Álgebra antigua

Carlos Julio Luque Arias
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
caluque@uni.pedagogica.edu.co

Lyda Constanza Mora Mendieta
Profesora Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
lmendieta@uni.pedagogica.edu.co

Johana Andrea Torres Díaz
Profesora Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá D.C, Colombia
jotorres@uni.pedagogica.edu.co

Las ecuaciones son más importantes para mí, porque la política es para el presente, pero una ecuación es algo para la eternidad.

Albert Einstein

Introducción

Una *ecuación* es una igualdad entre números, en la que hay uno o varios de ellos por determinar, que llamamos *incógnitas*[1], y que representamos[2] con letras, habitualmente las últimas del abecedario: x, y, z, etc.

Los elementos del conjunto de números que satisfacen la ecuación, es decir, aquellos valores para los cuales la igualdad es cierta, los llamamos *soluciones o raíces*.

Resolver una ecuación es encontrar todos los valores de las incógnitas que participan en ella, para que la ecuación se convierta en una proposición verdadera, es decir en una igualdad. La teoría matemática que se ocupa del estudio de la solución de ecuaciones en un conjunto de números es el

[1] Es común llamar *variables a las incógnitas*, pero es conveniente aclarar que una incógnita en una ecuación representa a uno o varios elementos del conjunto de números que estemos considerando, que al ser reemplazado en la ecuación hace de ella una igualdad, pero este valor *no es variable.*

[2] El término árabe para referirse a la incógnita era *shay* que significa cosa, en latín se tradujo por *res* (cosa en latín), y por eso, a las personas que resolvían ecuaciones se les llamaba *cosistas.*

Álgebra[3]; llamaremos a este estudio *álgebra antigua* en contraposición con el *álgebra moderna* que trata con entidades mas generales que los números, sobre estas entidades define operaciones (similares a las operaciones aritméticas) y estudia sus propiedades, esta nueva álgebra se origina en los trabajos de Evariste Galois.

Para resolver una ecuación, *se usan las propiedades de las operaciones definidas en el conjunto de números* que estemos considerando; por ejemplo, es lícito restar en ambos lados de una ecuación entre *números reales* el mismo número para obtener de nuevo una igualdad; pero esto ya no es cierto, si la ecuación es entre números naturales, puesto que en ellos no todas las restas son posibles.

No siempre una ecuación tiene soluciones dentro de un conjunto de números; por ejemplo, no existe algún número natural x que satisfaga

$$x + 3 = 1$$

pero esta ecuación sí tiene solución en los números reales, con $x = -3$.

Consideraremos aquí ecuaciones entre números reales, y en consecuencia, que las propiedades que podemos aplicar son los axiomas y los teoremas enunciados en el capítulo anterior, y los que de ellos se deduzcan; en particular, las propiedades de uniformidad de la suma y la multiplicación:

Si a, b, c y d son números reales tales que $a = b$ y $c = d$ entonces:

$$a + c = b + d$$
$$a \times c = b \times d$$

y en particular

$$a + c = b + c$$
$$a \times c = b \times c$$

(por supuesto, están incluidas las restas y las divisiones, salvo la división por 0) y las correspondientes a la potenciación

$$a^c = b^c$$

con la *limitación* de que a y b sean números no negativos y que c no sea un racional con denominador par.

[3]El término *álgebra* viene del título de la obra *al-jebr w'al-muqabalah*, del matemático árabe Mahommed ibn Musa Al-Khowarizmi. La obra fue traducida al latín y en su versión latinizada, se llamó aljeber, que se convirtió en álgebra. La palabra *jebr* se refiere a la operación de pasar al otro lado del igual un término de una ecuación y la palabra *muqabalah* se refiere a la simplificación de términos iguales.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son *equivalentes* si tienen exactamente las mismas soluciones. Una forma de obtener ecuaciones equivalentes es sumar, restar, multiplicar o dividir a ambos lados de la ecuación por el mismo número, por ejemplo, las ecuaciones:

$$x + y = 6$$

y

$$2x + 2y = 12$$

son equivalentes; la ecuación:

$$x = y + a$$

es equivalente a

$$x - a = y$$

y si $a \neq 0$, la ecuación:

$$x = y \times a$$

es equivalente a

$$x \div a = y$$

De hecho, para resolver una ecuación, usamos estos procedimientos para transformarla en otras ecuaciones equivalentes, terminando con una ecuación de la forma

$$x = a$$

donde a es la solución de la ecuación.

Por ejemplo, la ecuación entre números naturales:

$$3x - 4 = 8$$

es equivalente a:

$$3x - 4 + 4 = 8 + 4$$

y ésta a su vez a:

$$3x = 12$$

y por último a:

$$x = 12 \div 3$$

o sea

$$x = 4$$

Esto significa que desde el punto de vista algebraico, es lo mismo

$$3x - 4 = 8 \quad \text{que} \quad x = 4$$

No parece, pero ¡así es!

Sin embargo, debemos tener cuidado con las operaciones que efectuamos en ambos lados de una igualdad, pues no todas las operaciones son tan nobles como las mencionadas; por ejemplo, en los números naturales tenemos que si

$$x^2 = y^2$$

entonces $x = y$, pero si a una igualdad entre números reales le aplicamos radicación a ambos lados, es posible que no obtengamos igualdades, si no aplicamos las reglas de forma correcta; por ejemplo, de

$$(-5)^2 = 5^2$$

no debemos concluir que

$$-5 = 5.$$

Esto es debido a que la radicación de números reales no tiene una respuesta única. Para simplificar la solución de las ecuaciones entre números reales, las clasificamos según su grado y la cantidad de incógnitas; inicialmente, resolveremos ecuaciones de primer grado con una sola incógnita y luego consideraremos otros casos.

1. Ecuaciones de primer grado

1.1. Con una incógnita.

1.1.1. El método egipcio: La regula falsa

Un método de resolución de ecuaciones que se encuentra en antiguos libros egipcios y chinos, es el de la *Regula falsa* o *falsa posición*. El método consiste en proponer una solución tentativa inicial y corregirla de acuerdo con los resultados. Por ejemplo, para resolver la ecuación:

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

Proponemos como primera aproximación $x = 7$. (Y esto es ¡el más burdo de los tanteos!)

Sustituimos x por 7 en la ecuación, y obtenemos como resultado 8 y no 19, introducimos entonces, un factor de corrección, que relacione a 19 y 8, éste es:

$$\frac{19}{8}$$

Multiplicamos este factor por la primera aproximación y obtenemos

$$\frac{19}{8} \times 7 = \frac{133}{8}$$

que es la solución correcta de la ecuación.

El procedimiento está basado en el siguiente argumento: Sea la ecuación

$$ax = b$$

Si suponemos que la ecuación tiene una *solución tentativa* x_0 y la reemplazamos en ella obteniendo

$$ax_0 = b_0$$

entonces

$$x_1 = \frac{b}{b_0} x_0$$

sí es una *solución* de la ecuación original, puesto que

$$a\left(\frac{b}{b_0} x_0\right) = b.$$

1.1.2. El método axiomático

Toda ecuación de primer grado con una incógnita se puede llevar a la forma

$$ax + b = 0$$

donde a y b son constantes, $a \neq 0$, y x es la incógnita, mediante un número finito de pasos, aplicando reiteradamente las propiedades algebraicas, enumeradas en la primera parte del capítulo anterior, derivadas de los axiomas de campo.

Si partimos de

$$ax + b = 0$$

y sumamos $(-b)$ a ambos lados de la igualdad, (propiedades de uniformidad), obtenemos:

$$(ax + b) + (-b) = 0 + (-b)$$

Por los axiomas C2, C4, tenemos

$$ax = -b$$

Ahora, multiplicamos a ambos lados de la igualdad por $\frac{1}{a}$ y conseguimos,

$$\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(-b)$$

Y aplicando los axiomas C7, C9, tenemos

$$1x = \frac{-b}{a}$$

Por el axioma C8

$$x = \frac{-b}{a}$$

Por la manera en que fue obtenida, ésta es la *única* solución para la ecuación planteada, y podemos afirmar que: *las ecuaciones de primer grado tienen a lo más una solución.*

Ejemplo

$$\begin{aligned} 4x + 3 &= 0 \\ 4x + 3 - 3 &= 0 - 3 \\ 4x &= 0 - 3 \\ 4x &= -3 \\ \frac{1}{4}4x &= \frac{1}{4}(-3) \\ x &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

1.2. Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

1.2.1. Una ecuación con dos incógnitas

Toda ecuación de primer grado con dos incógnitas se puede llevar a la forma:

$$ax + by = c$$

donde a, b y c son constantes, $a \neq 0$, $b \neq 0$ y x, y son las incógnitas.

1.2.1.1. El método escalera[4]

Para resolver la ecuación,

$$x + y = 32$$

[4]Con un primer peldaño se consiguen los demás.

donde x, y y 32 son números reales, podemos elegir algunos valores para x y resolver la ecuación de una sola variable y, así:

Si $x = 1$, entonces

$$1 + y = 32$$

o sea $y = 31$.

Si $x = 5{,}3$ entonces

$$5{,}3 + y = 32$$

o sea $y = 26{,}7$

Y así sucesivamente, para cada valor que elijamos de x encontramos un valor para y.

Pero no es necesario efectuar las cuentas todas las veces; por ejemplo, si la ecuación es:

$$3x + 5y = 54$$

Podemos iniciar proponiendo una solución por tanteo, digamos $x = 3$, $y = 9$, que por brevedad escribiremos $(3, 9)$, luego de varios intentos encontramos, también por tanteo, las siguientes soluciones:

$$\begin{gathered}(3, 9)\\(8, 6)\\\left(10, \frac{24}{5}\right)\\\left(15, \frac{9}{5}\right)\\(1{,}5, 9{,}9)\\(6{,}5, 6{,}9)\\(-4, 13{,}2)\\(-9, 16{,}2)\end{gathered}$$

Si observamos las soluciones *cada dos renglones*, los números que ocupan el lugar de x aumentan cinco unidades: 5 es el coeficiente de y; en cambio, los números que ocupan el lugar de y disminuyen tres unidades y 3 es el coeficiente de x, ¡como ya lo debió notar!; es posible, entonces, encontrar varias soluciones de la ecuación, claro está, no todas las soluciones, partiendo de una particular.

Conjeturamos que:

Si (x_0, y_0) *es solución de* $ax+by=c$*, donde* a*,* b*, y* c *son números reales, entonces* (x_0+b, y_0-a) *o* (x_0-b, y_0+a) *es también, solución de la ecuación.*

La primera parte de esta afirmación la podemos demostrar de la siguiente manera: si (x_0, y_0) es solución de la ecuación

$$ax + by = c$$

se cumple que :

$$ax_0 + by_0 = c$$

Haciendo uso de los axiomas C3 y C4 y el teorema 20, tenemos que:

$$ax_0 + by_0 + 0 = c$$

$$ax_0 + by_0 + (ab - ab) = c$$

y por los axiomas C2 y C5

$$ax_0 + (ab + by_0) - ab = c$$

o sea,

$$(ax_0 + ab) + (by_0 - ab) = c$$

Y por los axiomas C10, C11 y el teorema 25 concluimos que:

$$a(x_0 + b) + b(y_0 - a) = c$$

Lo cual significa que (x_0+b, y_0-a) es también solución de la ecuación inicialmente dada.

Ejercicios

1. Demuestre la segunda parte del teorema.
2. Estudie las ecuaciones de la forma $ax - by = c$, donde a, b, y c son números reales, ¿Se cumple el teorema? Si no es así, plantee una conjetura respecto a las soluciones de esta ecuación y demuéstrela.

1.2.1.2. El método gráfico

Con el método anterior, si encontramos *una* solución podemos construir *otras* soluciones usando los coeficientes de la ecuación; mostraremos ahora un método que nos permite encontrar *todas* las soluciones conociendo *dos* de ellas.

La idea surge de representar las soluciones de ecuaciones con dos incógnitas como coordenadas en un par de rectas que se cortan en un punto.

