en la multiplicación de cuadros. Aproximadamente han participado 110, 000 alumnos del nivel de secundaria en tres generaciones, bajo un convenio con las autoridades estatales y federales.

Con el propósito de evaluar y darle seguimiento al programa, se hizo necesario realizar estudios diagnósticos sobre: las concepciones que manejan los estudiantes de secundaria en algunos temas del currículo oficial y sobre su desempeño en la resolución de problemas de matemáticas. En este proceso, resultó de mucha utilidad el uso del Internet para la toma masiva de datos.

Dentro de la infraestructura que maneja el programa se cuenta con 256 secundarias públicas dotadas con un Laboratorio de Cómputo Escolar (LACES). Cada Laces cuenta con 20 computadoras en red. El Centro Siglo XXI de Informática Educativa, fue creado por la Secretaría de Educación Pública con tres propósitos:

hacer mantenimiento preventivo y correctivo a las máquinas, organizar cursos de formación y actualización de maestros en cuanto al uso de la tecnología en el aula y apoyar a los investigadores en la toma de datos para evaluar el impacto y seguimiento de programas de innovación educativa.

El estudio que se reporta en el presente documento, es una de las investigaciones que se han realizado en el programa EMAT.

2. Revisión de Literatura

Se identifica a la resolución de problemas como una actividad importante para el aprendizaje de las matemáticas (Schoenfeld, 1992; SEP, 1994; Santos, 1997; Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), 1998; NCTM, 2000; Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España, 2003). Estas propuestas señalan que aprender matemáticas va más allá de memorizar un conjunto de definiciones, algoritmos y técnicas para resolver actividades rutinarias. Se señala que debe propiciarse en el aula un ambiente en el cual los estudiantes puedan comunicar sus ideas, hacer preguntas, usar múltiples representaciones, construir conjeturas y formular contraejemplos.

La resolución de problemas ofrece una opción que permite ver bajo un enfoque dinámico el proceso de aprendizaje. Así mismo, cuestiona la aceptación de las matemáticas como un conjunto de hechos, algoritmos y procedimientos que el estudiante deba aprender de memoria. Bajo este enfoque, los estudiantes están en plena actividad: hacen preguntas, transforman el problema, debaten, conjeturan y formulan contraejemplos.

Por ejemplo, Schoenfeld (1992) discute el papel de la resolución de problemas en el pensamiento matemático, afirmando que:

> *Para aprender matemáticas se deben conocer las reglas del lenguaje de las matemáticas; es importante para lograr la motivación, que los*

> *estudiantes vayan más allá de la expresión de tales reglas. Esta transformación sugiere cambios en el contenido curricular y en el estilo de instrucción que involucran: buscar soluciones, no sólo memorizar procedimientos; explorar modelos, no sólo memorizar fórmulas; formular conjeturas, no sólo hacer ejercicios. (p. 335).*

Desde esta perspectiva, se realizó un estudio donde los estudiantes tuvieron experiencias de aprendizaje que incluyen actividades propias del quehacer matemático. Para darle sustento a este enunciado, se presentan las siguientes ideas:

a. La experiencia matemática que desarrollan los estudiantes en la escuela no es el reflejo de algunos aspectos esenciales de la actividad matemática (Estrada, 2000; Goldenberg & Cuoco, 1997).

b. Cuando se reflexiona sobre la pregunta: ¿Qué significa pensar matemáticamente?, emergen algunas creencias sobre esta disciplina, posiblemente salgan a flote las experiencias como estudiantes, como profesores y como investigadores. En esta dirección, Polya (1966) asegura:

   > *Las matemáticas tienen muchos aspectos. Para muchos estudiantes las matemáticas las pueden ver como un conjunto de rígidas reglas, algunas de las cuales se aprenden de memoria antes de los exámenes finales, y todas ellas se pueden olvidar después. Para algunos maestros las matemáticas son un sistema riguroso de pruebas que, no obstante, hay que abstenerse de presentarlas en clase, presentando, en cambio, alguna ilustración del teorema. Para el matemático activamente interesado en la investigación las matemáticas pueden parecer un rompecabezas: usted tiene que intuir un teorema matemático antes de probarlo, intuir la idea la prueba antes de realizarla en detalle. p. 464*

c. Paralelamente pueden surgir preguntas como ¿Cuáles son las actividades sobresalientes que desempeña un matemático en el ejercicio de su profesión? ¿Cuáles de estas actividades están presentes en el ejercicio de la matemática escolar? Bajo esta misma óptica, Santos (2000) escribe:

Una parte fundamental en las agendas de investigación ha sido identificar y caracterizar rasgos fundamentales de lo que significa aprender matemáticas. Una respuesta general es que los estudiantes en sus experiencias de aprendizaje deben mostrar actividades propias del quehacer matemático.

En este mismo sentido, (Goldenberg y Cuoco, 1996; Goldenberg, 1996) sugieren que cada curso o experiencia académica en la escuela, se debe utilizar como oportunidad para ayudar a los estudiantes a desarrollar lo que denominan hábitos generales del pensamiento matemático. Sugieren que los estudiantes deben poder ser: constructores de patrones, experimentadores, comunicadores de las ideas matemáticas, capaces de visualizar una idea matemática, constructores de conjeturas.

En recientes investigaciones y reformas a los planes de estudio, se destaca la importancia del empleo de la tecnología en en el aprendizaje de los estudiantes (Laborde, 1995; Balacheff y Kaput, 1996; Demmana y Waits, 1999; MEN, 1999; Goldenberg, 2000; Santos, 2000; NCTM, 2000; Moreno, 2002).

En este sentido, la Secretaría de Educación Pública en México (SEP, 1994) recomienda:

El uso de la calculadora como auxiliar en la solución de problemas (p. 46).

