El modelo de van Hiele en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, tomando como base la ecuación de Riccati

César Gómez
Profesor Asistente T.C. Universidad Nacional.
Bogotá D.C, Colombia
cgomez@matematicas.unal.edu.co

1. Introducción

Principalmente, se trata de brindar(buscar) una estrategia metodológica, alternativa a la tradicional, que acerque a los estudiantes de ecuaciones diferenciales, al concepto de ecuación diferencial desde la óptica del modelo de VAN HIELE, y que lo lleve a hacer una modelización matemática de problemas propios de la física, tomando como base la ecuación de Riccati.

En un proyecto anterior, realizado conjuntamente con el profesor Alberto Campos de la Universidad Nacional, se hizo un estudio detallado de la Ecuación de Riccati mediante Grupos de Lie, en el cual, ademas de la teoría de Lie para el estudio de ecuaciones diferenciales, se encontraron relaciones muy estrechas con otras ecuaciones diferenciales como son la lineal de tercer orden, y la de segundo orden reducida, para las cuales existen estudios muy profundos acerca de sus métodos de solución (cuando son solubles)y caracterizaciones de cuando no son solubles por ciertos métodos bien definidos , caso el Algoritmo de Kovaci'c. Es claro que uno de los mayores problemas a que se enfrenta el profesor, al enseñar los conceptos matemáticos, radica en la complicación intrínseca de éstos. Existen obstáculos de tipo PSICOLÓGICO y GENÉTICO, asociados con el desarrollo personal del alumno, otros obstáculos son de tipo DIDÁCTICO, y tienen que ver con el profesor, en especial su forma de enseñanza, y obstáculos de tipo EPISTEMOLÓGICO, relacionados con la naturaleza de los conceptos, mismos. En 1957, los esposos Van Hiele, presentaron en sus tesis doctorales, un desarrollo teórico y experimental, acerca de los niveles de pensamiento, cuyo propósito estaba enfocado especialmente al mejoramiento de la enseñanza de la geometría. Uno de los principales objetivos que se persiguen en la elaboración de niveles, es el de poder reconocer los obstáculos que se les presentan a los estudiantes: Si un estudiante, que esta en el nivel de pensamiento 1, se enfrenta a un problema , el cual requiere de conceptos y definiciones pertenecientes a un nivel 2 , el estudiante es incapaz de resolver el problema, conllevando esto a un problema de fustración. Inicialmente, los niveles de pensamiento elaborados por los Van Hiele, fueron 5, los cuales pueden sintetizarse de la manera siguiente:

1. nivel 0 : Predescriptivo
2. nivel 1 : De reconocimiento visual
3. nivel 2 : De análisis
4. nivel 3 : De clasificación y relación
5. nivel 4 : De deducción formal

Anterior al estudio de los van Hiele, estaban los trabajos presentados por WATSON, BROWNELL, POLYA, PIAGET, BLOOM, VINNER Y HERSHKOWITZ, Y DUBINSKY en este mismo sentido (enseñanza de los conceptos geométricos). De las investigaciones recientes, fuera del estudio de la geometría que han utilizado el modelo de van Hiele, podemos anotar a:

- Appropriateness of the van Hiele model for describing students cognitive processes on algebra task as typified by college students learning of functions. Presentado por Judy Land Universidad de Boston 1991.
- Aplicación del modelo de Van Hiele, al concepto de aproximación local. Presentado por Jose Luis Llorens Fuster, Universidad Politécnica de Valencia 1994.
- La noción de Continuidad, desde la óptica del modelo de Van Hiele. Presentado por P. Campillo Herrero Universidad Politécnica de Valencia 1999.
- Modelización del espacio y del Tiempo. Andr és de la Torre. Tesis de Doctorado. Ed. Universidad de Antioquia.

1.1. Nivel 0: Predescriptivo

El Nombre de ecuación de Riccati (1676-1754), se le da a una ecuación que tiene la forma

$$\frac{du}{dx} = p(x)u^2 + q(x)u + r(x)$$

en realidad estructura dada por D'Alembert en 1763. En realidad, la ecuación planteada por Riccati fue

$$x^m dq = du + u^2 \frac{dx}{q}$$

y tal vez su merito consiste en habler planteado el problema de la dificultad de separar variables en esta ecuación cuando $q = x^m$, pero fue Daniel Bernoulli, quien al tratar de resolver este problema, considera la ecuación

$$ax^m + u^2 = b\frac{du}{dx}$$

indicando que la ecuación es posible solucionarlas por funciones elementales, cuando $m = -2$,y, cuando

$$m = \frac{-4n}{2n+1}, m = \frac{-4n}{2n-1},$$

con n en los enteros (Campos [10]).

