Algunos elementos en la construcción de un sentido numérico en aritmética

Joaquín Giménez Rodríguez
Departamento Didactica de les CC Experimentals i la Matematica
Universitat de Barcelona
Barcelona, España
jgimenez@uoc.edu

Resumen

En el presente texto se razona sobre el valor del sentido numérico en la construcción del contenido aritmético escolar. Se comenta el valor de la visualización, los procesos históricos, y el uso de materiales manipulativos en el reconocimiento de patrones, establecimiento de relaciones y aspectos cognitivos en la construcción del contenido aritmético escolar en la etapa obligatoria.

1. Introducción

Ante todo, honrar a Miguel de Guzman, un buen amigo y maestro, responsable de que yo esté en Bogotá. Gracias de todo lo que nos has dejado, y a los organizadores, gracias por darme la oportunidad de estar aquí.

Durante muchos años se ha valorado como importante el reconocimiento escolar del sistema de numeración como fundamento para el reconocimiento numérico. Si a eso se añade un trabajo sobre la estructura algebraica de las operaciones, se suponía que ya con eso el alumnado sabe todo lo que debe saber sobre los números. Actualmente, se considera también la necesidad de que el alumnado posea intuiciones sobre el aspecto cuantitativo de las situaciones, entendiendo los números en sus diversos significados y relaciones,. poseyendo buenos referentes para las cantidades y las operaciones. A ello se le llama adquirir sentido numérico y es fundamental en el trabajo aritmético escolar. Por ello, para empezar, diremos que tener sentido numérico significa considerar los aspectos siguientes: saber relacionar los números con contextos reales, desarrollar relaciones, establecer puntos de referencia y no sólo conocer la numeración en su valor posicional y estructural, considerar la aritmética desde sus diferentes lenguajes promoviendo significados y justificaciones diversas asociadas a núcleos de experiencia distintos, y reconocer y usar el cálculo tradicional y relaciones numéricas.

El desarrollo de un sentido numérico en su vertiente curricular y didáctica pasa por un conocimiento intuitivo de lo cuantitativo en relación con situaciones concretas. Permite, por lo tanto a los estudiantes, procesar situaciones mediante juicios ligados a lo cuantificable. En diversas investigaciones se ponen de manifiesto muchos ejemplos que reflejan este "sentido numérico". ¿Hasta qué punto se desarrolla? ¿Cuáles son sus características? Hay estudiantes que no son capaces de explicar el por qué 132 es menor que 1428. Poseen sólo una intuición de que el número más largo es mayor. Es así, dicen.

Potenciar la estructura numérica complementaria al sentido numérico, implica ir más allá de las funciones y usos que hacemos de los números: descubriendo relaciones, cadencias, patrones, etc. Eso conlleva también: consolidar destrezas de cálculo mental y aproximado, conocer propiedades, leyes de composición, etc. junto habilidades propias del razonamiento proporcional, cuadrático, visual... En la reflexión sobre Didáctica de la aritmética, hay varias indicaciones de lo que significa reconocer un sentido numérico que son fundamentalmente de tipo relacional. De forma resumida, en esta presentación consideramos que colaborar a adquirir o construir sentido numérico implica:

a) *Reconocer textos numéricos y significados, de forma que se vea los números como algo relativo, sabiendo las posibles distinciones de contextos o realidades así como diversas representaciones, y su aprovechamiento en el trabajo de operaciones*

b) *Reconocer relaciones numéricas de tipos diferentes por métodos visuales, de cálculo u otros, sabiendo aplicarlas cuando sea conveniente y*

c) *Establecer estrategias y razonamientos con números argumentando lo que fuera preciso.*

A continuación, vamos a ejemplificar algunas de las posibles propuestas que nos permiten reconocer textos numéricos y significados en las operaciones, mediante el uso de representaciones diferentes, para observar el valor de las mismas como relaciones algorítmicas. (2) Posteriormente reconocemos tipos de relaciones numéricas. Y, por último (3) vemos estrategias y razonamientos correspondientes como componentes reflexivos.

2. Relaciones algorítmicas y el uso de manipulativos visuales

Los algoritmos (métodos para encontrar el resultado de las operaciones)son una parte importante del trabajo aritmético que debe ser trabajado mediante elementos manipulativos e históricos. Así, si bien deben usarse ábacos e instrumentos populares como la yupana, es importante reproducir otros procesos algorítmicos vinculados a la historia, que motiven la reflexión y descubrimiento.