Esta sugerencia constituye una apertura al uso de la tecnología dentro del aula de matemáticas.

En esta misma dirección, la modificación de los programas de estudio MEN (1998) en Colombia contempla el uso de las nuevas tecnologías. Sobre este particular explicita:

En la educación primaria, la calculadora permite explorar ideas y modelos numéricos, las razones de un resultado obtenido previamente con *lápiz y papel o mediante cálculo mental. Para cursos más avanzados las calculadoras graficadoras constituyen herramientas de apoyo muy potentes para el estudio de las funciones, por la rapidez de la respuesta a los cambios que se introduzcan en las variables y por la información pertinente que pueda elaborarse con base en dichas respuestas y en los aspectos conceptuales relacionados con la situación de cambio que se esté modelando. (p. 34).*

Esta renovación curricular maneja la idea de que las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas, que enriquecen y transforman el currículo.

El empleo de la tecnología es un aspecto importante en la instrucción matemática (NCTM, 2000). En este contexto propone:

La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Influye en la matemática que se enseña y ayuda al aprendizaje de los estudiantes. (NCTM, 2000, p. 30).

Este principio constituye un eje central del presente estudio de investigación.

Por otra parte, en la reciente reforma al currículo español, se sugiere que la calculadora y ciertos programas informáticos, resultan ser recursos de primer orden en la investigación y análisis de propiedades numéricas y gráficas y en este sentido debe potenciarse su empleo (BOE, 3/07/2003).

En el estudio de investigación que reporta en el presente documento, se incorpora el uso de Cabri. Este software puede denominarse “procesador de ideas matemáticas” (Goldenberg, 2000), también puede clasificarse dentro del grupo de software abierto, en el sentido en que los estudiantes producen ideas, las expresan, desarrollan y editan. En este tipo de ambientes computacionales, el maestro y el alumno deciden qué hacer con la herramienta, en lugar de que el propio programa de cómputo guíe de manera directa el trabajo del usuario, como ocurre con los llamados tutoriales.

Cabri es un software de geometría dinámica que permite manipular los objetos geométricos que aparecen en la pantalla. Esto hace posible que el estudiante trace y deforme figuras, un seguimiento de los cambios que se producen en esta transformación puede conducir a la construcción de propiedades invariantes de las figuras.

Goldenberg & Cuoco (1998) hace una descripción del software de geometría dinámica en los siguientes términos:

> *Un nuevo tipo de software conocido como geometría dinámica, está generando tal interés y entusiasmo que, también, está incursionando rápidamente en las escuelas. El software proporciona ciertos objetos primitivos (puntos, líneas, círculos), herramientas básicas (por ejemplo, perpendicular a una línea L a través del punto P); agrupando todo esto en los objetos compuestos, y varias posibles transformaciones, incluyendo, por ejemplo, la reflexión a través de un punto o una línea. También le permite al usuario medir ciertas partes del dibujo, y examinar la traza que dejan los puntos, segmentos, o círculos cuando se aplica una transformación dinámica.*

Este tipo de software le permite al usuario la transformación de las figuras en tiempo real. Esta característica notable permite que los estudiantes, después de que hagan una construcción, muevan libremente ciertos elementos de un dibujo y que observen cómo se van transformando otros elementos. Mientras que los elementos libres se mueven en el dominio en el cual existen, el software mantiene todas las relaciones que fueron especificadas como atributos esenciales de la construcción original.

Algunas características que se tuvieron en cuenta para usar Cabri en el estudio fueron:

a. El software dinámico permite estudiar la deformación continua de una construcción geométrica, o el lugar geométrico de un cierto objeto mientras que otros se transforman de una manera continua.

b. El software puede ayudar a los estudiantes a explorar y construir conjeturas.

c. Permite hacer simulaciones de los problemas matemáticos para ayudar a encontrar relaciones.

d. Posibilita un acercamiento gráfico a la solución de problemas de variación.

e. Permite el empleo de diferentes registros de representación (gráficos, tabulares y algebraicos).

3. Sujetos,procedimientos y técnicas

La investigación realizada es de tipo cualitativo. El propósito central es documentar sobre el impacto que tiene la percepción en la construcción de conjeturas en alumnos de segundo año de secundaria.

3.1. Fases del estudio

Examen en Línea. Una vez que se conformó la batería de preguntas se procedió a buscar el apoyo de Siglo XXI, institución educativa perteneciente a la SEP- Coahuila, que se encarga de realizar evaluaciones masivas a los estudiantes del nivel secundaria, darle mantenimiento al equipo de cómputo de las escuelas y capacitar profesores en el manejo de la computadora para la enseñanza.

Con el permiso de la SEPC y el apoyo de Siglo XXI se puso el examen en línea.

Los objetivos del examen en línea fueron:

a. Identificar el efecto que tiene la percepción en la construcción de conjeturas.

b. Recolectar información que sirva de base para el diseño de hojas de trabajo en ambientes de geometría dinámica.

Población. Se invitó a participar en el estudio a las 256 escuelas secundarias Públicas que han trabajado en el Programa EMAT-Coahuila. La invitación la aceptaron 43 escuelas de las regiones: Norte, Carbonífera, Laguna y Sur. En el estudio participaron 26213 alumnos de los tres niveles de secundaria.

A cada escuela y alumno se le asignó un password con el cual podían entrar a la página web de Siglo XXI. Los estudiantes disponían de 45 minutos para contestar toda la encuesta. Los datos llegaron a un servidor de Siglo XXI y se nos entregó una base de datos en Excel para iniciar el procesamiento.