Si dibujamos un par de rectas en un plano, formando un ángulo[5] α, con un punto de intersección O, que llamaremos *origen* y que representa el número 0, elegimos un punto en cada una de las rectas, y los denominamos A y B respectivamente, los segmentos determinados OA y OB representan la unidad de medida y los puntos A y B representan el número 1 en cada recta; luego, a partir del segmento unidad, se construyen, con regla y compás, los segmentos que determinan los puntos, de cada recta, representantes de los números naturales, racionales y algunos irracionales (números construibles). Aunque no tenemos mecanismos para encontrar los puntos de la recta que representan a los demás números algebraicos y los trascendentes, se considera que a cada punto de la recta le corresponde uno y sólo un número real y viceversa, estableciendo de esta forma una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta[6] .

Si en una recta dibujamos los valores de x y en la otra los de y, una solución de la ecuación

$$ax + by = c$$

la representamos con una pareja de números reales (x_0, y_0) que en el plano corresponde a la intersección de las rectas *paralelas*[7] *a cada una de las rectas dadas* trazadas desde los puntos x_0, y_0 .

En el caso de nuestro último ejemplo, algunas soluciones de la ecuación

$$3x + 5y = 54$$

están dadas por los puntos

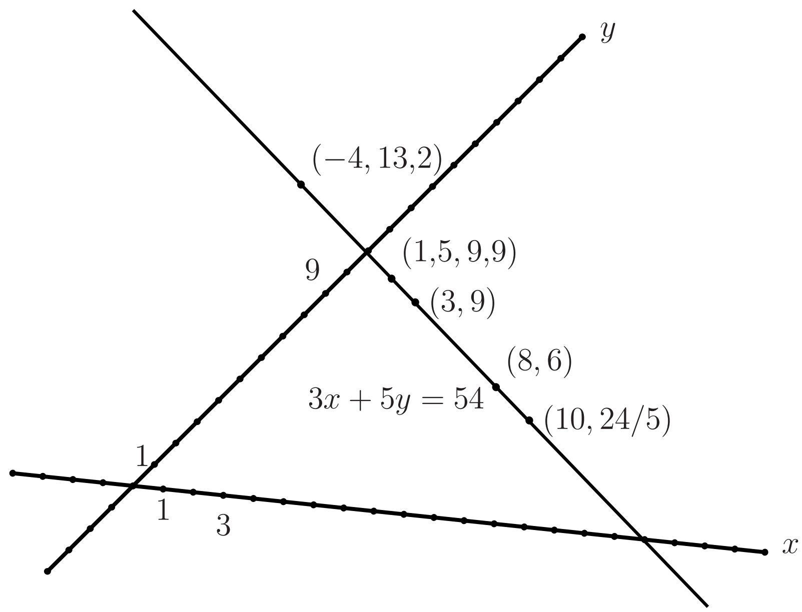
$$(3, 9), (8, 6), \left(10, \frac{24}{5}\right), \left(15, \frac{9}{5}\right), (1, 5, 9, 9), (6, 5, 6, 9), (-4, 13, 2) \text{ y } (-9, 16, 2)$$

que representamos gráficamente:

[5] Generalmente, se escoge un ángulo recto, pero esta condición no es necesaria.

[6] Este enunciado puede parecer fácil de demostrar, pero muchos matemáticos lo han intentado con resultados poco satisfactorios, por tal motivo se le ha considerado como un postulado.

[7] Esta condición tampoco es necesaria; pueden escogerse rectas perpendiculares, o de otra forma.



Observamos que todos los puntos resultan colineales; de hecho, si tomamos todos los puntos que solucionan la ecuación, uno por cada número real x, La gráfica de una ecuación de primer grado con dos incógnitas es, entonces, una recta.

Si hacemos la gráfica de una ecuación de la forma $y = mx + b$, observamos que el corte de la gráfica de la ecuación con el eje y es b, pues $x = 0$. Así, la gráfica de la ecuación $3x + 5y = 54$ corta al eje y en $\frac{54}{5}$ y, en consecuencia, el punto $\left(0, \frac{54}{5}\right)$ también es una solución de dicha ecuación.

1.2.1.3. El método axiomático

Para resolverla, aplicamos los mismos métodos de las ecuaciones con una incógnita, para llevarla a la forma:

$$y = \frac{c - ax}{b}$$

suponiendo que x se comporta como un número real.

El resultado que obtenemos es, que para cada valor que elijamos para x dentro de los números reales, obtenemos un valor para y, también dentro de los números reales, puesto que todas las operaciones que hacemos están definidas.

1.2.2. Dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas

Cuando pretendemos encontrar soluciones comunes a dos ecuaciones con dos incógnitas, puesto que cada una de ellas representa una recta, las dos rectas o se cortan en un punto o son paralelas, obtenemos entonces, como es de esperarse, una única solución o ninguna.

Por ejemplo, el sistema:

$$\begin{aligned} x + y &= 9 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

tiene como solución común a: $x = 5$ e $y = 4$.

1.2.2.1. El método Gráfico

Está basado en el hecho de que cada ecuación de primer grado con dos incógnitas se representa en un sistema de coordenadas cartesianas, con una recta; los puntos de la recta, están representados por parejas de números reales, cuya primera componente es x y segunda componente es y.

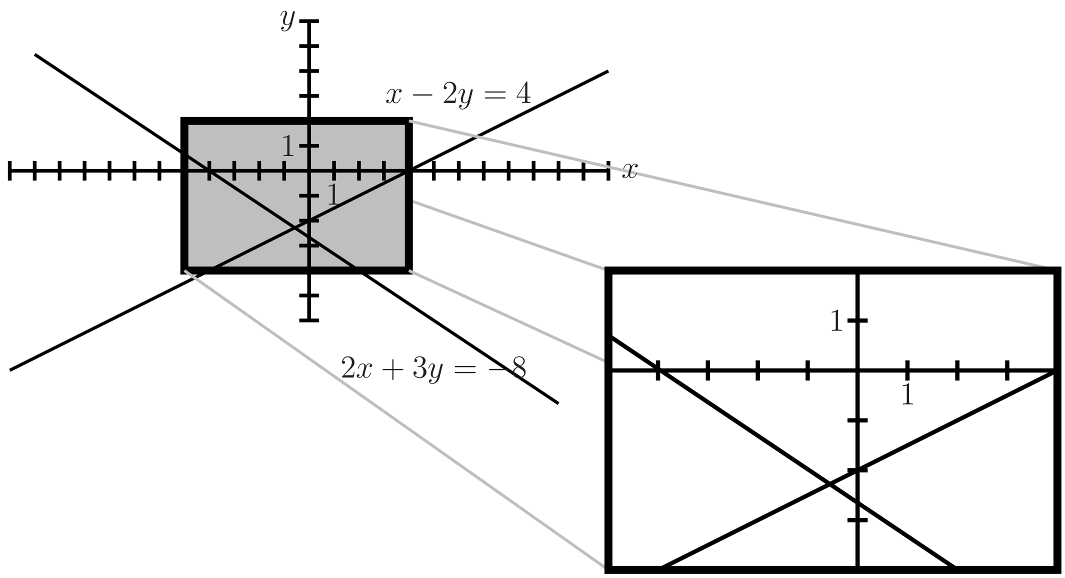
Si existe algún punto común a las dos rectas, ese punto ha de ser una solución común para las dos ecuaciones.

Si las rectas son paralelas, el punto no existe y no hay solución común para las dos ecuaciones y si las dos ecuaciones representan a la misma recta, todo punto es una solución común.

Por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ 2x + 3y &= -8 \end{aligned}$$

gráficamente se representa:



El punto[8] donde se intersecan las rectas que representan las dos ecuaciones está cerca de $x = 0,5$ y $y = 2,3$

1.2.2.2. El método de igualación

Consiste en expresar una cualquiera de las incógnitas del sistema en términos de la otra, en ambas ecuaciones la misma e igualar los resultados; con esto se elimina una de las incógnitas y quedamos en el caso de una ecuación con una incógnita que ya sabemos resolver.

Por ejemplo, en el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 5x + 7y &= 11 \end{aligned}$$

expresamos x en términos de y en las dos ecuaciones y obtenemos:

$$x = \frac{4 - 3y}{2} \qquad\qquad x = \frac{11 - 7y}{5}$$

lo que significa que

$$\frac{4 - 3y}{2} = \frac{11 - 7y}{5}$$

[8]En este método, la precisión de las soluciones depende de la escala que tomemos y en ningún caso es total, pero podemos mejorarla haciendo amplificaciones sucesivas alrededor de la solución.

esta ecuación es equivalente a

$$5(4-3y)=2(11-7y)$$

cuya solución es

$$y=-2$$

El valor de x, lo encontramos reemplazando el valor de y que se acaba de encontrar en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema original; por ejemplo en:

$$2x+3y=4$$

reemplazamos $y=-2$

$$2x+3(-2)=4$$

y obtenemos

$$x=5$$

Entonces, la solución del sistema es:

$$x=5 \qquad y=-2$$

1.2.2.3. El método de sustitución

Consiste, en expresar una cualquiera de las incógnitas en términos de la otra en una de las ecuaciones y reemplazar esta expresión en la otra ecuación, para conseguir de nuevo una ecuación de primer grado con una sola incógnita que ya sabemos resolver.

Por ejemplo, en el sistema anterior, expresamos x en términos de y en la primera ecuación:

$$x=\frac{4-3y}{2}$$

y sustituimos esta expresión en la segunda ecuación,

$$5x+7y=11$$

obteniendo

$$5\left(\frac{4-3y}{2}\right)+7y=11$$

que es una ecuación con solo una incógnita cuya solución es

$$y=-2$$

reemplazando este valor en la primera ecuación conseguimos

$$x=5$$

¡como debe ser!

1.2.2.4. El método de reducción

Consiste en multiplicar una de las ecuaciones por un cierto número y la otra por otro número de tal manera que el nuevo sistema tenga al menos una incógnita con coeficientes opuestos aditivos, de modo que cuando se sumen las dos ecuaciones, se eliminen los términos con iguales coeficientes.

Con el mismo ejemplo:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 5x + 7y &= 11 \end{aligned}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda por -2, resultando:

$$\begin{aligned} 10x + 15y &= 20 \\ -10x - 14y &= -22 \end{aligned}$$

Sumamos las ecuaciones obtenidas:

$$\begin{array}{r} 10x + 15y = 20 \\ -10x - 14y = -22 \\ \hline y = -2 \end{array}$$

podemos reiterar el proceso para eliminar y o reemplazar el valor hallado en una de las ecuaciones como se hizo con los otros métodos.

1.2.2.5. El método de los determinantes

Si aplicamos el método de reducción al sistema:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c2 \end{aligned}$$

y multiplicamos la primera ecuación por a_2 y la segunda por $-a_1$ obtenemos:

$$\begin{aligned} a_1a_2x + b_1a_2y &= c_1a_2 \\ -a_1a_2x - a_1b_2y &= -a_1c_2 \end{aligned}$$

sumando las dos ecuaciones nos queda:

$$b_1a_2y - b_2a_1y = c_1a_2 - a_1c_2$$

factorizando y despejando,

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

análogamente, obtenemos para

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Estos resultados se pueden escribir de forma más gráfica, si definimos el *determinante*[9] del sistema Δ_s como

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

y el determinante de x

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} \qquad\qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s}$$

Las ecuaciones simultáneas

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

1. Tienen una solución única si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

2. No tiene solución si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ y al menos una de las expresiones $(a_1c_2 - a_2c_1)$ y $(b_2c_1 - b_1c_2)$ no es cero.

3. Tiene infinitas soluciones si $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ y $b_2c_1 - b_1c_2 = 0$.

Puesto que los coeficientes son reales, el caso 1. corresponde a dos rectas que se intersecan, el caso 2. a dos recta paralelas y al caso 3. a una sola recta.

[9]Los determinantes fueron estudiados inicialmente por el matemático japonés Seki Kowa alrededor de 1683 y, por separado, por el filósofo y matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz alrededor de 1693.