Véase el ejemplo del algoritmo egipcio de la multiplicación 7×17 (imagen de la figura 1 a la izquierda) O el método de las multiplicaciones parciales (Idea de Frisius s. XI) (imagen de la derecha) Otro algoritmo del siglo XII usa el

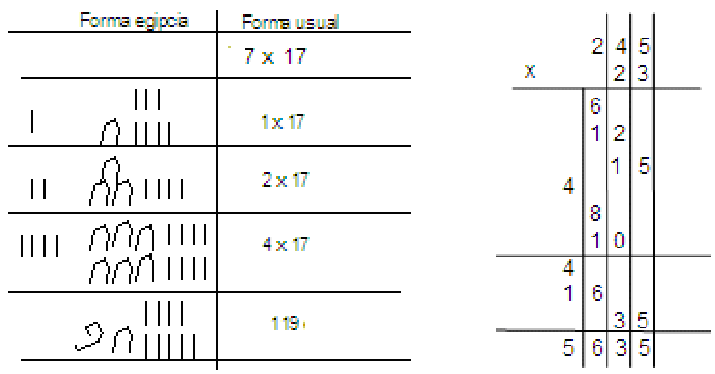


Figura 1: Dos métodos de multiplicar antiguos conservables escolarmente

conocimiento previo de los productos dígitos, y mediante el esquema de enrejado, organiza la propiedad distributiva del producto respecto de la adición. En este caso, aquellos estudiantes que llegan a cuarto y quinto grado sin saber multiplicar bien, pueden tener un recurso para hacer multiplicaciones complejas con el sólo uso de las tablas. Pero, lo que es más importante, provocar el encuentro de explicaciones que hacen reflexionar sobre el papel de la distributividad para el cálculo. En la figura, el ejemplo muestra 347×2346 mediante la reja.

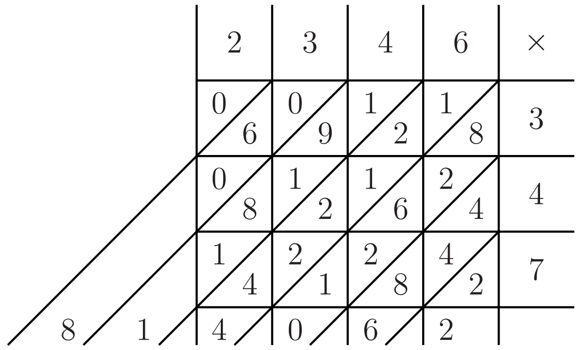


Figura 2: Multiplcación realizada por el método de la reja.

La forma anterior se representa de una forma pràctica, manipulable con las llamadas regletas de Neper. (1550-1617) Indiquemos brevemente que este tipo de

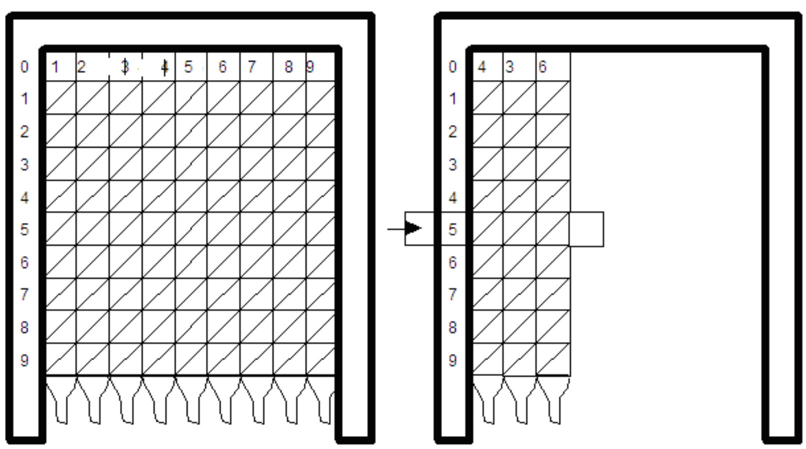
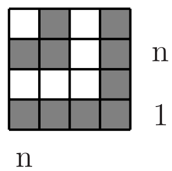


Figura 3: Multiplicando 5 × 436 con las regletas de Neper

imágenes visuales, no sólo es una ayuda para el aprendizaje, sino que sobretodo integra conocimiento y desarrolla conocimiento aritmético.

Sobre números, modelos y representaciones. Si bien hemos constatado el valor de les reglas que organizan las operaciones, no debemos olvidar el valor simbòlico que los números han aportado desde bien antiguo. Las formas numéricas pitagóricas (números cuadrados, triangulares, amigos , perfectos, etc permiten reflexionar al alumnado en la búsqueda de patrones, regularidades y propiedades numéricas desde el punto de vista del razonamiento inductivo. Veamos los ejemplos conocidos de la caracterización de números impares y cuadrados consecutivos (figura 4) No perdamos de vista que estas caracterizaciones se atribuyen a Nicomaco de Gerasa s.I dC. En suma, vemos que la geometría y los números deben ir de



$$1 + 3 + 5 + \cdots + n = n^2$$

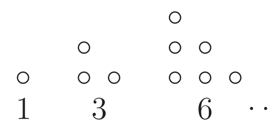


Figura 4: Suma de impares consecutivos (izquierda) y números en escalera

la mano. Pero, a mediados del siglo XX, el uso de materiales manipulativos en la enseñanza de las Matemáticas fue considerado una forma de divulgación del propio desarrollo científico. Así, el conocido uso de espejos, diseños, construcciones, minicalculadora, ábacos, material multibase, etc. permitía entender relaciones, identificar contenidos,... En suma, ilustrar fenómenos. Lo más importante de los