Estudio Experimental Una vez aplicado el examen en línea, se procedió a analizar la información para detectar los errores y las virtudes más frecuentes en las respuestas. Con base en esas respuestas se procedió a diseñar hojas de trabajo que ayudaran a los alumnos a superar las dificultades que se observaron en el examen.

El presente trabajo se realizó en el área urbana de la ciudad de Saltillo, Coahuila., en los meses de marzo a mayo del 2004 en éste participaron alumnos de segundo año de secundaria, con edades entre 13 y 14 años y con un nivel socioeconómico medio.

Un aspecto importante en este estudio, fue el manejo de tecnología computacional. Las sesiones de trabajo se realizaron un centro de cómputo que contaba con 22 computadoras; a las cuales, se les instaló el software de Cabri. Los estudiantes recibieron instrucción previa sobre el manejo básico de algunas herramientas del Software Cabri.

En el estudio se utilizaron problemas relativos a la geometría, y sus contenidos están en base al Plan y Programas de estudio del currículo oficial de México, SEP 1993, nivel de secundaria.

Método de recolección de datos. Durante el proceso de investigación, la recolección de datos se realizó tomando en cuenta la siguiente metodología:

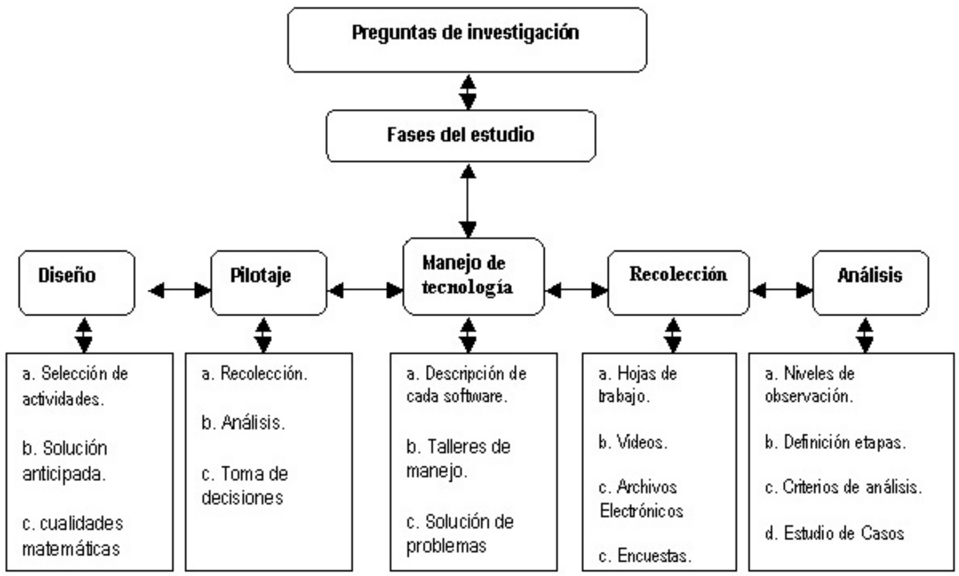


Figura 1.

Diseño. En esta fase se seleccionan los problemas y se diseñan las hojas de trabajo que sirven para recolectar la información. Para este diseño, se tuvieron en cuenta varios criterios: las actividades contienen temas del currículo oficial de secundaria, se evalúa el efecto que tienen los aspectos preceptuales como la posición, el tamaño o la forma en la construcción de conjeturas. Todas las actividades fueron resueltas y se analizaron las actividades del pensamiento matemático y los prerrequisitos que involucra la solución.

Pilotaje. Se realizó un estudio piloto, con varios propósitos:

- Discutir sobre el potencial de las actividades seleccionadas para el estudio.
- Someter a prueba los procedimientos de recolección de la información.
- Realizar un análisis de las virtudes y los errores cometidos en el estudio piloto.

- Profundizar en el marco teórico que le da soporte al estudio.
- Precisar las categorías de análisis de los resultados.
- Hacer una serie de ajustes para la toma definitiva de los datos.

Después de analizar los resultados del estudio piloto se hicieron ajuste a algunas preguntas que resultaron ambiguas.

Diagnóstico. En primera instancia, se realizó una prueba piloto de diagnóstico en el grupo de 33 alumnos. Las preguntas del diagnóstico fueron similares a las utilizadas en el examen en línea. El examen diagnóstico tuvo los siguientes objetivos:
Conocer las concepciones que tienen los alumnos de segundo año de secundaria con temas de geometría.

Saber el dominio de conocimiento de los alumnos sobre aspectos básico como: Concepción sobre ángulo y medida de un ángulo, concepto de rectas paralelas, perpendiculares y secantes, igualdad de ángulos opuestos por el vértice, adyacentes y suplementarios, Ángulos entre paralelas y una secante y suma de ángulos internos de un triángulo.

Teniendo en cuenta los resultados de la prueba de diagnóstico, se emprendió una secuencia didáctica para que los estudiantes encontraran sus errores e intentara resolverlos. En la investigación se usaron problemas de geometría que involucran los temas del programa de estudio oficial relativos a la geometría del nivel de segundo año de secundaria y basándose con los resultados que se obtuvieron en la prueba de diagnóstico, se elaboraron secuencias didácticas de exploración con el apoyo de Cabri.

Las preguntas que componen el diagnóstico en la fase experimental fueron similares a las que se aplicaron al grupo que contestó el examen en Internet. El examen estuvo compuesto por 25 preguntas. En la sección de análisis de información se presentan tres problemas incluidos en la batería de preguntas para que el lector se pueda formar una idea del tipo de actividades que resolvieron los estudiantes.