1.2. Nivel 1: De reconocimiento visual

La ecuación de Riccati, tiene la forma general,

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

con $p(x) \neq 0$, que es la generalización dada por D'alembert a la estudiada por Riccati y los Bernoulli. la sustitución

$$y = \frac{1}{p(x)}(u(x) - \frac{q(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}}{2})$$

nos brinda la ecuacón

$$u' = u^2 + n(x)$$

que es un caso particular de la ecuación estudiada por Riccati, y conocida como Ecuación de Riccati Reducida, asi que, una solución de esta ecuación, nos brinda una solución de la Riccati general.

1.3. Nivel 2: Análisis

Dada la ecuación de Riccati

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

$p, q, rinC(a, b)$se tienen algunos caso particulares:

1. Si $p(x) = 0$, la ecuación de Riccati se transforma en una Lineal.

2. Si $r(x) = 0$ la ecuación de Riccati se transforma en una ecuación de tipo Bernoulli
$$y' = p(x)y^2 + q(x)y$$

En ambos casos, se conoce como encontrar la solución general. En general, no es posible expresar la solución general de la ecuación de Riccati, en funciones elementales, es decir la ecuación de Riccati no es integrable. Sin embargo podemos analizar algunas tranformaciones elementales a saber:

1. Cambio de la variable independiente. Si f, es continuamente diferenciable, con derivada no nula, el cambio de variable $x = f(t)$ conduce a la euación de Riccati
$$y_t'(t) = [p(f(t))f_t'(t)]y^2(t) + [q(f(t))f_t'(t)]y(t) + r(f(t))$$

2. Cambio de variable dependiente. Al hacer
$$y(x) = \frac{a(x)u(x) + b(x)}{c(x)u(x) + d(x)}$$
donde
$$\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} = a(x)d(x) - c(x)b(x) \neq 0$$
obtenemos la ecuación , (que despues de ciertas simplificaciones es de Riccati),
$$\frac{(ad - bc)u' + (a'c - c'a)u^2 + (a'd + b'c - ad' - bc')u + b'd - d'b}{(cu + d)^2}$$
$$=$$
$$p(x)(\frac{au + b}{cu + d})^2 + q(x)(\frac{au + b}{cu + d}) + r(x)$$
pueden analizarse algunos casos especiales a saber

   a) $y(x) = a(x)u(x)$

   b) $y(x) = u(x) + b(x)$

3. Si en la ecuación
$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$
hacemos la sustitución $y(x) = a(x)u(x)$ obtenemos la ecuación
$$u' = (pa)u + (q - \frac{a'}{a})u + \frac{r}{a}$$
y si hacemos $a(x) = \frac{1}{p(x)}$, obtenemos una ecuación de Riccati, con coeficiente principal 1

4. Si hacemos $y(x) = u(x) + b(x)$, obtenemos la ecuación
$$u' = pu^2 + (2pb + q)u + (qb + r + pb^2 - b)$$
basta tomar
$$b = -\frac{q}{2p}$$
y se obtiene una ecuación de Riccati, donde el coeficiente de $u(x)$ es cero. Uniendo las dos tranformaciones anteriores, en una sola transformación, siempre se puede reducir la ecuación generalizada de Riccati, a una reducida de la forma
$$y' = y^2(x) + n(x)$$
nótese que también puede reducirse la ecuación a la forma
$$y' = -y^2(x) + n(x)$$

En general, no es posible integrar una ecuación de Riccati. Sin embargo, puede notarse los siguientes casos:

1. Si $y_1(x)$ es una solución de la ecuación de Riccati
$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$
haciendo
$$y(x) = y_1(x) + b(x)$$
se obtiene la ecuación de Bernoulli
$$b' = pb^2 + (py_1 + q)b$$
la cual se puede resolver con la sustitución
$$b = \frac{1}{v}$$

