Los números de fibonacci

Jesús Antonio Ávila G.
Profesor Universidad del Tolima
Tolima, Colombia
javila@ut.edu.co

1. Introducción

Desde los tiempos más antiguos los números han cautivado al ser humano, no solo por su aplicación inmediata a la vida cotidiana sino por la riqueza teórica y "simple" que se encuentra dentro de ellos. Existe una gran cantidad de números con propiedades especiales, entre ellos se pueden citar los números primos, números perfectos, números amigos, sociables, etc. Como puede verse la lista es bastante larga y lo más interesante es que cada clase de estas ha conducido a importantes e interesantes estudios teóricos. Los números de Fibonacci son algunos de los que más frutos han dado, pues cuentan con asiduos matemáticos y aficionados que se han dedicado a la búsqueda de las relaciones más insospechadas de estos números con la pintura, la música, la arquitectura, la poesía, la biología, la economía, etc.

2. El Origen de los Números de Fibonacci

Aunque pudiera parecer extraño, el origen de estos números resulta de un problema sencillo sobre conteo de conejos. Considérese un par de conejos adultos macho y hembra, encerrados en un cercado, donde pueden anidar y criar. Supóngase que los conejos empiezan a procrear a los dos meses de nacidos, engendrando siempre un único par macho-hembra y a partir de ese momento, cada uno de los meses siguientes un par más de iguales características. Admitiendo que no muriese ninguno de los conejos, ¿ cuántos contendría el cercado al cabo de un año? Pues observando la Figura 1, se nota que el número de conejos al cabo de cada mes corresponden a la sucesión 1,2,3,5,8,... donde cada número es precisamente la suma de los dos anteriores.

Esta sucesión es precisamente la sucesión de Fibonacci, nombre con el que se conocía a Leonardo de Pisa, tal vez el matemático europeo más grande de la

Edad Media. Su obra máxima se llama Liber Abaci, concluída en el año 1202 y donde se incluía el problema antes mencionado.

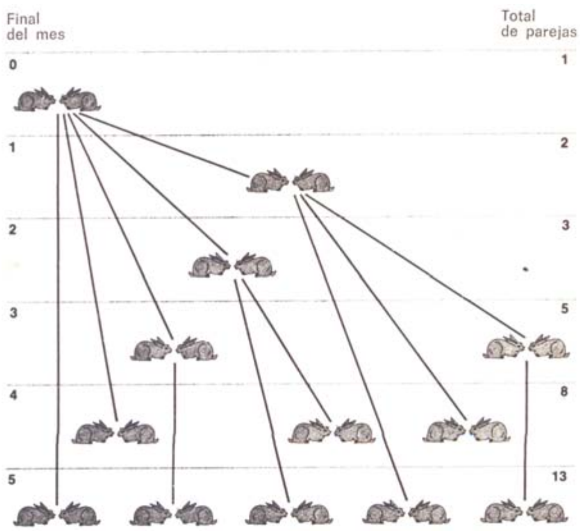

Figura 1

3. Formulación Matemática y Propiedades

Los Números de Fibonacci son la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... y en general el $n-\acute{e}simo$ número se denota por F_n, así entonces $F_1 = F_2 = 1$, $F_3 = 2$, etc.

Existen muchísimas propiedades de los números de Fibonacci, tantas que la revista The Fibonacci Quarterly se ha publicado por 40 años sin interrupción. Algunas de ellas se enuncian a continuación:

1. El $n-\acute{e}simo$ número de Fibonacci está dado por (Fórmula de Binet)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

2. La sucesión formada por los cocientes de cada número de Fibonacci y el anterior $\left(\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, ...\right)$ tiende a $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Este número es conocido como número áureo, el cual tiene relación con algunas proporciones estéticas.