Manejo de la tecnología. En esta fase se les enseñó a los estudiantes a usar cabri. El profesor explicó las características más relevantes del programa. Se realizaron tres talleres de manejo. En estos espacios de trabajo, los estudiantes pudieron usar los comandos básicos del software como la construcción de figuras, el trazo de paralelas, perpendiculares, mediatrices, verificación de propiedades, arrastre, traza, medición, construcción de tablas, medición y edición de figuras.

Recolección de la información. La información se recolectó en sesiones de trabajo de 90 minutos. Las clases se impartieron en un centro de cómputo dotado con 22 computadoras. Las actividades se les presentaron por escrito, contenían un problema y un conjunto de sugerencias, preguntas y espacios para sacar conclusiones, a estas actividades les llamaremos hojas de trabajo. Los alumnos podían usar el software de geometría dinámica, hacer medidas, manipular las figuras y sacar las conclusiones en la hoja de trabajo. Además de los reportes escritos, los alumnos reportaron su trabajo en un archivo electrónico.

4. Presentación y análisis de la información

Esta sección se divide en dos partes. En la primera se presenta el desempeño de los estudiantes en el estudio diagnóstico que se realizó en Internet. En la segunda parte se presentarán los resultados del estudio experimental.

Para cumplir con los objetivos que se trazaron en el presente reporte de investigación, se presentan los resultados de tres actividades que se consideran representativos de toda la batería de 25 preguntas.

Resultados del examen diagnóstico en Internet.

Recordemos que se realizó un diagnóstico con 26213 que pertenecen a 43 escuelas secundarias públicas del Estado de Coahuila. El examen fue contestado por alumnos de los tres niveles escolares de secundaria (estos tres niveles, en Colombia equivalen a Sexto, Séptimo y Octavo grados). A cada escuela y alumno se le asignó una clave de acceso a una página Web, en la que podían encontrar problemas de selección múltiple. Cuando terminaban de responder el examen, pulsaban la opción de enviar la información y no podían regresar a cambiar la información.

A continuación se presentan sobre tres preguntas de este examen. La pregunta número 22 corresponde al área de triángulos, en la pregunta número 23 se indaga por la suma de los ángulos internos en un triángulo, mientras que en la No 25 se pregunta por la medida de ángulos.

El objetivo de poner estas preguntas fue para indagar sobre el efecto que tiene la percepción en la toma de decisiones en la resolución de problemas.

Pregunta No 22. En la siguiente figura las rectas L y M son paralelas y sobre ellas se han dibujado los triángulos ABC y ABD:

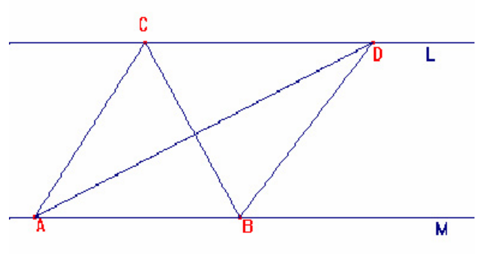


Figura 2.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a. El área del triángulo ABC es MENOR que el área del triángulo ABD

b. El área del triángulo ABC es IGUAL que el área del triángulo ABD

c. El área del triángulo ABC es MAYOR que el área del triángulo ABD

f. No sé

En la solución de esta actividad se involucran la noción de paralelismo y el algoritmo para calcular el área de un triángulo. Como se puede apreciar en la figura anterior, los triángulos ABC y ABD comparten una base (AB) y como las rectas L y M son paralelas, entonces las alturas de los triángulos en cuestión son iguales.

De lo anterior se puede concluir que las áreas de los triángulos son iguales. Por tanto, la respuesta correcta es la B. En la siguiente figura, se ubica cada opción en el eje X, Mientras que en el eje Y se ubica el porcentaje de cada opción. Veamos las respuestas que dieron los alumnos a esta pregunta:

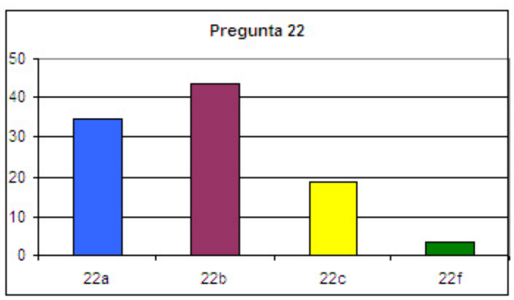


Figura 3.

En la figura No 3 podemos apreciar que únicamente el 43.3 % de la población emite una respuesta correcta. Suponemos que la mayoría de los alumnos se equivocan en la respuesta porque únicamente usan criterios de percepción (forma, tamaño y posición) y no los recursos matemáticos como la definición de área de un triángulo y el paralelismo de las rectas, para emitir sus juicios.

Pregunta No 23. En la siguiente figura se han dibujado dos triángulos, ABC y MNO:

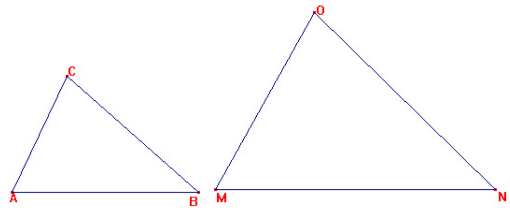


Figura 4.

a. La suma de los ángulos internos en el triángulo ABC es MENOR que la suma de los ángulos internos en el triángulo MNO.

b. La suma de los ángulos internos en el triángulo ABC es IGUAL que la suma de los ángulos internos en el triángulo MNO.

c. La suma de los ángulos internos en el triángulo ABC es MAYOR que la suma de los ángulos internos en el triángulo MNO.

f. No sé

Para contestar esta pregunta era necesario saber que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180^0. Por lo cual, la respuesta correcta es la b. La distribución de las respuestas de los estudiantes es la siguiente:

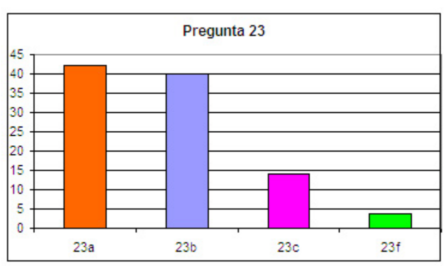


Figura 5.