2. Si $y_1(x)$, y $y_2(x)$ son soluciones conocidas, sea

$$y_2(x) = y_1(x) + b(x)$$

es decir

$$b(x) = y_2(x) - y_1(x)$$

entonces, en la ecuación de Bernoulli obtenida del item anterior, obtenida con el cambio de variable dependiente

$$y(x) = y_1(x) + b(x)$$

es

$$b' = pb^2 + (py_1 + q)b$$

el cambio de variable

$$b = \frac{1}{v}$$

conduce a la ecuación lineal

$$v' + (2py_1 + q)v = -p$$

con solución particular $v = \frac{1}{y_2 - y_1}$, así que si sumamos esta solución con la solución general de la ecuación homogénea asociada

$$v' + (2py_1 + q)v = 0$$

la cual es separable, obtenemos la solución general de

$$v' + (2py_1 + q)v = -p$$

así que en este caso la solución de la ecuación de Riccati, será

$$y(x) = y_1(x) + b(x)$$

donde $b(x)$ queda determinado mediante el proceso anterior, lo cual indica que para obtener la solución de la ecuación de Riccati, es necesario únicamente una integración.

3. Si se conocen tres soluciones de la ecuación de Riccati, $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, entonces

$$v_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$$

y

$$v_1 = \frac{1}{y_3 - y_1}$$

son soluciones de la ecuación

$$v' + (2py_1 + q)v = -p$$

entonces $v_1 - v_2$, es solución de la homogénea asociada

$$v' + (2py_1 + q)v = 0$$

por tanto,

$$v(x) = v_1 + C(v_2 - v_1)$$

es la solución general de

$$v' + (2py_1 + q)v = -p$$

y entonces,

$$v(x) = \frac{1}{y_2 - y_1} + C(\frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1})$$

es la solución general de la ecuación

$$v' + (2py_1 + q)v = -p$$

Nótese en particular que si hacemos $v = \frac{1}{y - y_1}$, se obtiene

$$\frac{1}{y - y_1} = \frac{1}{y_2 - y_1} + C(\frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1})$$

y simplificando obtenemos

$$\frac{\frac{y - y_2}{y - y_1}}{\frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1}} = C$$

que es la solución general de la ecuación de Riccati en este caso.

4. Si tenemos cuatro soluciones y_1, y_2, y_3, y_4, de la ecuación de Riccati, entonces se cumple

$$\frac{\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1}}{\frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1}} = C$$

Si definimos la razón de 4 números distintos como

$$[y_1, y_2, y_3, y_4] = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3}\frac{y_2 - y_4}{y_1 - y_4}$$

podemos concluir finalmente que y_1, y_2, y_3, y_4 son soluciones de la misma ecuación de Riccati, si y solo si

$$[y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x)] = C$$

para todo x, donde C es constante.

5. La ecuación de Riccati, tiene la forma general,

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

con $p(x) \neq 0$ la sustitución

$$y = \frac{1}{p(x)}(u(x) - \frac{q(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}}{2})$$

nos brinda la ecuacón

$$u' = u^2 + n(x)$$

en el caso particular que

$$n(x) = bx^m$$

Bernoulli habia indicado los valores de m, (aunque no todos), para integrar la ecuación de Riccati. Podemos mencionar dos casos especiales a saber:

a) Si $m = 0$, es claramente una ecuación separable.

b) Si $m = -2$, la sustitución

$$u = \frac{1}{y}$$

conduce a la ecuación homogénea

$$y' = -b\frac{y^2}{x^2} - 1$$

1.4. Nivel 3: De clasificación y relación

En esta sección, la cuestión es un poco mas sencilla, en el sentido que que análisis hecho en en la sección anterior, nos permite clasificar adecuadamente algunas ecuciones de Riccati:

1. Por su forma, podemos identificar la ecuación generalizada como

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

y sus casos particulares a saber

a) Si $p(x) = 0$, la ecuación de Riccati de transforma en una Lineal.

b) Si $r(x) = 0$ la ecuación de Riccati se transforma en una ecuación de tipo Bernoulli
$$y' = p(x)y^2 + q(x)y$$

c) Si $p(x) = 0$ y $q(x) = 0$ la ecuación es separable.

y podemos identificar una Riccati en forma reducida, a saber

$$u' = u^2 + n(x)$$

2. En cuanto a su solución, la sección anterior nos caracteriza la forma de esta cuando son conocidas una o varias soluciones. Y en lo que se refiere a la forma reducida, tambien la sección anterior nos indica alcunos casos solubles inmediatos, cuando

$$n(x) = bx^m$$

Para otras formas de $n(x)$ Es preciso ver un análisis más detallado, usando teoría de Lie, Este será el tema del último Nivel.