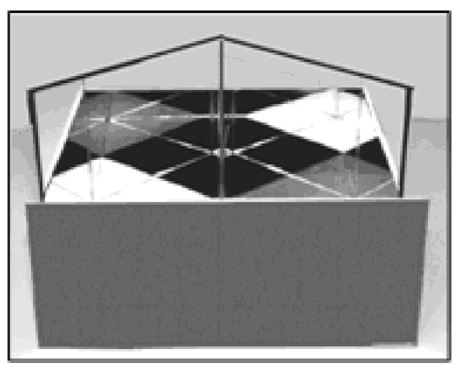


Figura 5: El libro de espejos que permite visualizar la multiplicación de imágenes

materiales es que nos permiten lanzar preguntas desafíos. Así, mediante el libro de espejos, nos preguntamos ¿cuántos cuadraditos se verán cuando colocamos tres delante del espejo? Y, ¿cómo los veremos? Estas situaciones aparentemente geométricas, tienen un alto contenido aritmético.

3. Tipos de relaciones numéricas visualizadas

A partir de visualizaciones de configuraciones puntuales, podemos trabajar el descubrimiento de propiedades aritméticas. Con las representaciones se consigue intuir resultados, que de otra manera serían más complicados. Pero, además de ayudar, en especial la representación lineal, sirve para situar un número, y se pueden dar **representaciones a escalas diferentes** que permiten el reconocimiento de propiedades de la ordenación en conjuntos numéricos diferentes. En efecto, al averiguar los números que faltan en las líneas siguientes, el estudiante se ve obligado a tratar con los decimales y las fracciones para resolver el problema, "por analogía"con lo que ha hecho con los naturales. No se trata, pues sólo de

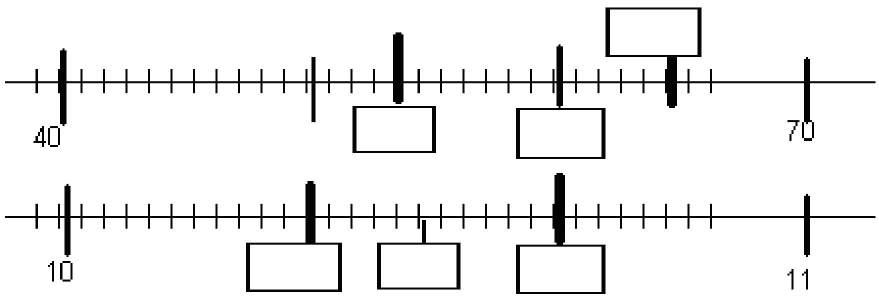


Figura 6: Representaciones en la línea numérica en la que hay que buscar números ausentes

que se entienda mejor, sino que se plantean auténticos problemas matemáticos y establecimiento de relaciones numéricas de proximidad y lejanía. Con una **combinación de representaciones** o textos en lenguajes o situaciones diferentes, se puede analizar estrategias que se apliquen a todo tipo de cálculo; en particular se refuerza el cálculo exacto y aproximado porque se sitúan los números en relación los unos con los otros, se mantiene el orden y se refleja un resultado que quizás se ha verbalizado antes. En efecto, en la figura, se reconocen acotaciones de una adición mediante visualización en la línea. Se escriben de forma simbólica para no perder de vista las operaciones implicadas.