El 56.3 % de la población contesta la pregunta de manera errónea. El 3.8 % de la población contesta que no conoce el resultado.

Suponemos que los estudiantes se equivocan al contestar porque utilizan como criterio el tamaño de los triángulos para resolver la actividad. Creemos que los estudiantes suponen que si el triángulo es "chico", la suma de los ángulos interiores es "chica"; en triángulos "grandes", la suma de los ángulos internos es "grande".

Pregunta No 25. En la Siguiente figura se han dibujado los ángulos AOB y COD

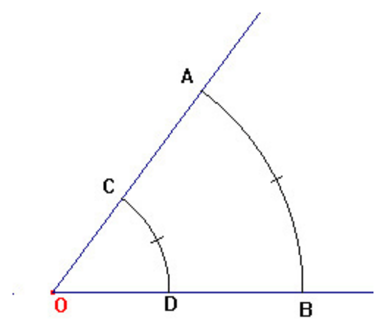


Figura 6.

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a. La medida del ángulo AOB es MAYOR que la medida del ángulo COD.

b. La medida del ángulo AOB es IGUAL que la medida del ángulo COD.

c. La medida del ángulo AOB es MENOR que la medida del ángulo COD.

f. No sé.

Diagnóstico con el grupo experimental. Se seleccionó un grupo de segundo año de secundaria (Séptimo grado en Colombia) que no hubiese participado en el examen en línea. Este grupo de alumnos contestó la misma batería de 25 preguntas.

A continuación se muestran los resultados de los 33 estudiantes en la pregunta No 23 sobre la suma de los ángulos internos en un triángulo:

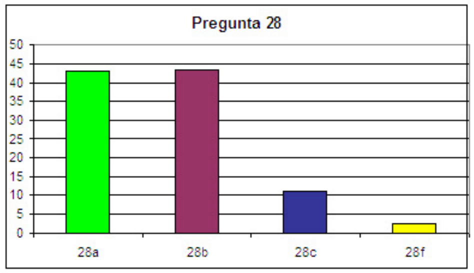
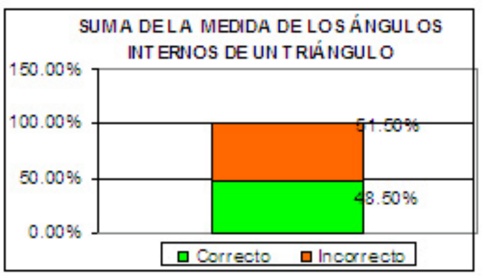
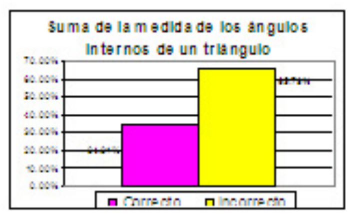


Figura 7.

Se encontraron evidencias en el grupo piloto y en el experimental, para afirmar que un considerable porcentaje de alumnos (aproximadamente 60 %) tiene criterios preceptúales (forma, tamaño, posición) para contestar las preguntas. Tales percepciones inciden de manera negativa en sus conclusiones.





Como se puede observar los resultados que se obtuvieron en el examen en línea (40 % correcto, 60 % incorrecto) a los resultados obtenidos en el grupo experimental (34 % correcto y 66 % incorrecto).

Después de aplicar un diagnóstico similar al examen en línea, se realizó un examen sobre la suma de los ángulos internos de un triángulo. Esta nueva prueba contuvo cuatro casos:
En cada caso, se le pidió al alumno que seleccionara uno de los siguientes enunciados para cada caso y explicara por qué lo eligió.

a. En el triángulo ABC la suma de las medidas de los ángulos internos es MAYOR QUE la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo DEF.

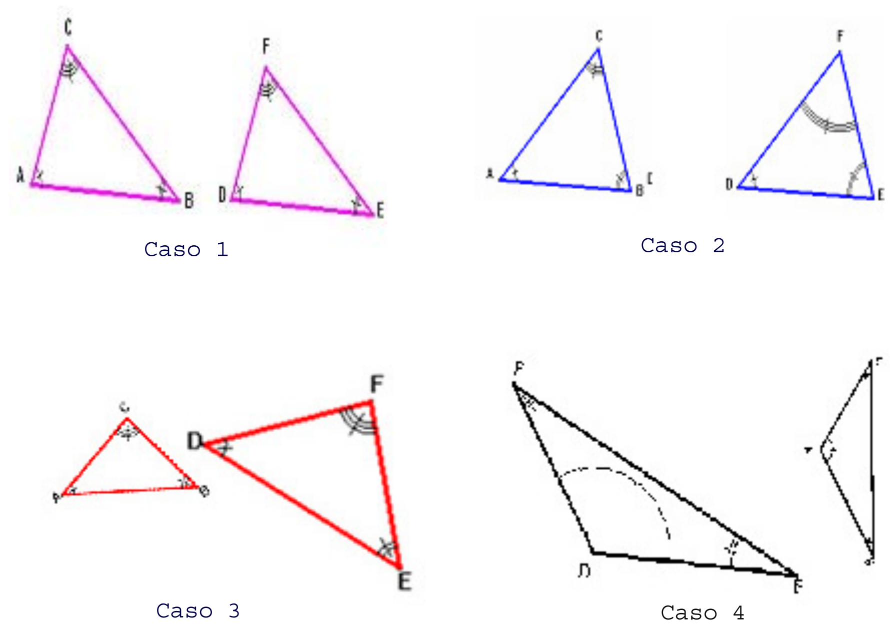


Figura 8.

b. En el triángulo ABC la suma de las medidas de los ángulos internos es IGUAL QUE la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo DEF.

c. En el triángulo ABC la suma de las medidas de los ángulos internos es MENOR QUE la suma de las medidas de los ángulos internos del triángulo DEF.