Tres ecuaciones con tres incógnitas

Los métodos enunciados para resolver dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas, se extienden fácilmente, por analogía, a tres o más ecuaciones con tres o más incógnitas[10] . En el caso de los determinantes de orden superior al tercero, el cálculo se hace reduciendo un determinante de orden n, a n determinantes de orden $n-1$ hasta llegar a orden 2, los cuales ya sabemos resolver. Mostraremos con un ejemplo, el procedimiento. Para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+y+z&=12\\ 2x-y+z&=7\\ x+2y-z&=6 \end{aligned}$$

Escribimos el determinante del sistema Δ_s, cuya *primera* fila está formada por los coeficientes de x, y y z de la *primera* ecuación, la *segunda* fila formada por los coeficientes de x, y y z de la *segunda* ecuación, y la *tercera* por los de la *tercera*:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

naturalmente que podemos escoger cualquiera de las ecuaciones para que sea la primera, la segunda y la tercera, con esto *cualquier fila del determinante se puede cambiar con cualquier otra y el determinante es el mismo.*
Por supuesto que el mismo razonamiento se vale para las incógnitas, cualquiera puede ser escogida como la primera, la segunda o la tercera; lo que implica, que también *podemos intercambiar cualquier columna con otra y el determinante debe ser el mismo.*

Para calcular un determinante 3×3, elegimos una cualquiera de las filas (o las columnas), habitualmente la que tenga más ceros, y multiplicamos cada uno de sus números a_{ij} (i es el número de la fila y j es el número de la columna donde está a_{ij}) y por un determinante 2×2, resultante de eliminar la fila y la columna donde está a_{ij} y por $(-1)^{i+j}$, en nuestro caso, si elegimos la primera fila para

[10]Los babilonios resolvieron problemas concretos que conducían a sistemas de cinco ecuaciones con cinco incógnitas, e incluso hay un problema astronómico, que conduce a un sistema de diez ecuaciones con diez incógnitas, la mayor parte de ellas lineales. El método que utilizaron para resolver este sistema, era el de combinar las ecuaciones hasta llegar a calcular los valores de las incógnitas.

desarrollar el determinante, tenemos que:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} &= 1(1-2) - 1(-2-1) + 1(4-(-1)) \\ &= 1(-1) - 1(-3) + 1(5) \\ &= -1 + 3 + 5 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Ahora, aplicamos el mismo procedimiento que en dos variables para construir el determinante asociado a la incógnita x, reemplazando la columna correspondiente a la variable, por la columna de los términos que no son coeficientes de variable alguna.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Y calculamos, digamos por la primera columna:

$$\begin{aligned} \Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= 12 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 12(-1) - 7(-3) + 6(2) = 21 \end{aligned}$$

Finalmente, aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s}$$

para obtener

$$x = \frac{21}{7} = 3$$

De manera similar,

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}}{\Delta_s} = -2\frac{\begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}}{7} + 7\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{7} - 1\frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{7}$$

o sea

$$y = \frac{28}{7} = 4$$

y para z:

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{\Delta_s} = 1\frac{\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{7} - 1\frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{7} 12\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{7}$$

con el resultado,

$$z = \frac{35}{7} = 5$$

En general[11] , si tenemos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \cdots \quad a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + & \quad a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + & \quad a_{mm}x_n = b_m \end{cases}$$

Entonces, para cada i:

$$x_i = \frac{\Delta_{xi}}{\Delta_s}$$

donde

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{11} & + & a_{12} + & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & + & a_{22} + & & a_{2n} \\ & \vdots & & & \\ a_{m1} & + & a_{m2} + & & a_{mn} \end{vmatrix}$$

y

$$\Delta_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & + & a_{12} + & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & + & a_{22} + & & b_1 & & a_{2n} \\ & \vdots & & & & & \\ a_{m1} & + & a_{m2} + & \cdots & b_1 & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

[11]Las justificaciones de estos procedimientos son tema del Álgebra lineal; un texto inicial muy agradable es: CAMPOS, M., GARZON, M., MORA, C., PEREZ, J., VILLAMARIN, G., *Fundamentos de Álgebra lineal*, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, 2004.

se obtiene del anterior reemplazando la columna de x_i por la columna de los términos independientes b_i .

Por ejemplo, para resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} 3x_1 & -2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ x_1 & -2x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & & +2x_3 & & = & -2 \\ & 4x_2 & 3x_3 & -x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

calculamos el determinante del sistema:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Para ello, lo desarrollamos por la tercera fila, que es la que más ceros tiene, y obtenemos:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$
$$- 0 \times \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

y cada uno de estos se desarrolla de la misma manera, por ejemplo, para el cálculo de

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

debemos tener en cuenta los signos:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

y obtenemos,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

De esta manera:

$$\begin{aligned}\Delta_s &= 3(4(-3) - 3(6) + 1(0)) + 2(4(5) - 1(-8)) \\ &= 3(-30) + 2(-12) = -114\end{aligned}$$

El cálculo del valor de un determinante, puede ser bastante tedioso, pero hay por lo menos dos maneras de facilitarlo, uno es, utilizar algunas propiedades de ellos, como:

- Un determinante es igual a cero si todos los elementos de una fila (o columna) son idénticos, o proporcionales, a los elementos de otra fila (o columna).
- Si todos los elementos de una fila (o columna) se multiplican por un factor dado, el determinante queda multiplicado por dicho factor.
- El valor de un determinante no se altera si se añade a cada elemento de una fila (o columna) el elemento correspondiente de otra fila (o columna) multiplicado por un factor constante.

La otra manera es *no hacerlo*, y dejarle el trabajo a una máquina, programas como Matlab, Matemática, Maple, etc., hacen las cuentas de manera transparente.

2. Ecuaciones de segundo grado

Gran parte del poder simplificador del Álgebra, reside en la manipulación de símbolos, que la hace muy eficiente, sin embargo hay un gran valor pedagógico en las consideraciones históricas de su desarrollo, que hacen atractivas las presentaciones y en algunos argumentos geométricos, que dan significado a las ecuaciones y conducen a su solución, en particular en las de segundo grado.

Debido a que los números negativos aparecieron y se formalizaron relativamente tarde en la historia y a que los métodos para plantear y resolver las ecuaciones en términos geométricos incluyen longitudes, áreas y volúmenes, y estas son cantidades positivas, debemos formular los problemas y las ecuaciones, como se hizo históricamente, de manera que en ellas solo aparezcan números positivos.

Los cinco posibles casos de ecuaciones de segundo grado, expresados con números positivos son los siguientes:

$$x^2 = bx \tag{1}$$
$$x^2 = c \tag{2}$$
$$x^2 + c = bx \tag{3}$$
$$x^2 = bx + c \tag{4}$$
$$x^2 + bx = c \tag{5}$$

2.1. Ecuaciones de tipo (1)

Una ecuación de la forma

$$x^2 = bx$$

tiene como única solución a $x = b$ pues, geométricamente, cero no es una solución aceptable.

2.2. Ecuaciones de tipo (2)

Una ecuación de la forma

$$x^2 = c$$

es el equivalente al problema de hallar la raíz cuadrada de un número y para ello ya se han desarrollado diversos métodos.

2.2.1. El método del tanteo

Por lo que hemos hecho, ya somos expertos en este método; consiste naturalmente en proponer, a la topa tolondra, una primera *solución tentativa*, la elevamos al cuadrado y si el resultado es menor que el valor de c, intentamos de nuevo con un valor mayor, hasta que lo logremos; si el resultado es mayor vamos en la dirección contraria.

Podemos mejorarlo un poco haciendo consideraciones sobre algunas cifras; por ejemplo, si c es un número natural, y su cifra de las unidades es 1, la cifra de las unidades de la raíz, no puede ser 2, ni 5, sino 9 o 1, etc. Este proceso puede ser demorado, e innegablemente primitivo, pero funciona.

2.2.2. El método de Herón

Herón de Alejandría en el siglo I, propuso una manera de aproximar la raíz positiva de un número c, por ejemplo, en el caso

$$x^2 = 2$$

Supone como raíz, $x = \frac{3}{2}$, y para calcular una nueva aproximación, usa la regla:

$$\frac{\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{4}{3}}{2} = \frac{17}{12}.$$

Repitiendo el procedimiento[12] se obtiene

$$\frac{577}{408} = 1,414\ 215686245098039\ 215686245098039 \cdots$$

que es una buena aproximación de $\sqrt{2}$.

Ejercicios

1. *Combinando lo que hemos hecho hasta ahora, proponga ejercicios para resolver ecuaciones de la forma:*

$$ax^2 + b = c.$$

2. *Proponga una explicación*[13] *para el método de Herón, aplique el método para aproximar* $\sqrt{3}$.

2.2.3. El método de Euclides

Como consecuencia de la crisis provocada por el colapso de la aritmética pitagórica, la matemática griega dedicó sus mejores esfuerzos a la geometría, aunque con

[12]Estas aproximaciones y cálculos repetidos se denominan iteraciones. Métodos similares fueros desarrollados por los matemáticos chinos Liu Hui (en el siglo III) y Chu Shih-Chieh (en el siglo XIII), fueron redescubiertos en Europa hacia 1800 por el matemático inglés W. G. Horner. También había sido usado por el matemático árabe Yamschid al-Kaschi.

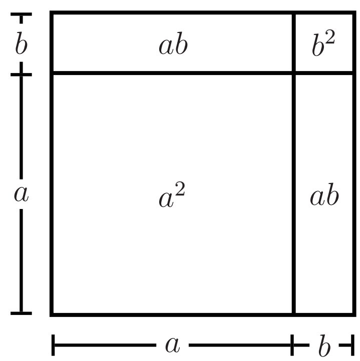
[13]Compare estas fracciones con las reductas de la fracción continua para $\sqrt{2}$

ella expresaron argumentos que son equivalentes a algunos enunciados algebraicos y permiten resolver ecuaciones.
Los números fijos o desconocidos, los representaban con un segmento cuya longitud relativa a alguna unidad fija, es la cantidad; un producto de dos cantidades lo interpretaban como el área de un rectángulo, y un producto de tres cantidades es interpretado como el volumen de un prisma rectangular recto. Este es el origen del uso de las palabras *cuadrado* y *cubo* para segundas y terceras potencias.

Por ejemplo la identidad,

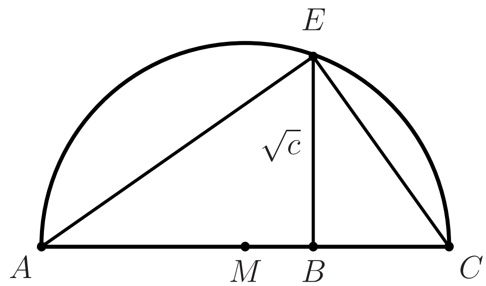
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

geométricamente se representa como:



El equivalente geométrico para hallar la raíz cuadrada de un número c aparece en la proposición 13 del libro VI de los *Elementos* de Euclides, en términos de construir una media proporcional entre dos rectas dadas, cuya construcción se puede resumir como sigue:

1. Construir $\overline{AB}$ con $AB = c$
2. Extender $\overline{AB}$ desde B a C tal que $BC = 1$.
3. Bisecar $\overline{AC}$ en M.
4. Con centro en M y radio $\overline{AM}$ construir un semicírculo.
5. Levantar una perpendicular a $\overline{AC}$ en B. Llamar E al punto en que la perpendicular interseca el semicírculo, entonces $BE = \sqrt{c}$.



Ejercicio

Bosqueje una demostración de este hecho.

2.3. Ecuaciones de tipo (3)

Las ecuaciones de la forma

$$x^2 + c = bx$$

fueron resueltas, de varias maneras; destacamos aquí, una forma aritmética asumida por los babilonios y una geométrica, usada por los griegos.

2.3.1. El método Babilónico

Los Babilonios alrededor de 1700 A.C., resolvieron problemas como el de hallar dos números, dados su suma y su producto; o formulado en forma geométrica, dados el área y el semiperímetro de un rectángulo, encontrar sus lados.