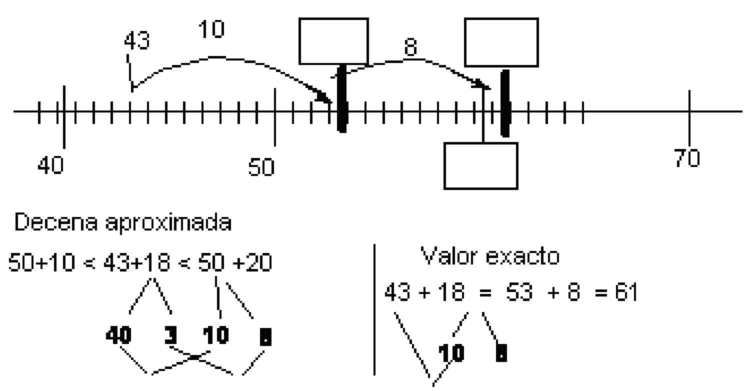


Figura 7

Al comparar las representaciones, se da la oportunidad de ver que la descomposición no se interpreta como tal en la línea, sino que indica un cambio de orden en el salto para conseguir el resultado. También la decena aproximada se interpreta diferente, ya que me permite ver que el resultado que busco "se acerca" al que se obtiene con decenas exactas. En la figura siguiente, se dan los primeros términos de los números hexagonales $(6, 6+9, 6+9+13...)$ Los estudiantes dan diversas soluciones, a partir de la visualización correspondiente. Así, se establece un primer grado de generalización, que es el encontrar la regla de formación y conteo de los números hexagonales por si mismos. En el caso de la figura, se puede "ver" además que el número hexagonal es suma del número triangular de nivel 4 (es decir, de tipo $n-2$), y 3 triangulares de nivel 3 (es decir, de tipo $n-3$).

Figura 7: Imagen de los números hexagonales que nos permite inducir su fórmula

Así, puede generalizarse el resultado a cualquier número n-poligonal. Cosas semejantes se podían ver con el pentagonal. En la figura 9, se puede ver como ir de la representación sustractiva a una algebraización o bien mediante una observación aditiva a otra diferente.

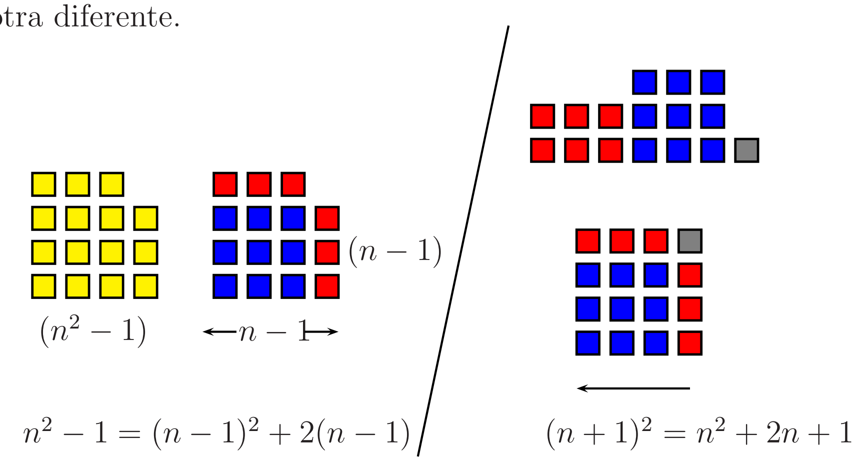


Figura 8: Formas diferentes de representar algebraicamente una propiedad

En el dibujo de la figura 9 permite ver que un número pentagonal es suma de tres triangulares como otro ejemplo interesante entre los muchos posibles.

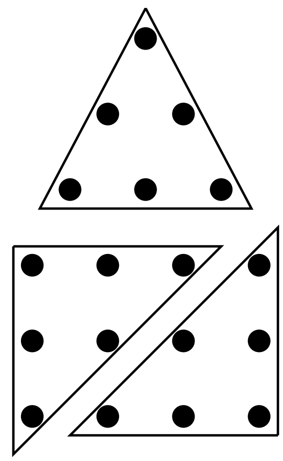


Figura 9: Una manera de Ver como son los números pentagonales

Los elementos visuales aritméticos y las relaciones de parte todo. Dados dos números permite establecer diversas relaciones: el doble de cada uno, la suma entre ellos, la diferencia entre ellos, etc . Todo ello debería visualizarse, ya que responde a contextos cardinales simples como "A tiene... B tiene... cuántos tienen en total", o bien o ""cuántos le faltan a A para tener... ""entre A y B tienen... A tiene... cuántos tiene B". Las situaciones parte/todo también pueden ser de medida: "el Estado A -que tiene... metros cuadrados y B... se ponen de acuerdo para fusionarse... qué superficie ocupará el nuevo estado?". O bien "Si A tiene 1/4..., qué parte le falta para completarlo todo". Y se dan también situaciones temporales interesantes como : "ha transcurrido... y ... , cuánto ha transcurrido desde el inicio al final", ¿cuántos días faltan para la cuenta atrás si han pasado ... y se empezó.. días antes del lanzamiento?". O bien situaciones monetarias como: "he comprado... que vale... y luego... que vale... cuánto ha costado todo", o "he gastado en total... y en ... gasté... , cuánto gasté en lo demás"o bien "quiero comprar... que cuesta... y dispongo de... cuánto me falta". E incluso en situaciones de comparación se da ese esquema, si se piensa "hay 13 animales mamíferos de los que 5 son hipopótamos. ¿Por qué no puede haber 9 caballos?"En este tipo de relaciones, el razonamiento comparativo puede permitirnos ver relaciones importantes entre la parte y el todo. Si hay 8 no hipopótamos, no pueden ser más que esos, los que sean caballos.