En el examen en línea los estudiantes sólo elegían la opción que consideraban correcta y no tenían espacio para justificar su respuesta. Mientras que en el examen diagnóstico los alumnos si pudieron justificar su elección. Veamos algunos resultados:

Caso 1.- Se observó que el 90 % de los alumnos contestan correctamente.

Caso 2.- La mitad de los estudiantes aciertan a la respuesta y hay alumnos que justifican erróneamente.

Se puede observar que cuando aumenta el tamaño de las marcas de los ángulos internos, también aumenta el porcentaje de error en las respuestas. Este es un indicador más que los estudiantes usan criterios preceptúales para tomar decisiones

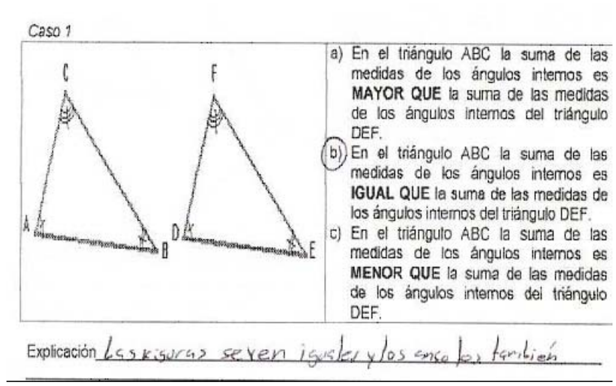


Figura 9.

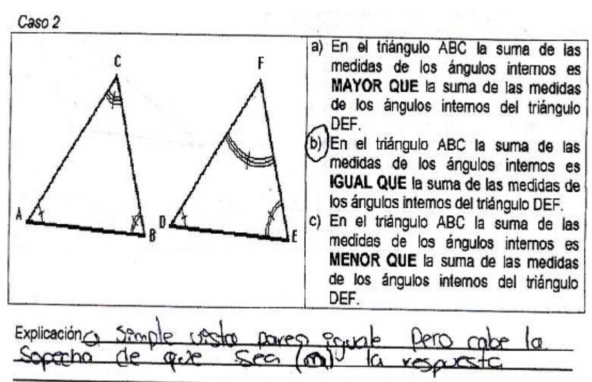


Figura 10.

en la resolución de problemas.

Caso 3.- El 60.5 % de los alumnos encierra o marca la respuesta correcta pero al dar la explicación nos damos cuenta de su concepción errónea, puesto que hacen mención al tamaño o a la posición.

Caso 4.- Al cambiar la marca del ángulo el 52.6 % de los alumnos contestan de manera incorrecta dejándose llevar por lo perceptual.

Si comparamos los resultados en el caso de los triángulos congruentes, con el caso de los triángulos no congruentes, podemos concluir que los estudiantes presentan más porcentaje de error en este último caso.

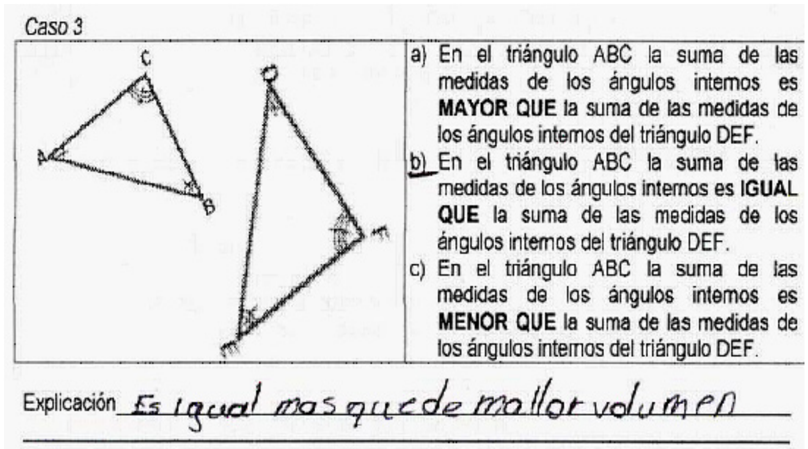


Figura 11.

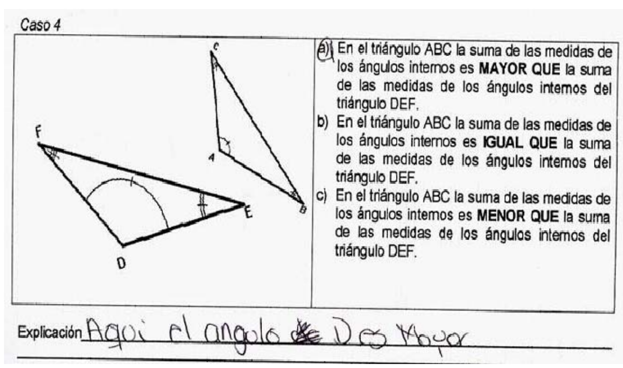


Figura 12.

Trabajo de exploración con la computadora.