En general si dos números x e y, tienen una suma b y un producto c, entonces

$$y = b - x$$

y como $xy = c$ tenemos que,

$$bx - x^2 = c.$$

Como los babilonios no conocían los números negativos, las ecuaciones también se escribían solamente con términos positivos, o sea que en lugar de la anterior, consideraban la ecuación equivalente:

$$x^2 + c = bx$$

En particular, si la suma de dos números es 20 y el producto es 96 ¿Cuáles son esos números? Los babilonios lo resolvían suponiendo que

$$x = 10 \qquad \text{e} \qquad y = 10$$

puesto que la suma debe ser igual a 20, esta suposición es razonable, pero no correcta porque no satisface la segunda condición; para acomodarla, restaban el producto verdadero, 96, del producto obtenido:

$$100 - 96 = 4$$

Tomaban la raíz cuadrada de 4,

$$\sqrt{4} = 2$$

el resultado lo sumaban con el valor supuesto de x y lo restaban del valor supuesto de y, obteniendo nuevas aproximaciones

$$x = 10 + 2 \qquad \text{e} \qquad y = 10 - 2$$

y con esto llegaban a la respuesta correcta:

$$x = 12 \qquad \text{e} \qquad y = 8$$

Por supuesto, no usaban los símbolos que hemos usado, ni resolvían casos generales, sino sólo ejemplos concretos, la mayoría de ellos intentaba ilustrar un método general, que en forma de un algoritmo retórico queda:

1. Dividir la suma $S = x + y$ en la mitad.
2. Elevar al cuadrado el resultado de la parte 1.
3. Restar el producto $A = x \cdot y$ del resultado de la parte 2.

$$\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A$$

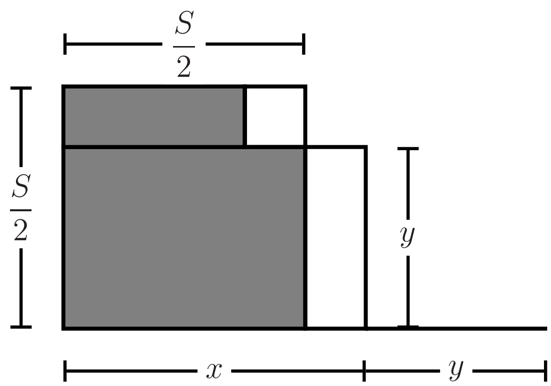
4. Tomar la raíz cuadrada del resultado de la parte 3.

$$\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A}$$

5. Sumar el resultado de la parte 4 al resultado de la parte 1.

$$\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A} + \frac{S}{2}$$

Una justificación geométrica para este procedimiento se obtiene de la siguiente figura:



Un cuadrado de lado $\frac{S}{2}$ tiene el semiperímetro deseado $S = x + y$.

El valor $\left(\frac{S}{2}\right)^2$ excede el área deseada $xy = A$, en $z^2 = \left(\frac{S}{2}\right)^2 - A$, que es el área del cuadrado de lado z.

La restante figura, sombreada, puede ser reconstruida como un rectángulo, cuyas dimensiones son:

$$x = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - A}$$

y

$$y = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - A}$$

Y una justificación algebraica la obtenemos llamando

$$x + y = S \qquad \text{y} \qquad xy = A$$

Y suponiendo que

$$x = \frac{S}{2} + z \qquad \text{y} \qquad y = \frac{S}{2} - z,$$

donde z es una cantidad por determinar; para ello, sustituimos estos valores en la ecuación $xy = A$, y obtenemos

$$\left(\frac{S}{2}\right)^2 - z^2 = A$$

por lo tanto

$$z^2 = \left(\frac{S}{2}\right)^2 - A$$

o sea que

$$z = \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A}$$

y sólo consideramos el valor positivo de la raíz, que en la época era la única que tenía significado.

De esta manera

$$x = \frac{S}{2} + \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A}$$

y

$$y = \frac{S}{2} + \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - A}$$

Un problema típico del álgebra babilónica antigua, pide hallar un número tal que sumado a su inverso de un número dado, este es un caso particular del ejemplo anterior.

2.3.2. El método griego

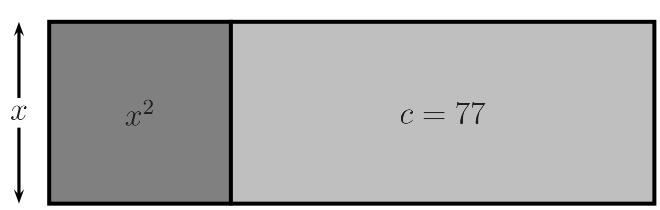
Los griegos, y posteriormente los árabes, emplearon un método geométrico para resolver ecuaciones de este tipo, fundamentado en la proposición 5 del libro II de los Elementos.

Veamos con, la ecuación

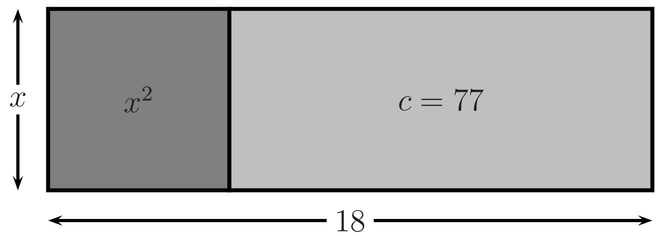
$$x^2 + 77 = 18x$$

a manera de ejemplo, en qué consiste el método:

1. Dibujamos un cuadrado de lado x y un rectángulo de área 77 unidades cuadradas, de tal manera que uno de los lados sea x, como observamos en la siguiente figura:



2. El rectángulo compuesto por $x^2 + 77$ tiene como área $18x$, como vemos en la ecuación original; por lo tanto, el otro lado del rectángulo tiene como longitud 18 unidades:



3. Trazamos un segmento que divida en dos partes iguales al rectángulo de área $18x$; es decir, la mediatriz del segmento cuya longitud es 18 unidades. Se obtienen dos casos, que x sea más pequeño o igual a 9 (la mitad del segmento de 18 unidades) o que x sea mayor que 9.

   En el primer caso, para encontrar el valor de x, se completa un cuadrado de lado 9 que incluya al cuadrado de lado x como en la figura:

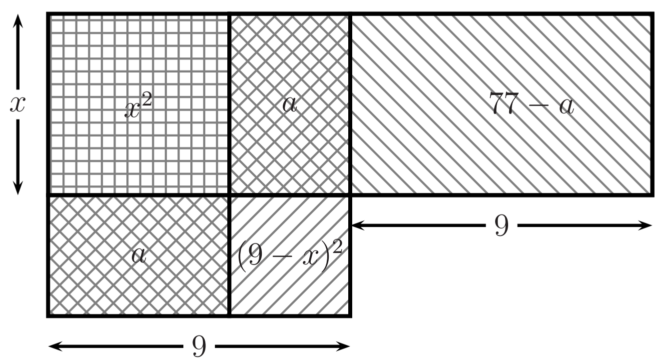


Figura 8

   Este cuadrado está compuesto por dos rectángulos de igual área a y por dos cuadrados, uno de área x^2 y el otro de área $(9-x)^2$, sumando las áreas de este último con 77 que es el área del rectángulo c, se obtiene el área del cuadrado de lado 9, pues se tiene que

$$x^2 + a = 77 - a$$

   lo cual equivale a:

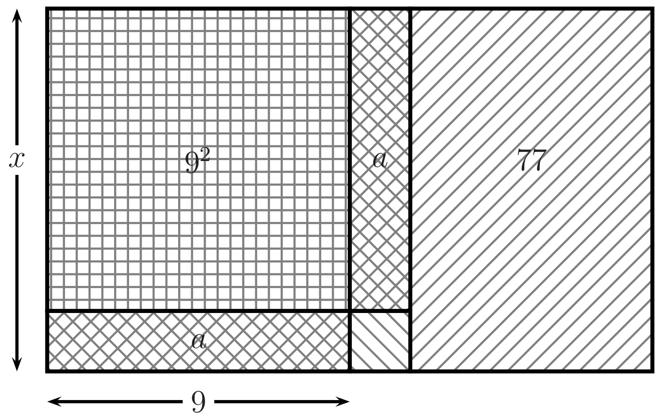
$$(x^2 + a) + a = 77$$

   de donde,

$$(9 - x)^2 + 77 = 9^2$$

y, en consecuencia, x es 7.

En el segundo caso, para x mayor que 9, en el cuadrado de lado x se incluye un cuadrado de lado 9, así:



de esta manera, el cuadrado de lado x está formado por dos rectángulos de igual área a y por dos cuadrados, uno de área 9^2 y el otro de área $(x-9)^2$; se tiene entonces, que

$$x^2 - a = 77 + a$$

lo cual equivale a:

$$x^2 = 77 + a + a$$

de donde,

$$(x-9)^2 + 9^2 = 77$$

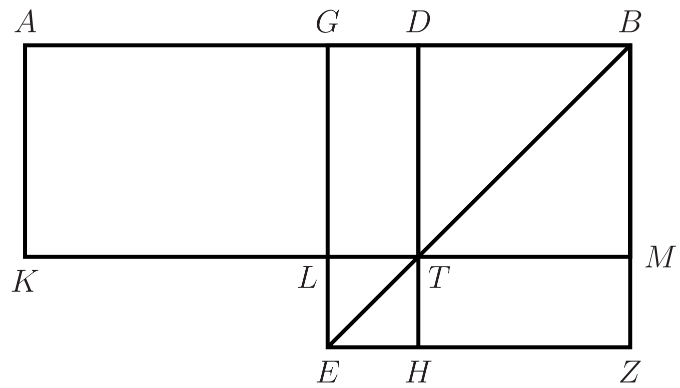
y, por lo tanto, x es 11.

La proposición 5 del libro II, de los elementos de Euclides establece que:

Si se divide una recta en partes iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por las partes desiguales de la recta entera, mas el cuadrado de la diferencia entre una de las dos partes iguales y una parte desigual, es equivalente al cuadro de la mitad de la recta dada.

Esto es, de acuerdo con la siguiente figura, en lenguaje moderno,

$$AD \cdot AK + (LT)^2 = (GB)^2,$$



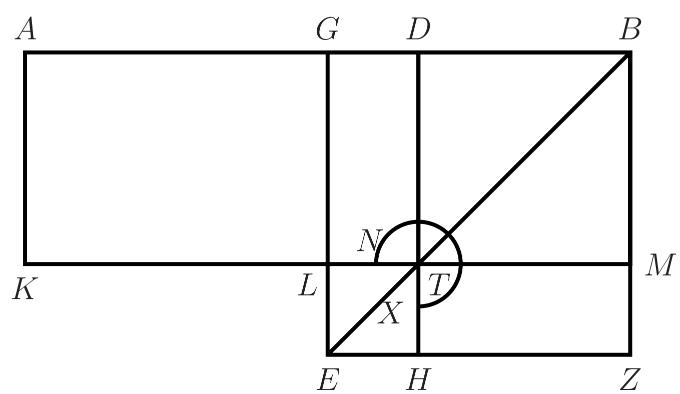
que, en el primer caso del ejemplo presentado anteriormente, equivale a decir

$$77 + (9 - x)^2 = 9^2$$

Para demostrar esta proposición, se divide la recta AB en partes iguales por el punto G y en partes desiguales por el punto D.

Luego se construye el cuadrado $GEZB$ sobre la recta GB; y se traza la diagonal BE; y por el punto D una paralela a GE, la DH; por el punto T se traza la recta KM paralela a las AB y EZ y por el punto A la recta AK paralela a GL y BM.

Puesto que los rectángulos GT y TZ son iguales, añadimos el rectángulo DM común y entonces el rectángulo GM será equivalente al DZ; pero el rectángulo GM es igual a AL por que la recta AG es igual a la GB, y, por tanto, el rectángulo AL también es igual al DZ.



Añadiendo el rectángulo GT común, entonces el rectángulo AT es equivalente al gnomon MNX; pero el AT esta comprendido por las rectas AD y DB por que DT es igual a DB; luego el gnomon MNX será equivalente a dicho rectángulo.

Añadimos ahora el cuadrado LH común, que equivale a cuadrado de GD y el gnomon MNX mas el cuadrado LH será equivalente al rectángulo comprendido por las rectas AD y DB mas el cuadrado de GD; pero el gnomon MNX y el cuadrado LH forman el cuadrado $GEZB$, que es el construido sobre GB; luego el rectángulo comprendido por las rectas AD y DB mas el cuadrado de GD equivale a cuadrado de GB.