Existe una muy íntima relación, entre la ecuación diferencial de segundo orden y la de Riccati, mas precisamente, la solución de esta última, es la que permite decidir si la de segundo orden tiene o no solución por medio de cuadratura. Las soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden, permiten ademas obtener soluciones de la adjunta de tercer orden. Además, al solucionar la ecuación de Riccati mediante grupos de Líe, es necesario resolver una ecuación de tercer orden, adjunta. La ecuación diferencial de tercer orden, tiene la forma general

$$f'''(x) + p(x)f''(x) + q(x)f'(x) + r(x)f(x) = 0$$

donde $p(x), q(x), r(x)$son funciones continuas en un intervalo (a, b) La transformación

$$f = ye^{-\frac{1}{3}\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

reduce la ecuación a la forma

$$y''' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

es decir ha desaparecido la el término de la segunda derivada.

Como caso particular, se tiene la ecuación (adjunta de la general)

$$y''' + 4ny' + 2n'y = 0$$

. Cuando se ha de resover una ecuación de Riccati, utilizando la teoría de Lie, se ve la necesidad de resolver precisamente esta ecuación. En cuanto a esta ecuación adjunta, tenemos el siguiente

1.5. Teorema

sea u, v un sistema fundamental de soluciones de la ecuación

$$s'' + ns = 0$$

entonces, la solución general de la adjunta viene dada por

$$y = c_1 u^2 + c_2 uv + c_3 v^2$$

La demostración puede verse en [1]. La ecuación diferencial de segundo orden, puede escribirse en la forma general

$$f'' + p(x)f' + q(x)f = 0$$

sin embargo la sustitución

$$e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

reduce la ecuación a la forma reducida

$$y'' + n(x)y = 0$$

Adicionalmente, el cambio de variable

$$v = -\frac{y'}{y}$$

transforma la ecuación

$$y'' + n(x)y = 0$$

en la ecuación de Riccati

$$v' = v^2 + n(x)$$

por lo tanto, solucionando esta última ecuación, obtenemos una solución de la general de segundo orden, y con ello la solución de la adjunta de tercer orden

$$y''' + 4ny' + 2n'y = 0$$

de acuerdo al teorema.

1.6. Nivel 4: Deducción formal

En esta última etapa, será necesario desarrollar los resultados y teoremas que permiten analizar en forma global una ecuación de Riccati, y brindar ejemplos concretos que ilustren la teoría.

La ecuación de Riccati, tiene la forma general,

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

con $p(x) \neq 0$ la sustitución

$$y = \frac{1}{p(x)}(u(x) - \frac{q(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}}{2})$$

nos brinda la ecuacón

$$u' = u^2 + n(x)$$

asi que, una solución de esta ecuación, nos brinda una solución de la Riccati general.

1.7. Grupos de Lie

Un grupo de Lie uniparametrico, esta dado por un par de transformaciones

$$x^* = T_1(x, u, \epsilon)$$

$$u^* = T_2(x, u, \epsilon)$$

o escritas como

$$x^* = x + \epsilon f(x) + O(\epsilon^2)$$
$$u^* = u + \epsilon h(x) + O(\epsilon^2)$$

Consideremos u, vun sistema fundamental de soluciones de la ecuación

$$y'' + n(x)y = 0$$

con $W\{u, v\} = 1$, y sean $\{t, w\}$ las coordenadas canónicas asociadas al grupo, que dejan invariante la ecuación diferencial. Ahora bien, Por criterio de invariación Verse [2] tenemos

$$\frac{d^2u^*}{dx^{*^2}} = \frac{T_2}{T`_1^2}\frac{d^2u}{dx^2} + (\frac{2T`_2}{T`_1^2} - \frac{T_2T``_1}{T`_1^3})\frac{du}{dx} + (\frac{T``_2}{T`_1^2} - \frac{T`_2T``_1}{T`_1^3})u$$