Una vez terminada la fase diagnóstica, se les enseñó a los estudiantes a usar cabri. Se elaboró una hoja de trabajo con el fin de documentar el impacto que tienen el uso de la geometría dinámica en la construcción de conjeturas. Algunas actividades que realizaron los estudiantes con ayuda de cabri fueron las siguientes.

a. Construir triángulos de diferente forma y área.

b. Medir los ángulos internos de cada triángulo.

c. Sumar la medida de los ángulos internos en cada triángulo.

d. Completar la siguiente tabla:

triángulo No.	Medida del ángulo A	Medida del ángulo A	Medida del ángulo A	Suma de los ángulos internos
1				
2				
3				
4				
5				

Después de hacer la exploración dinámica, los estudiantes debían construir una ley para la suma de los ángulos internos en un triángulo. Veamos los resultados de esta parte:

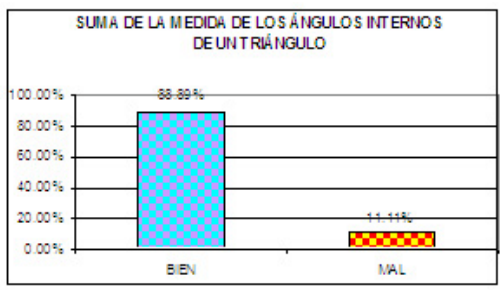
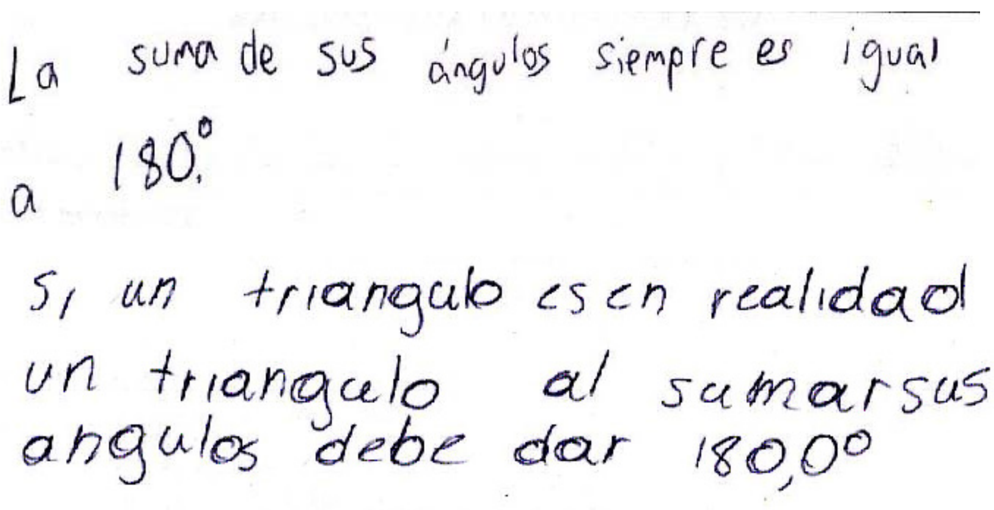


Figura 13.

La exploración dinámica ayudó a la mayoría de los alumnos a construir una conjetura correcta. La idea de trabajar con triángulos de diferente forma y tamaño, medir los ángulos internos y hallar la suma, ayudó a los estudiantes a superar sus errores, encontrar invariantes y construir conjeturas. Sin embargo, el 11.11 % de los alumnos no pudieron llegar a la conjetura correcta, porque cometen errores en la medición y suma de los ángulos.

A continuación, algunas conjeturas que redactan los estudiantes

Las conjeturas que elaboran los alumnos tienen algunos problemas de redacción, sin embargo hay un notable avance en su pensamiento matemático. Recordemos


La suma de sus ángulos siempre es igual a 180°.

Si un triangulo es en realidad un triangulo al sumar sus angulos debe dar 180,0°

que en la fase diagnóstica, se detectó que los alumnos tienen creencias erróneas en el concepto de ángulo y sobre la suma de ángulos internos en un triángulo. La exploración en cabri ayudó a los alumnos a superar estos errores y a construir una conjetura.

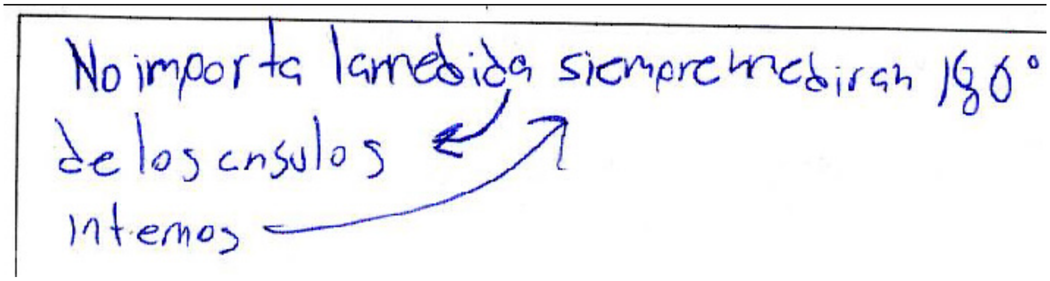
Con la ayuda de la tecnología, los alumnos pueden tener experiencias matemáticas significativas. Se considera una experiencia matemática relevante que un alumno de segundo año de secundaria (séptimo grado en Colombia) pueda construir una conjetura con sus propios recursos.

Cuando los alumnos tienen creencias erróneas, pueden usar la tecnología para explorar, hacer medidas, revisar casos especiales, construir invariantes. En este proceso, el alumno puede ensanchar el uso de estrategias metacognitivas.

5. Conclusiones y sugerencias

El presente estudio puede ser tenido en cuenta por el sistema de educación estatal como un diagnóstico del aprendizaje de la geometría en segundo de secundaria.