2.4. Ecuaciones de tipo (4)

Para las ecuaciones de la forma

$$x^2 = bx + c$$

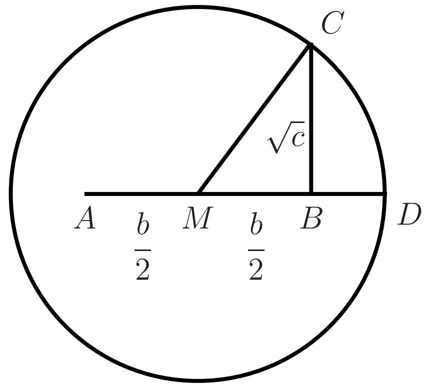
presentamos:

2.4.1. El método griego

Este método conocido como *aplicación de áreas*, se usa para la solución de ecuaciones cuadráticas de tipos (3), (4) y (5). Aplicar un área a un segmento de longitud b consiste en levantar segmentos perpendiculares, de una longitud dada, sobre este segmento hasta completar un rectángulo. Para este caso, el proceso se describe así:

- Construir el segmento $\overline{AB}$ con $AB = b$.
- Levantar una perpendicular $\overline{CB}$ a $\overline{AB}$ con $CB = \sqrt{c}$.
- Bisecar $\overline{AB}$ en M.
- Con centro en M y radio MC, construir un círculo.
- Llamemos D al punto donde el círculo encuentra la extensión de $\overline{AB}$ a través de B. Luego $x = AD$.

En la siguiente figura, se muestra la anterior construcción:



Demostremos, geométricamente, que el segmento AD es la solución de la ecuación.

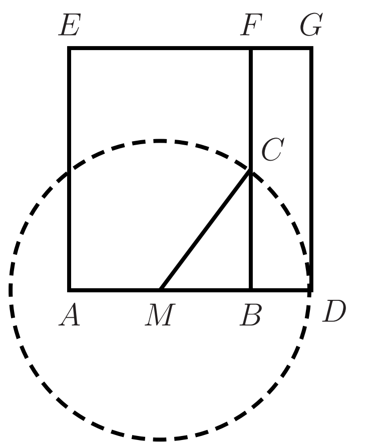
El término bx en la ecuación $x^2 = bx + c$ representa el área de un rectángulo.

Sobre un segmento de línea b, *aplicamos un área* a b, levantando perpendiculares de longitud x sobre éste; el área aplicada es, entonces, bx.

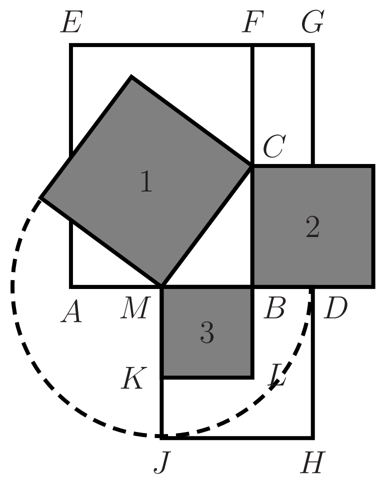
Se debe mostrar que este rectángulo con otro rectángulo con área c, forman un cuadrado de lado x, con área x^2.

$\overline{AB}$ tiene la longitud dada b y $\overline{AD}$ tiene la longitud construida x.

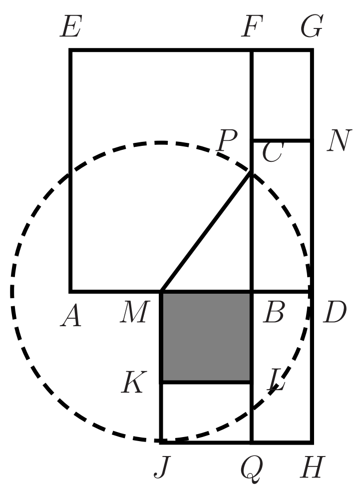
Si levantamos perpendiculares $\overline{AE}$ y $\overline{DG}$ ambas de longitud x, para hacer un cuadrado $ADGE$ de área x^2, puesto que el rectángulo $ABFE$ tiene área bx, necesitamos demostrar que el rectángulo $BDGE$ tiene área c.



Por ser radios de la misma circunferencia, $MD = MC$; por lo tanto, un cuadrado sobre $\overline{MD}$, $MDHJ$, tiene la misma área que el cuadrado sobre $\overline{MC}$, el cuadrado1.



Por el teorema de Pitágoras, la suma de las áreas de los cuadrados 3 ($MBLK$) y 2 es igual al área del cuadrado 1, que, a la vez, es igual al área de $MDHJ$. Por lo tanto, sustrayendo el cuadrado $MBLK$ del cuadrado $MDHJ$, la pieza restante, el polígono $BDHJKL$, tiene la misma área del cuadrado 2, que es igual a c.



Así, el rectángulo $BDHQ$ es igual al rectángulo $PNDB$ y el rectángulo $KJQL$ es igual al rectángulo $PNGF$, con lo cual el rectángulo $BDGF$ tiene, en verdad, área igual a c, como lo queríamos demostrar.

2.4.2. El método de Descartes

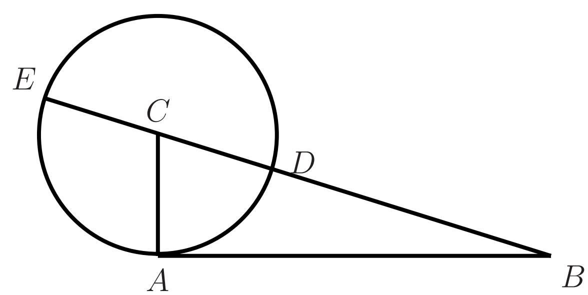
En el siglo XVII en su libro *La Gèometrie*[14] , René Descartes (1595-1650) describió un método geométrico para la construcción de la solución de la ecuación cuadrática

$$x^2 = bx + c^2$$

donde, de nuevo, muestra solamente las raíces positivas.

La construcción es como sigue:

- Construir $\overline{AB}$ con $AB = c$.
- Levantar una perpendicular, $\overline{AC}$ a $\overline{AB}$ con $AC = \dfrac{b}{2}$.
- Construir un círculo con centro en C y radio $\overline{AC}$.
- Construir una línea entre B y C que interseque el círculo en E y en D.
- La solución es $x = BE$.



Para justificar la construcción, usamos el teorema de Pitágoras. Como el triángulo ABC es un triángulo rectángulo, entonces

$$CB^2 = AC^2 + AB^2$$

O en términos de x, b y c:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2$$

[14]DESCARTES, R., *La Geometrie*, Espasa, 1947, p. p. 56-59.

lo que se simplifica en

$$x^2 - bx = c^2$$

o lo que es igual

$$x^2 = bx + c^2$$

también $y = DB$ es solución de la ecuación cuadrática,

$$y^2 + by = c^2$$

y el argumento es el mismo.

Ejercicios

1. Use el teorema:

   Si una secante y una tangente son trazadas a un círculo desde un punto fuera de él, la longitud de la tangente es la media proporcional entre la longitud de la secante y la longitud del segmento externo.

   Para justificar la construcción de Descartes.

2. Use el método griego y el de Descartes para resolver algunas ecuaciones cuadráticas y haga una comparación entre ellos.

2.4.3. El método de las fracciones continuas

Ejemplifiquemos el método con un caso simple: en la ecuación

$$x^2 = x + 1$$

como $x = 0$ no es solución de la ecuación, supongamos que $x \neq 0$; dividimos ambos lados de la igualdad por x y obtenemos

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Y ahora ¡el truco genial! reemplazamos x en el denominador de la fracción de esta igualdad para obtener

$$x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}$$

e insistimos
$$x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}$$
y podemos reiterar el proceso sin un último paso, hasta obtener la expresión:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}$$

que por fortuna ya conocemos como el número de oro φ. Pero algo no está bien, pues si no conocemos a cual número corresponde la fracción continua no hemos resuelto nada!

Sin embargo, podemos hacer de este fracaso un triunfo; porque puede que el método no sea útil para resolver ecuaciones de segundo grado, pero si encontramos otras formas de resolver estas ecuaciones, tendremos una manera de encontrar el número que corresponde a una fracción continua infinita.

Por ejemplo de la ecuación
$$x^2 = bx + c$$
obtenemos la fracción continua

$$x = b + \cfrac{c}{b + \cfrac{c}{b + \cfrac{c}{b + \cdots}}}$$

resolvemos la ecuación por cualquier otro método, que por fortuna hay otros, y con su solución obtenemos un valor para la fracción continua. En particular si $b = 4$ y $c = 3$, la fracción continua

$$x = 4 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \cdots}}}$$

corresponde al número
$$2+\sqrt{7}.$$
Y aún más ganancia! En la ecuación
$$x^2 = bx + c$$
Podemos despejar la x de la forma:
$$x = \sqrt{c+bx}$$
y aplicamos el viejo truco de reemplazar la x, ahora dentro del radical,
$$x = \sqrt{c+b\sqrt{c+bx}}$$
Y de nuevo insistimos, de manera reiterada para obtener la expresión:
$$x = \sqrt{c+b\sqrt{c+b\sqrt{c+b\sqrt{c+b\sqrt{c+\cdots}}}}}$$
Por supuesto no es una forma de resolver la ecuación pero si una manera de encontrar un valor para estas expresiones infinitas. Por ejemplo, para calcular
$$x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}}}$$
resolvemos la ecuación
$$x^2 = x+2$$
y obtenemos
$$x = 2.$$
Este es un resultado *¡extraordinariamente hermoso!* Cada resultado parcial, tomando un número finito de términos, nos da un número irracional, esta es una forma de aproximar el número racional 2, con una sucesión infinita formada ¡solamente por números irracionales!

2.5. Ecuaciones de tipo (5)

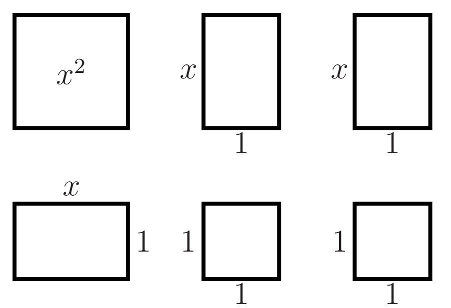
Son ecuaciones de la forma
$$x^2 + bx = c$$
para su solución estudiaremos dos métodos geométricos y uno algebraico.

2.5.1. El método árabe

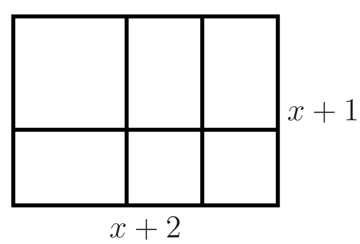
El matemático árabe Tabit Ben Qurra, representó geométricamente el polinomio

$$x^2 + 3x + 2$$

como un producto de factores así: x^2 como el área de un cuadrado de lado x, a $3x$ como tres rectángulos cada uno de dimensiones x y 1; y a 2 por dos cuadrados de lado 1.



Si queremos representar la suma de estas áreas como un producto, nuestra tarea es formar un rectángulo con estas figuras, una manera de hacerlo es



y por lo tanto

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

En el siglo IX, *Muhammad ibn Muza Al-khowarizmi* en su libro *Al-jabr wa'l muqábalah* dio solución a ecuaciones cuadráticas, usando un método que conocemos como *compleción de cuadrados*. En su tiempo, tampoco se aceptaban números negativos, ni como coeficientes de las ecuaciones[15], ni como raíces; y sus argumentos son geométricos.

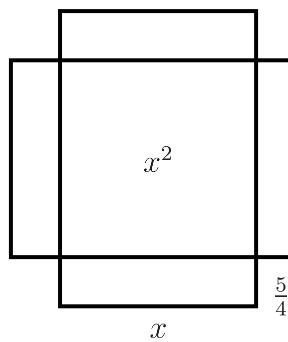
[15] Solo trescientos años después al-Samaw“al introdujo coeficientes negativos en las ecuaciones. Hasta el siglo XVII, la teoría de ecuaciones estuvo limitada a coeficientes y raíces positivas, pues los matemáticos europeos no aceptaban que las soluciones negativas y complejas fueran números; los antiguos matemáticos indios, como Brahmagupta, si conocían las raíces negativas, pero fuera de China e India no se trabajaba con coeficientes negativos en los polinomios.