y por lo tanto
$$\frac{2T`_2}{T`^2_1} - \frac{T_2 T``_1}{T`^3_1} = 0$$
que es equivalente a decir
$$T`_1 = T_2^2$$
esta última condición, junto con
$$\frac{d^2u^*}{dx^{*2}} + n(x^*)u^* = 0$$
conduce a
$$\frac{d^2}{dx^2} + (\frac{T``_2}{T_2} - \frac{2T`^2_2}{T_2^2} + n(T_1)T_2^4)u = 0$$
y por lo tanto
$$\frac{T``_2}{T_2} - \frac{2T`^2_2}{T_2^2} + n(T_1)T_2^4 = n(x)$$
asi el grupo de Lie queda determinado por el par de ecuaciones
$$T`_1 = T_2^2$$
$$\frac{T``_2}{T_2} - \frac{2T`^2_2}{T_2^2} + n(T_1)T_2^4 = n(x)$$
y utilizando las expresiones
$$x^* = x + \epsilon f(x) + O(\epsilon^2)$$
$$u^* = u + \epsilon h(x) + O(\epsilon^2)$$
e igualando términos de orden ϵ encontramos la relación
$$f` = 2h$$
$$f``` + 4nf` + 2n`f = 0$$
con solución general
$$y = c_1u^2 + c_2uv + c_3v^2$$
y sustituyendo $f`$ y $f``$ en la identidad integral para
$$f``` + 4nf` + 2n`f = 0$$
se obtiene finalmente la expresión
$$\frac{1}{4}(2ff`` - f`^2) + nf^2 = (c_1c_3 - \frac{c_2^2}{4})$$

las coordenadas canónicas son

$$t(x,u) = \frac{u}{f(x)^2}$$

$$w(x,u) = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{f(t)}$$

se encuentra la ecuación

$$\frac{d^2t}{dw^2} + (c_1c_3 - \frac{c_2^2}{4})t = 0$$

y en el caso

$$k = c_1c_3 - \frac{c_2^2}{4} > 0$$

una solución de

$$y'' + n(x)y = 0$$

es dada por

$$y(x) = f(x)^{\frac{1}{2}}\{A_1 \cos(k\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{f(t)}) + A_2 \sin(k\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{f(t)})$$

en cierto sentido, esta es la inversa de

$$y = c_1u^2 + c_2uv + c_3v^2$$

Mediante un proceso semejante, y utilizando el criterio de invariación por un grupo de LIe, a la ecuación diferencial

$$y''' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

se encuentra que se debe cumplir las relaciones

$$f` = h$$

$$2f``` + af` + a`f = 0$$

$$f```` + af`` + 3bf` + b`f = 0$$

estas dos últimas son consistentes si

$$f```(b - \frac{a`}{2}) = D$$

con D una constante. En el caso que

$$f```` + af`` + 3bf` + b`f = 0$$

sea auatoadjunta $a` = 2b$ entonces $D = 0$ Caso contrario, si

$$y''' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

no es autoadjunta, debe requerirse

$$b(x) = \frac{1}{2}\frac{da}{dx} + \frac{D}{f(x)^3}$$

utilizando coordenadas canónicas

$$t(x, u) = \frac{u}{f(x)^2}$$

$$w(x, u) = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{f(t)}$$

se obtiene la ecuación

$$\frac{d^3u}{dw^3} + 4(c_1c_2 - \frac{c_2^2}{4})\frac{du}{dw} + Du = 0$$

Asi que si la ecuación no es autoadjunta, dado $a(x)$, podemos obtener un grupo de Lie uniparamétrico

$$x^* = T_1(x, u, \epsilon)$$

$$u^* = T_2(x, u, \epsilon)$$

que deje la ecuación

$$y''' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

invariante, probando que

$$b(x) = \frac{1}{2}\frac{da}{dx} + \frac{D}{f(x)^3}$$

si este es el caso, la solución de

$$y''' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

se reduce a resolver

$$\frac{d^3u}{dw^3} + 4(c_1c_2 - \frac{c_2^2}{4})\frac{du}{dw} + Du = 0$$

Ahora bien, aplicando el criterio de invariación a la ecuación de Riccati en su forma canónica, se han pues de cumplir las relaciones siguientes

$$f = f(x)$$

$$h = -\frac{1}{2} f'' - f' u$$

donde f debe satisfacer la ecuación diferencial

$$f''' + 4nf' + 2n'f = 0$$

las coordenadas canónicas correspondientes son

$$t(x,u) = \frac{1}{2} f'(x) + f(x)u$$

$$w(x,u) = \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{f(t)}$$

y la ecuación de variables separables correspondiente es

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{t^2 + c}$$

con c una constante.