3. Identidad de Cassini [3]: El cuadrado de cada número F_n se diferencia en ± 1 del producto de los dos números situados a sus lados, es decir

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

4. Dados cuatro números de Fibonacci consecutivos, la diferencia de cuadrados entre el tercero y el segundo es igual al producto del primero con el cuarto, es decir

$$F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2 = F_n F_{n+3}$$

5. Esta propiedad es asombrosa!! El recíproco del undécimo número de Fibonacci (89), puede ser obtenido de la misma sucesión, sumando de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l}
0,0112358 \\
13 \\
21 \\
34 \\
55 \\
89 \\
144 \\
233 \\
\ldots \\
\hline
0,011235955056.......
\end{array}$$

$$\frac{1}{89} = 0,0112359550561797....$$

6. Una interesante relación entre π y los números de Fibonacci, está dada por la siguiente ecuación [5]:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{F_{2k+1}}\right)$$

7. La siguiente ecuación relaciona los números de Fibonacci, con tal vez los números más especiales de las matemáticas π, i, e [4]:

$$F_k = \sum_{m=1}^{k} \quad 5^{\frac{k-m}{2}} e^{i(m-1)\frac{\pi}{2} + i(k-m)\tan^{-1}(-2)} \begin{pmatrix} 2k-m \\ m-1 \end{pmatrix}$$

En la bibliografía se encuentra una amplia gama de propiedades de los números de Fibonacci. Allí se relaciona esta sucesión con los números primos, cuadrados, cubos, números de Lucas, etc.

4. Buscando Otras Propiedades

No es difícil observar que muchas de las personas que han hecho contribuciones interesantes a la teoría de estos números, son jóvenes ó no tienen muchos conocimientos de matemáticas. Realmente aquí es donde radica la belleza y simplicidad en general, de toda la teoría de números. Un ejemplo de lo anteriormente dicho fue Mark Feinberg quien a los 14 años introdujo los números de Tribonacci y abrió el camino a toda la gama que de aquí se desprende. En este sentido vamos a intentar encontrar algunas propiedades utilizando la noción de determinante.

Consideremos en principio las tres matrices como se muestran a continuación. Obsérvese que en ellas están colocados los números de Fibonacci en su orden.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 13 & 21 & 34 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 13 \\ 21 & 34 & 55 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 13 & 21 \\ 34 & 55 & 89 \end{bmatrix}$$

Ahora al hallar el determinante de estas matrices se obtiene respectivamente 0, 0, 0. De aquí se puede inferir una propiedad general así

$$\det \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} & F_{n+2} \\ F_{n+3} & F_{n+4} & F_{n+5} \\ F_{n+6} & F_{n+7} & F_{n+8} \end{bmatrix} = 0$$

Sin embargo esta propiedad ya es conocida y de hecho puede generalizarse aún más [3].

Entonces, debemos seguir otro camino. De las tres matrices anteriores, se obtienen las siguientes submatrices:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 34 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 21 & 55 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 34 & 89 \end{bmatrix}$$

Ahora al hallar el determinante de estas tres matrices se obtiene respectivamente 8, -8, 8. Esto nos dice que allí hay una posible propiedad, la cual se puede escribir matemáticamente así

$$F_nF_{n+8} - F_{n+2}F_{n+6} = \pm 8$$

Aunque en la literatura consultada esta propiedad no se encuentra, es probable que se obtenga a partir de algunas conocidas. Sin embargo lo más interesante es la forma en que fue obtenida, utilizando determinantes!!!! Algo importante para recordar es que estas posibles propiedades son realmente conjeturas y solamente con una demostración formal, se prueba que son propiedades.

5. Comentarios Finales

La sucesión de Fibonacci es tal vez la mina de oro de los matemáticos, pues al parecer las propiedades que posee son inagotables. Además, a partir de ella se pueden definir otras nociones interesantes como números de Tribonacci, Tetranacci, Pentanacci y así sucesivamente; los Polinomios de Fibonacci, las Q-matrices de Fibonacci y las Funciones Hiperbólicas de Fibonacci [3], entre muchas otras. Invito a los lectores a introducirse en este maravilloso mundo y por qué no a encontrar propiedades aún no descubiertas.

Bibliografía

[1] M. Gardner, Miscelánea Matemática, Biblioteca Científica Salvat, Barcelona, 1987.

[2] R. Jiménez y otros, Teoría de Números para Principiantes, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1999.

[3] http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html

[4] http://users.net/hsejar/maths/fibonacci/index.htm

[5] http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibpi.html