Se encontraron evidencias para afirmar que un alto porcentaje de alumnos (apro-



No importa lamedida siempre medirán 180°
de los angulos
internos

ximadamente 50 %) tiene criterios preceptúales (forma, tamaño, posición) para contestar las preguntas relacionadas con la medida de los ángulos y la suma de los ángulos internos de un triángulo. Tales percepciones inciden de manera negativa en sus conclusiones.

Tomando en cuenta las respuestas del diagnóstico y las hojas de trabajo se concluye que es notable la dificultad que tienen los alumnos de segundo año de secundaria para comunicar sus ideas matemáticas

De los resultados del diagnóstico y de las hojas de trabajo, se puede concluir que la utilización de entornos de geometría dinámica ayuda significativamente a erradicar las creencias erróneas que tienen los alumnos. La interacción con las hojas de trabajo y con los aspectos notables del software -tales como el arrastre, la medida, la animación, entre otras- permite ver que los estudiantes que participaron en el estudio están en capacidad de encontrar invariantes geométricas y construir conjeturas.

A partir del uso del Cabri, la interacción con las hojas de trabajo, las discusiones grupales, las preguntas y sugerencias del profesor, se concluye que un alto porcentaje de los alumnos participantes en el estudio pueden construir leyes.

A medida que avanza el estudio con la ayuda de los factores (uso de Cabri, la interacción con las hojas de trabajo, las discusiones grupales, las preguntas y sugerencias del profesor) que componen la metodología del presente trabajo, se hace notorio que los alumnos van aumentado su capacidad expresiva en los temas.

A partir del análisis de los resultados presentados en este reporte de investigación, se pueden apreciar varios procesos cognitivos ligados a la resolución de problemas:

- La exploración de la figura desconocida y su comportamiento cuando se arrastran los objetos libres. Desde esta perspectiva, el uso de la medición, de la construcción de lugares geométricos, la construcción de trazas y la manipulación geométrica de objetos al infinito, pueden verse como *nuevas estrategias* heurísticas que apoyan a la resolución de problemas.

- Un análisis de las propiedades geométricas que siguen siendo invariantes bajo el arrastre y en particular la distinción entre las propiedades de los objetos matemáticos y la apariencia visual.

- Una verificación de las supuestas propiedades geométricas de la figura, usando las herramientas proporcionadas por el software. Por ejemplo, si un lugar geométrico da la apariencia visual de ser una elipse, las estudiantes entrevistadas usaron diferentes recursos y estrategias para argumentar la validez de su apreciación. Un camino común fue el de identificar los focos, medir las distancias des un punto sobre el lugar geométrico a cada uno de los focos y sumar tales distancias. En este parte, el arrastre es usado como *estrategia de control* para verificar que la suma de estas distancias es una constante.

Encontramos evidencia experimental para afirmar que en el proceso de construcción de conjeturas con el uso de tecnología, aparece una interacción entre la visualización y conceptualización, la cual tiene dos funciones distintas: la primera se puede ver como una interpretación de aspectos visuales por medio de las nociones teóricas. La segunda consiste en validar las interpretaciones teóricas con un proceso de argumentación interna usando recursos y técnicas del software, o siguiendo una argumentación externa con lápiz y papel. Este tipo de tarea parece contribuir, de una manera muy apropiada, al aprendizaje de las matemáticas.

Se recomienda a los diseñadores curriculares hacer un plan de estudios que tenga en cuenta los efectos negativos de la percepción y el uso de la geometría dinámica para superarlos.

Bibliografía

[1] Boletín Oficial del Estado No 158 (3 de julio de 2003). *Currículo de Matemáticas en la ESO.*

[2] Estrada, J. (1998). *La formulación o reformulación de problemas como una actividad fundamental en el aprendizaje de las matemáticas*. Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-I.P.N, México.

[3] Goldenberg. E. P. (1995).Multiple Representations: A vehicle for Understanding. In Perkins, D., Schwart, J., Maxwell, M., Stone, M. (Eds.). *Software Goes to School. Teachers understanding with new technologies*. Oxford University Press. (pp 155-170).

[4] Goldenberg, E. P. (1996). *"Habits of mind"* as an organizer for the curriculum. Journal of Education, Vol 178, No 1. (pp.13-34).

[5] Goldenberg, E. & Cuoco, A. (1997). Habits of Mind: an Organizing Principle for the Curricula. *Journal of Mathematical Behavior*. 15, (pp.375-402).

[6] Goldenber, E.P and Cuoco, A. (1996). "what is dynamic geometry?" In Designing *Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space*. R. Lehrer and D. Chazan (eds.), Hillsdale, NJ:Erlbaum.

[7] Goldenberg, P. (2000). *Thinking (and talking)* about technology in math classrooms. Education Development Center, Inc.

[8] Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Santa Fe de Bogotá.

[9] Ministerio de Educación Nacional (1999).*Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas*. Editorial Magisterio. Santa Fe de Bogotá.

[10] Ministerio de Educación Nacional (2003).*Estándares curriculares para matemáticas*. Santa Fe de Bogotá.

[11] NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

[12] Santos T., L. M. (1990). Más allá de los contenidos: la importancia de la resolución de problemas en el diseño curricular. *Memorias del VI Congreso Internacional En Educación Matemática*. México. (pp.37-48).

[13] Santos T., L. M. (1992). *La resolución de problemas: El trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. Educación Matemática*, Vol. 2. No 2. (pp. 16-24).

[14] Santos T., L. M. (1997).*Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

[15] Santos, T. L. (2003). Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos. *Boletín de la Asociación Venezolana de Matemáticas*. Vol. X. No 2. (p.p 195-211).

[16] Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

[17] Schoenfeld, A. (1992). Learning to Thinking Mathematically: Problem Solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). NCTM.

[18] SEP (1994). *Libro para el maestro de matemáticas*. México.