Como las longitudes, áreas y volúmenes son cantidades positivas, no hay cabida para los números negativos y la forma en que los problemas cuadráticos son enunciados se limitan a ellas; por ejemplo, la ecuación:

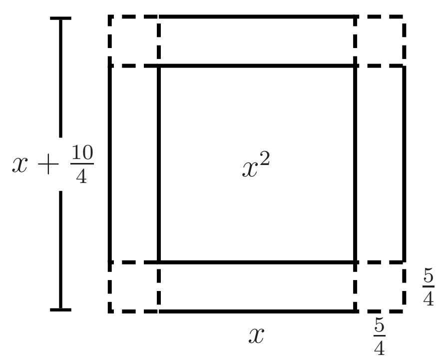
$$x^2 + 5x = 36$$

la enunciamos: Cuando un cuadrado de lado x es añadido a un rectángulo con lados de longitud 5 y x, el resultado es un área con 36 unidades cuadradas.

Para resolver esta ecuación, Al - khowarizmi dibuja un cuadrado de área x^2 y sobre cada uno de los lados de éste, cuatro rectángulos de dimensiones x y $\frac{5}{4}$; esta figura tiene, en suma un área de 36:



Entonces, para completar el cuadrado, se agregan cuatro cuadrados de lado $\frac{5}{4}$; con esto, se obtiene un cuadrado de lado $x + \frac{10}{4}$ y área $36 + \frac{25}{4} = \frac{169}{4}$ unidades.



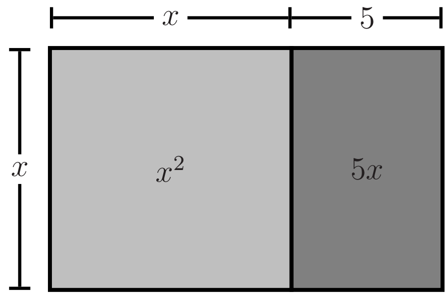
Luego, el lado del cuadrado debe ser

$$x + \frac{10}{4} = \frac{13}{2}$$

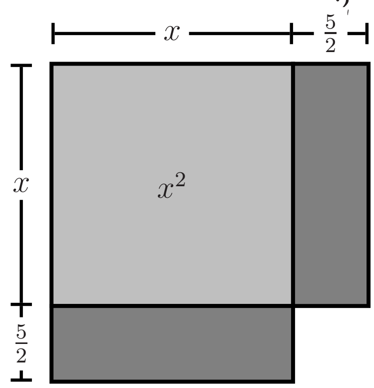
y, por lo tanto, $x = 4$.

2.5.2. El método griego

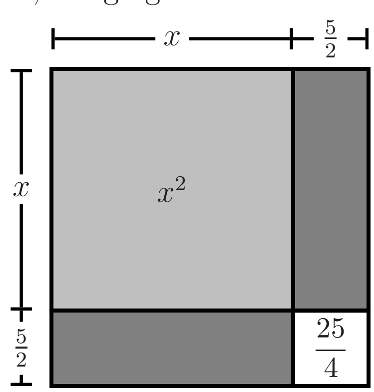
Los griegos emplearon un método similar al de los árabes, completando el cuadrado de otra forma. Para la misma ecuación, dibujaban un cuadrado de lado x y un rectángulo de área $5x$, obteniendo un rectángulo de lado $x+5$ y área 36 unidades, de la siguiente manera:



Luego, cambiaban la figura obtenida por otra, con igual área, dividiendo el rectángulo de área $5x$ en dos rectángulos de área $\frac{5}{2}x$:



Para completar el cuadrado, se agrega un cuadrado de lado $\frac{5}{2}$



de esta manera, el área total del cuadrado es $36+\frac{25}{4}=\frac{169}{4}$ y la longitud del lado está dada por

$$x+\frac{5}{2}=\frac{13}{2}$$

es decir, $x=4$.

2.5.3. El método de Vietà

A finales del siglo XVI, Francois Vieta resuelve la ecuación de segundo grado:

$$x^2+2bx=c$$

sustituyendo,

$$y=x+b$$

elevando al cuadrado,

$$y^2=x^2+2bx+b^2$$

de donde,

$$y^2=c+b^2$$

y por tanto

$$y=\pm\sqrt{c+b^2}$$

es decir, que

$$x=y-b=\pm\sqrt{c+b^2}-b$$

¡Fenomenal!

2.6. Ecuaciones de segundo grado que incluyen números negativos como coeficientes

Una ecuación general de segundo grado donde los coeficientes pueden ser negativos puede escribirse de forma general como

$$x^2+bx+c=0$$

presentaremos dos métodos geométricos que usan el método de las coordenadas.

2.6.1. El método de Carlyle

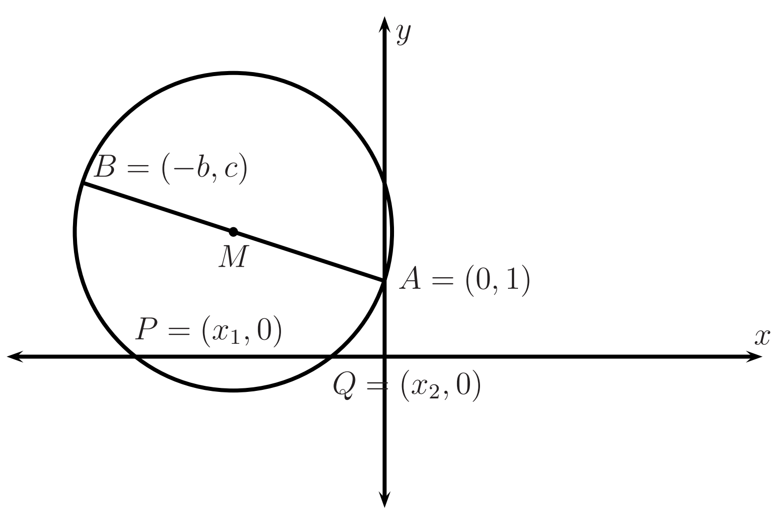
Es curioso que el método de Descartes no utilice coordenadas para resolver la ecuación cuadrática, pues el fue uno de los inventores, sin embargo Thomas Carlyle (1775-1881), propuso una manera que si las usa.

Esta solución resuelve la ecuación

$$x^2 + bx + c = 0$$

para todos los valores reales de b y c, además muestra cuando las soluciones no son reales.

- En un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, ubicamos los puntos $A = (0, 1)$ y $B = (-b, c)$.
- Bisecamos $\overline{AB}$ en M.
- Construir un círculo con centro M y radio $\overline{AM}$.
- Llamar P y Q los puntos donde el círculo interseca el eje x.



Si $P = (x_1, 0)$ y $Q = (x_2, 0)$ entonces x_1 y x_2 representan las soluciones de la ecuación. Para demostrar esta afirmación, sabemos que:

1. El círculo tiene el radio $r = \dfrac{AB}{2}$ y por lo tanto;

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(-b-0)^2 + (c-1)^2}$$
$$r = \frac{\sqrt{b^2 + (c-1)^2}}{2}$$

2. El centro del círculo es el punto medio de $\overline{AB}$, luego tiene coordenadas $\left(\dfrac{-b}{2}, \dfrac{c+1}{2}\right)$ y la ecuación del círculo es:

$$\left(x - \frac{-b}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{c+1}{2}\right)^2 = r^2$$

reemplazando r y haciendo las cuentas,

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + (c-1)^2 - (c+1)^2}{4}$$

o sea

$$x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - c$$

que es equivalente a

$$x^2 + bx + c$$

3. Lo anterior significa que si x es una solución de la ecuación, entonces el punto $(x, 0)$ está sobre el círculo.

Para diferentes valores de $(-b, c)$, el círculo intersecta al eje x en dos puntos, tangencialmente en un punto o en ninguno, cuando el radio sea respectivamente mayor , igual o menor que la distancia entre el centro del círculo y el eje x, que es, $\dfrac{|c-1|}{2}$.

2.6.2. El método de Von Staudt

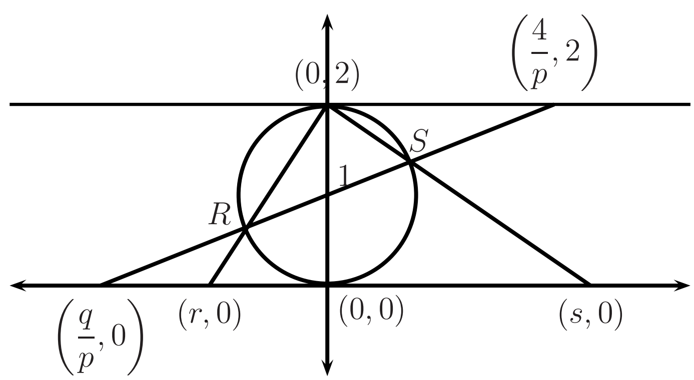
Otro método para resolver la ecuación

$$x^2 - px + q = 0,$$

utilizando coordenadas, fue propuesto por el matemático alemán Karl Von Staudt (1798 - 1867). La idea es ubicar los puntos

$$\left(\frac{q}{p}\,,\,0\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{4}{p}\,,\,2\right)$$

en un plano cartesiano, como sigue:



Unimos con un segmento estos puntos, el segmento corta a la circunferencia de centro $(0, 1)$ y radio 1 en los puntos R y S, cuyas proyecciones desde $(0, 2)$ son $(r, 0)$ y $(s, 0)$ respectivamente; r y s son las raíces de la ecuación dada.

Para demostrar que la afirmación es cierta consideremos la ecuación de la circunferencia con centro en $(0, 1)$ y radio 1:

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

y la ecuación de la recta que pasa por los puntos $\left(\frac{q}{p}\,,\,0\right)$ y $\left(\frac{4}{p}\,,\,2\right)$:

$$2px - (4 - q)y - 2q = 0$$

Los puntos de intersección entre la recta y la circunferencia, R y S, tienen coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente; sus proyecciones desde $(0, 2)$, están dadas por los puntos de corte de las rectas que pasan por los puntos (x_1, y_1) y $(0, 2)$ y (x_2, y_2) y $(0, 2)$ con el eje x, estos son, en términos de las coordenadas de R y S:

$$(r, 0) = \left(\frac{-\,2x_1}{y_1 - 2}\,, 0\right)$$
$$(s, 0) = \left(\frac{-\,2x_2}{y_2 - 2}\,, 0\right)$$

Para ver que r y s efectivamente son soluciones de la ecuación propuesta, los reemplazamos en la ecuación original:

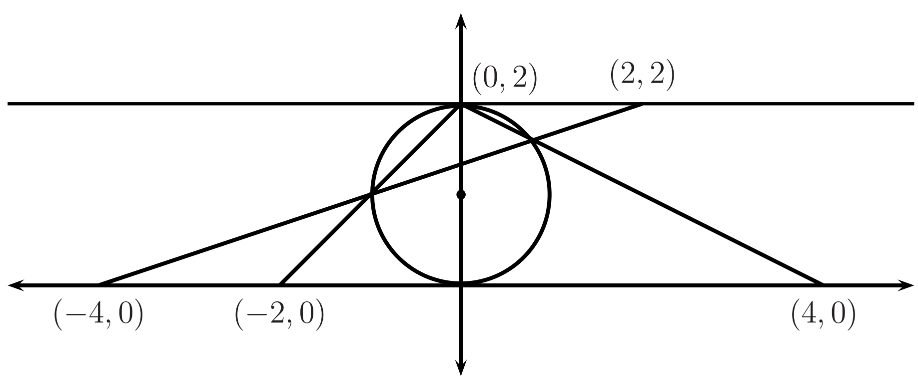
$$\left(\frac{-2x_1}{y_1-2}\right)^2 - p\left(\frac{-2x_1}{y_1-2}\right) + q = 0$$
$$\left(\frac{-2x_2}{y_2-2}\right)^2 - p\left(\frac{-2x_2}{y_2-2}\right) + q = 0$$

y haciendo las cuentas obtenemos una igualdad. Ilustremos el método con ejemplos.