1.8. Teorema

Una solución de la ecuación de Riccati

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

con forma canónica asociada

$$u' = u^2 + n(x)$$

es dada por

$$y = \frac{1}{p(x)}(u(x) - \frac{q(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}}{2})$$

donde $u(x)$ es una solución de

$$u' = u^2 + n(x)$$

Sin embargo, podemos utilizar el hecho que

$$n(x) = \frac{f'^2 - 2ff'' + 4c}{4f^2}$$

y obtener por sola observación, soluciones de ecuaciones de Riccati.

1.9. Ejemplos

1. $$y` = \cos(x) - (\sin(x) - y)y$$

   tiene forma canónica
   $$u' = u^2 + n(x)$$
   donde
   $$n(x) = \frac{\cos(x)}{2} - \frac{\sin^2(x)}{4}$$
   basta tomar en la expresión
   $$n(x) = \frac{f`^2 - 2ff`` + 4c}{4f^2}$$
   $$f(x) = e^{\cos(x)}$$
   y tomar $c = 0$

2. $$y` = Ax^n(y^2 + 1)$$

   tiene forma canónica
   $$u' = u^2 + n(x)$$
   donde
   $$n(x) = \frac{-n^2 - 2n + 4A^2x^{2+2n}}{4x^2}$$
   basta tomar
   $$f(x) = x^{-n}$$
   y $c = A^2$

3. si la forma canónica de una ecuación de Riccati tiene
   $$n(x) = \frac{k}{x^2}$$
   basta tomar
   $$f(x) = x$$
   y $c = k - \frac{1}{4}$

4. si la forma canónica de una ecuación de Riccati tiene
   $$n(x) = \frac{k}{x^4}$$
   $$f(x) = x^2$$
   y $c = k$

5. si la forma canónica de una ecuación de Riccati tiene

$$n(x) = \frac{k}{Ax^2 + Bx + C}$$

basta tomar

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C$$

y $c = k + \frac{4AC-b^2}{4}$

6. Para un estudio detallado del caso cuando

$$n(x) = Ax^2 + Bx + C$$

puede verse [1].

Bibliografía

[1] Gómez, C.*Ecuación de Riccati en Grupos de Lie .*, Tesis de Maestria , Universidad Nacional, 1996.

[2] Gómez, C.y Salas H. *Ecuaciones diferenciales lineales de orden n*,Coloquio Distrital de Matemáticas Enero 2003, Universidad Nacional de Colombia.

[3] Gómez, C. y Salas, H., *Ecuaciones algebraicas de 2do y 3ro grado, Mathematica e Internet*,Coloquio Distrital de Matemáticas Enero 2003, Universidad Nacional de Colombia.

[4] Burguer, William.y Shaugnessy, M.*Caracterización de los niveles de desarrollo, en geometría, según van Hiele.*, Notas de Matemáticas, Universidad Nacional. 28 Octubre 1989.

[5] Pedroza, N.*Indicadores de logros en geometría, a través de los niveles de van Hiele, para educación primaria y secundaria.*,Monografía para optar el título de licenciatura en Universidad Javeriana. Facultad de Ciencias, Bogotá 1998, Director Alberto Campos .

[6] Galindo, C.*Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la geometría.*,Revista EMA, Vol 2 número 1 Noviembre 1996.

[7] Barbosa N.,Galindo C. *Desarrollo de habilidades básicas, a través de los niveles de van Hiele.*,Monografía para optar el título de licenciatura en la Universidad Distrital, Director Alberto Campos.

[8] De la Torre Andrés.*Modelización del espacio y del tiempo.*,Ed. Universidad de Antioquia.

[9] Campos Alberto. *Grupo de Lie para una ecuación de Riccati generalizada*, Memorias XVIII Coloquio nDistrital de Matematicas. Bogotá.

[10] Campos Alberto. *Consideraciones epistemológicas acerca de la ecuación de Riccati* , Memorias Encuentro Internacional de Epistemología Noviembre 2002, Cali Colombia.

[11] Campos Alberto. *Algunos documentos concernientes, acerca de la ecuación de Riccati* , Memorias XIV Encuentro de Geometría y sus aplicaciones, Universidad Pedagogica Nacional. Bogotá, Colombia.