1. Para resolver la ecuación

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

determinamos los puntos $\left(\frac{q}{p}, 0\right)$ y $\left(\frac{4}{p}, 2\right)$, que para nuestro caso son $(-4, 0)$ y $(2, 2)$ respectivamente. Hallamos las proyecciones, desde $(0, 2)$ sobre el eje x, de los puntos de corte entre la recta que pasa por los dos puntos ya determinados y la circunferencia de centro $(0, 1)$ y radio 1, los cuales son las soluciones de la ecuación dada: -2 y 4:

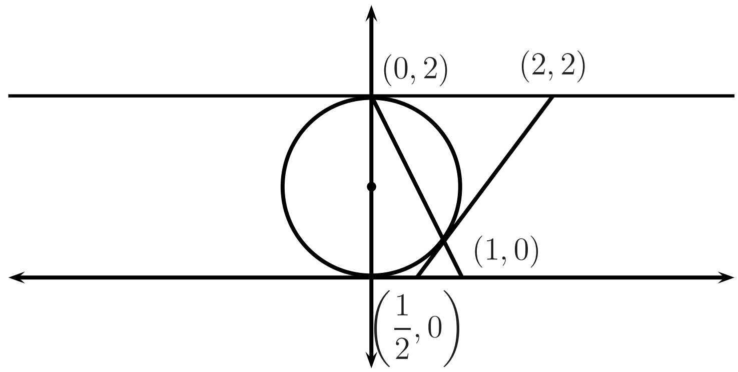


En este caso obtuvimos dos soluciones reales y diferentes.

2. En el caso de la ecuación

$$x^2 - 2x + 1 = 0\ :$$

se tiene que $\left(\frac{q}{p}\ 0\right) = \left(\frac{1}{2}\ 0\right)$ y $\left(\frac{4}{p}\ 2\right) = (2, 2)$ y obtenemos sólo un punto de intersección de la recta que pasa por estos dos puntos y la circunferencia; en consecuencia, hay una única solución que es 1.

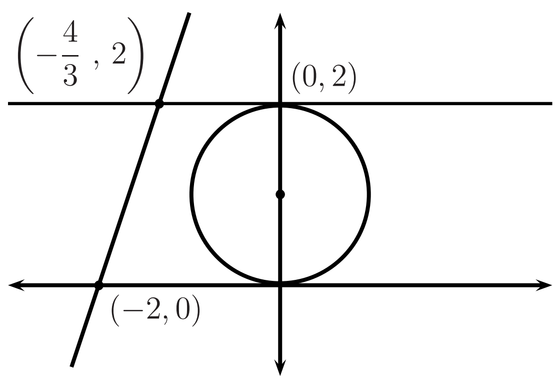


3. Por último, para la ecuación

$$x^2 + 3x + 6 = 0,$$

$$\left(\frac{q}{p}\ ,\ 0\right) = (-2, 0) \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{4}{p}\ ,\ 2\right) = \left(-\frac{4}{3}\ ,\ 2\right)$$

El segmento que une los puntos anteriores no corta la circunferencia y, por lo tanto, las soluciones de esta ecuación son complejas



2.6.3. El Método axiomático

2.6.3.1. La solución

Toda ecuación de segundo grado, también llamada *ecuación cuadrática*, puede ser escrita en la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{con} \qquad a \neq 0$$

donde x es la incógnita, en tanto que a, b y c son constantes y a es un número distinto de cero. Para resolver la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b, $c \in \mathrm{R}$ con $a \neq 0$, sumamos $(-c)$ a ambos lados de la ecuación y obtenemos

$$(ax^2 + bx + c) + (-c) = 0 + (-c)$$

Por los axiomas C2, C3, y C4

$$ax^2 + bx = (-c)$$

Si multiplicamos por $\dfrac{1}{a}$ a ambos lados de la ecuación para conseguir

$$\frac{1}{a}(ax^2 + bx) = \frac{1}{a}(-c)$$

y por los axiomas C9, C11 y la definición de división,

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Sumamos ahora $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ a ambos lados de la ecuación, con el propósito de formar un cuadrado perfecto,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

y por el axioma C11,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

reemplazando en la ecuación, y usando[16] el teorema 34, obtenemos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Por el teorema 38,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

[16] Si $\dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b}$ entonces $\dfrac{c}{d} \times \dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$.

Por el axioma C5 y el teorema 20,

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Sumando la expresión $\left(-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$ a ambos lados de la igualdad y por el axioma C4,

$$\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

por el axioma C11, en la forma

$$x^2 - y^2 = (x - y)\,(x + y)$$

y como $a^2 = b$ significa que $a = \sqrt{b}$, conseguimos que,

$$\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\,\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

Por el teoremas 34 y la definición de radicación

$$\sqrt{4a^2} = 2a$$

Y por el teorema 31 tenemos que:

$$x = \frac{-\,b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x = \frac{-\,b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

de donde concluimos, que la ecuación general de segundo grado tiene dos soluciones posibles, que llamaremos respectivamente x_1 y x_2.

Como la diferencia entre las dos raíces es solamente un signo antes del radical es usual resumir las dos soluciones en una sola fórmula escribiendo:

$$x = \frac{-\,b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Notemos que no siempre obtenemos números reales como soluciones, pues por el teorema 52, *el cuadrado de un número real siempre es positivo o cero*; es decir, que *no existen raíces cuadradas reales para los números negativos*; lo que significa, que obtenemos solución real para una ecuación cuadrática solo si la cantidad

$$b^2 - 4ac$$

llamada, *el discriminante de la ecuación*, es positivo; en cuyo caso, hay dos soluciones diferentes; o cuando el discriminante es 0, en cuyo caso, las dos soluciones se funden en una sola

$$x = -\frac{b}{2a}$$

y decimos que x es una *raíz doble* o *raíz con multiplicidad dos*[17] .

Cuando el discriminante es negativo, las dos soluciones son distintas y son números complejos conjugados[18].

Los axiomas de cuerpo, como hemos visto, son insuficientes para garantizar la existencia de soluciones para toda ecuación cuadrática, ello hizo necesario construir el cuerpo de los números complejos, en el cual tiene solución todas las ecuaciones cuadráticas.

De todas formas, *las ecuaciones de segundo grado tienen, a lo más, dos soluciones.*

Ejemplos

1. La ecuación

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

tiene por soluciones

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-5)}}{2(3)}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{6}$$
$$x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6}$$
$$x = \frac{2 \pm 8}{6}$$

lo que significa que las dos raíces son:

$$x_1 = \frac{2+8}{6} \quad , \quad x_2 = \frac{2-8}{6}$$

o mejor,

$$x_1 = \frac{5}{3} \quad \text{y} \quad x_2 = -1.$$

[17]Esta relación fue encontrada inicialmente por Isaac Newton.

[18]Si a es un número real positivo, $\sqrt{-a}$ se define como $i\sqrt{a}$ y si $z = x + iy$ es un número complejo su conjugado es $z^* = x - iy$.

2.7. Relaciones entre las raíces y los coeficientes de una ecuación de segundo grado

Entre las raíces de una ecuación de segundo grado y los coeficientes de sus términos, existen algunas relaciones interesantes; por ejemplo, como:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

y

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

si las sumamos, obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= -\frac{2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

y si las multiplicamos:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{b^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

En resumen,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Este resultado permite resolver el problema babilónico, de hallar dos números conocidos su suma y su producto, para ello construimos una ecuación de segundo grado, eligiendo por comodidad, $a = 1$. Por ejemplo si,

$$x_1 + x_2 = 14$$
$$x_1 \times x_2 = 8$$

la ecuación correspondiente es:

$$x^2 - 14x + 8 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{1}64}{2}$$

que podemos aproximar como

$$x_1 = \frac{14 + 12{,}8}{2} = 13{,}4$$
$$x_2 = \frac{14 - 12{,}8}{2} = 0{,}6$$

Ejercicios

1. *Encontrar el valor de k para el cual la suma de las soluciones de la siguiente ecuación es igual al doble de su producto.*

$$4x^2 + 5x + k = 0$$

2. *Cada una de las soluciones* $x^2 + x - 6$ *difiere del cuadrado de la otra en un mismo numero c. Sin resolver la ecuación dada, determinar el valor de c.*

3. *Encuentre todos los números que poseen la propiedad de que, al sumarse a si mismos, el resultado es igual que al multiplicarse por si mismos.*

2.8. Método para factorizar cualquier polinomio de segundo grado con coeficientes reales

Un polinomio de segundo grado, se puede factorizar de forma mecánica, es decir con *cero cerebro*!, de la siguiente forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación cuadrática.

Esto se debe a que:

$$\begin{aligned}
a(x-x_1)(x-x_2) &= (ax-ax_1)(x-x_2)\\
&= ax^2 - ax\,x_2 - ax\,x_1 + ax_1x_2\\
&= ax^2 - a(x_1+x_2)\,x + a\,x_1x_2\\
&= ax^2 - a\left(-\frac{b}{a}\right)x + a\left(\frac{c}{a}\right)\\
&= ax^2 + bx + c
\end{aligned}$$

Ejemplo

Para factorizar el polinomio

$$3x^2 - 5x + 2$$

resolvemos la ecuación

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 3 \cdot 4 \cdot 2}}{2 \cdot 3}$$

para hallar que $x_1 = 1$ y $x_2 = \dfrac{2}{3}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
3x^2 - 5x + 2 &= 3\,(x-1)\left(x - \frac{2}{3}\right)\\
&= (x-1)\,(3x-2)
\end{aligned}$$

¡Lo que uno diera por saber trucos como este en el bachillerato, para no tener que aprenderse 12 métodos de factorización!

2.9. Solución de ecuaciones cuadráticas por factorización

En algunos casos no es necesario recurrir a herramientas tan poderosas como las que hemos desarrollado, para resolver una ecuación cuadrática, si por ejemplo el polinomio es fácilmente factorizable, aplicamos de manera directa el teorema 31, que puede escribirse de manera equivalente como:

Si a y b son números reales, entonces

$$a \times b = 0 \qquad \text{si y sólo si} \qquad a = 0 \qquad \text{o} \qquad b = 0.$$

Ejemplos

1. La ecuación
$$x^2 + 2x - 15 = 0$$
es equivalente a
$$(x-3)(x+5) = 0$$
que a su vez es equivalente al par de ecuaciones:
$$x - 3 = 0 \qquad \text{o} \qquad x + 5 = 0$$
cuyas soluciones son,
$$x = 3 \qquad\qquad x = -5.$$

2. La ecuación
$$16x^2 = 2x + 5$$
es equivalente a
$$16x^2 - 2x - 5 = 0$$
y también a
$$(8x-5)(2x+1) = 0$$
cuyas soluciones son:
$$x = \frac{5}{8} \qquad \text{y} \qquad x = -\frac{1}{2}\,.$$

3. Ecuaciones de tercer grado

3.1. El método Babilónico

Los babilonios resolvieron problemas que conducen a raíces cúbicas; uno de estos problemas, equivale a resolver el sistema de ecuaciones:

$$12x = z, \quad y = x, \quad xyz = V$$

donde V es un volumen dado, lo que es equivalente a resolver la ecuación cúbica:

$$V = 12x^3$$

Para ello usaban tablas de cubos y raíces cúbicas.

Una ecuación de la forma
$$ax^3 + bx^2 = c$$

la resolvían de la siguiente forma: Usando tablas determinan

$$x^3 = a$$
$$x^3 + x^2$$

y multiplicando por $\frac{a^2}{b^3}$:

$$\left(\frac{ax}{b}\right)^3 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 = \frac{ca^2}{b^3}$$

la llevan a una forma estándar, luego mirando en las tablas, determinan el valor de x.

3.2. El método de Scipione del Ferro-Tartaglia-Cardano

Scipione del Ferro (1465-1526), un profesor de matemáticas de la universidad de Bolonia, fue el primero que resolvió algebraicamente la ecuación cúbica:

$$x^3 + px = q$$

no publicó su solución, pero, antes de morir, reveló el secreto de su descubrimiento a *Antonio Maria Fior*, uno de sus alumnos, no el más brillante.

El rumor del descubrimiento le llegó, a *Nicolo Tartaglia*, quien se dedicó a buscar por sus propios medios, una solución. Fior retó públicamente a Tartaglia a que resolviese treinta ecuaciones, propuestas por él, y Tartaglia lo logró; mientras que Fior, no logró resolver una sola de las propuestas por Tartaglia.

Otro matemático interesado en el problema, *Girolamo Cardano* (1501-1576), se enteró del triunfo de Tartaglia y lo invitó a su casa, prometiéndole presentarle a un bienhechor que resolvería sus problemas de dinero.

En marzo del año 1539, Tartaglia reveló su secreto a Cardano, quien se apropió y lo publicó en su libro *Ars magna*. Tartaglia protestó contra el plagio de Cardano, pero *Ludovico Ferrari* (1522-1565), alumno de Cardano, contestó acusando a Tartaglia de haber hecho lo mismo que Cardano, plagiando a Del Ferro.
Finalmente la fórmula para la resolución de las ecuaciones de tercer grado, han pasado a la historia como fórmula de Cardano-Tartaglia.

En 1545 Cardano publica el *Ars magna sive de regulis algebraicis*, donde estudia la ecuación cúbica, caso por caso, según que los términos de los distintos grados aparezcan en un mismo lado, o en los dos lados de la igualdad, ya que los coeficientes de las potencias son necesariamente positivos[19] .

Trata las ecuaciones numéricamente, pero piensa geométricamente y hace referencia a un tipo de compleción del cubo. Cardano utiliza muy poco el álgebra sincopada y, como los árabes, sus ecuaciones con coeficientes numéricos representan categorías generales. Así cuando escribe:

"Sea el cubo y seis veces el lado igual a 20"(o $x^3 + 6x = 2$)

consideraba esto como una ecuación de la forma

$$x^3 + px = q$$

En notación moderna su método de solución es el siguiente:

Reemplaza

$$x = u - v$$

y elije u y v de manera que

$$uv = \frac{p}{3}$$

y como

$$(u - v)^3 + 3uv\,(u - v) = u^3 - v^3$$

entonces

$$u^3 - v^3 = q$$

Por ejemplo en la ecuación:

$$x^3 + 6x = 20,$$

$$uv = 2$$

$$3uv = 6$$

$$(u - v)^3 + 6(u - v) = 20$$

de donde

$$u^3 - v^3 = 20,$$

Eliminando v, resulta

$$u^6 = 20u^3 + 8$$

[19]Cardano no aceptó ni coeficientes, ni soluciones complejas para las ecuaciones, por ejemplo al plantearse el problema de dividir 10 en dos partes cuyo producto fuese 40, encontró $5+\sqrt{-15}$ y $5 - \sqrt{-15}$ y las calificó de *sofisticadas*, tan sutiles como inútiles.

que es una ecuación cuadrática en u^3 cuya solución positiva es

$$u^3 = \sqrt{108} + 10$$

o sea

$$u = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}$$

y como

$$u^3 - v^3 = 20,$$

se tiene que

$$v = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}}$$

y por tanto

$$x = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}.$$

Cardano ofrece una formulación verbal de la regla equivalente a la solución moderna de la ecuación

$$x^3 - px = q$$

que corresponde a la fórmula:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

3.3. El método de Vietá

Para resolver la ecuación

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Vietá reemplaza

$$x = y - \frac{b}{3}.$$

esto lo lleva a una ecuación de la forma

$$y^3 + py + q = 0$$

en ella reemplaza

$$y = z - \frac{p}{3z}$$

y obtiene

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$$

que es una ecuación cuadrática en z^3

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0$$

y de ella obtiene dos valores, pero sólo empleaba la raíz cúbica positiva de z^3.

3.4. Solución moderna

Toda ecuación de tercer grado, puede escribirse en la forma:

$$ex^3 + fx^2 + gx + h = 0 \qquad \text{con} \qquad e \neq 0$$

donde x es una incógnita, $e, f, g,$ y h son constantes y e es un número distinto de cero.

Para resolver esta ecuación, multiplicamos ambos lados de ella por $\dfrac{1}{e}$ y obtenemos:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

donde $a = \dfrac{f}{e}$, $b = \dfrac{g}{e}$ y $c = \dfrac{h}{e}$.

Para eliminar el término con x^2, cambiamos la incógnita x por otra incógnita y de manera que:

$$x = y - \frac{a}{3}$$

reemplazamos en la ecuación y obtenemos:

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

hacemos las operaciones,

$$\left[y^3 - 3y^2\left(\frac{a}{3}\right) + 3y\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3\right] + a\left[y^2 - 2y\left(\frac{a}{3}\right) + \left(\frac{a}{3}\right)^2\right] + by - \frac{ba}{3} + c = 0$$

simplificamos,

$$\left[y^3 - y^2a + \frac{ya^2}{3} - \frac{a^3}{27}\right] + a\left[y^2 - \frac{2ay}{3} + \frac{a^2}{9}\right] + \left[by - \frac{ba}{3}\right] + c = 0$$

multiplicamos,

$$y^3 - y^2a + y\frac{a^2}{3} - \frac{a^3}{27} + ay^2 - \frac{2a^2y}{3} + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ba}{3} + c = 0$$

reducimos,

$$y^3 + \frac{ya^2}{3} - \frac{a^3}{27} - \frac{2a^2y}{3} + \frac{a^3}{9} + by - \frac{ba}{3} + c = 0$$

reagrupamos,

$$y^3 + \left(\frac{a^2}{3} - \frac{2a^2}{3} + b\right)y - \frac{a^3}{27} + \frac{a^3}{9} - \frac{ab}{3} + c = 0$$

simplificamos,

$$y^3 + \underbrace{\left(b - \frac{a^2}{3}\right)}_{p}y + \underbrace{\left(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c\right)}_{q} = 0$$

y bautizamos, las expresiones entre paréntesis con nuevos nombres, para obtener la ecuación:

$$y^3 + py + q = 0$$

que es equivalente a la ecuación que pretendemos resolver si hacemos:

$$p = b - \frac{a^2}{3}$$
$$q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$$

No, aún no hemos terminado!, vamos a medio camino, hasta ahora hemos eliminado un término de la ecuación original.
El siguiente paso consiste en cambiar una ecuación de tercer grado con una incógnita, en dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas, para ello cambiemos

$$y = u + v$$

Reemplazando en la ecuación, obtenemos

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

operando,

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0$$

factorizando,

$$u^3 + 3uv(u+v) + v^3 + p(u+v) + q = 0$$

reagrupando,

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) + q = 0$$

y el punto culminante, la idea!, si la suma debe ser 0, eso se puede lograr repartiendo el cero en dos pedazos!

$$u^3 + v^3 + q = 0 \qquad \text{y} \qquad (3uv + p)(u+v) = 0$$

grandioso!, ya nuestro problema se reduce a resolver dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas,

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ 3uv + p &= 0 \end{aligned}$$

puesto que si este factor es 0, la segunda ecuación a resolver, se cumple. Debemos dar otra cara a la última ecuación para que resulte algo conocido, si la escribimos como:

$$uv = -\frac{p}{3}$$

y elevamos al cubo en ambos lados, obtenemos

$$u^3v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3$$

poniéndolas juntas,

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 &= -q \\ u^3v^3 &= \left(-\frac{p}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

vemos que, debemos encontrar dos números: $z_1 = u^3$ y $z_2 = v^3$ de manera que su suma sea $-q$ y su producto sea $\left(-\frac{p}{3}\right)^3$, lo que nos conduce a una ecuación de segundo grado:

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$z_1 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2}$$
$$z_2 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}}{2}$$

que podemos escribir, de forma más simétrica, introduciendo el 2 del denominador en la raíz,

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$
$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

o sea que[20],

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$
$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

y por lo tanto, como $y = u + v$, obtenemos que:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

[20]Este paso debe hacerse con cuidado, como lo señaló Leonhard Euler en 1732; siempre que calculamos la raíz cúbica de un número real, hay tres raíces; por ejemplo, la ecuación $x^3 - 1 = 0$ tiene la raíz real $x = 1$ y w_1 y w_2 , las dos raíces complejas de $x^2 + x + 1 = 0$; en general, las raíces cúbicas u^3 son:

$$u,\ u \times w_1 \quad \text{y} \quad u \times w_2 \quad \text{y las de} \quad v^3 \quad \text{son:} \quad v,\ v \times w_1 \quad \text{y} \quad v \times w_2$$

lo que nos da, 9 maneras de combinar las soluciones de u y de v, con la condición adicional:

$$uv = -\frac{p}{3}$$

combinando las soluciones de la ecuación cúbica, de manera que se cumpla la condición:

$$uv = -\frac{p}{3}$$

obtenemos que:

$$\begin{aligned} y_1 &= u + v \\ y_2 &= (u \times w_1) + (v \times w_2) \\ y_3 &= (u \times w_2) + (v \times w_1) \end{aligned}$$

con estos valores para y encontramos tres valores para x con la ayuda de:

$$x = y - \frac{a}{3}$$

hemos hallado tres soluciones a la ecuación cúbica propuesta[21].

Ejemplo

Para resolver la ecuación:

$$2x^3 - 4x^2 - 10x + 12 = 0$$

Dividimos entre 2,

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

por comparación, establecemos que:

$$\begin{aligned} a &= -2 \\ b &= -5 \\ c &= 6 \end{aligned}$$

[21]En 1572, Rafael Bombelli (1526-1573) publicó un *Álgebra* donde la resolución de la ecuación cúbica incluye a los números complejos; por ejemplo una solución de la ecuación cúbica: $x^3 = 15x + 4$ es $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ y una solución real positiva es $x = 4$. Cardano ya había notado que cuando todos los términos de un miembro de la igualdad son de una potencia mayor que los términos del otro miembro, la ecuación tiene entonces una sola raíz positiva. Bombelli pensó que los radicandos eran números *complejos conjugados*, cuya suma es el número real 4, de manera que su *parte real* debe ser 2; y si un número de la forma $2 - a\sqrt{-1}$ es la raíz cúbica de

$$2 - \sqrt{-121} = 2 - 11\sqrt{-1}$$

a debe ser igual a 1.

$$\left((2 - \sqrt[3]{-1}\right)^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

De aquí, que las tres raíces de la ecuación son:

$$(2 + 1\sqrt{-1}), \quad (2 - 1\sqrt{-1}) \quad \text{y} \quad 4.$$

con estos valores calculamos:

$$p = -\frac{a^2}{3}$$

y

$$q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$$

obteniendo,

$$p = (-5) - \frac{(-2)^2}{3} = (-5) - \frac{4}{3} = -\frac{19}{3}$$

y

$$q = \frac{2(-2)^3}{27} - \frac{(-5)(-2)}{3} + 6 = -\frac{16}{27} - \frac{10}{3} + 6 = -\frac{268}{27}$$

reemplazamos estos valores en:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

y obtenemos:

$$y = \sqrt[3]{-\left[\frac{\left(-\frac{268}{27}\right)}{2}\right] + \sqrt{\left[\frac{\left(-\frac{268}{27}\right)}{2}\right]^2 + \left[\frac{\left(-\frac{19}{3}\right)}{3}\right]^3}} +$$

$$\sqrt[3]{-\left[\frac{\left(-\frac{268}{27}\right)}{2}\right] - \sqrt{\left[\frac{\left(-\frac{268}{27}\right)}{2}\right]^2 + \left[\frac{\left(-\frac{19}{3}\right)}{3}\right]^3}}$$

simplificando,

$$y = \sqrt[3]{\frac{268}{54} + \sqrt{\left(-\frac{268}{54}\right)^2 + \left(-\frac{19}{9}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{268}{54} - \sqrt{\left(-\frac{268}{54}\right)^2 + \left(-\frac{19}{9}\right)^3}}$$

operando,

$$y = \sqrt[3]{\frac{134}{27} + \sqrt{\frac{17956}{729} - \frac{6859}{729}}} + \sqrt[3]{\frac{134}{27} - \sqrt{\frac{17956}{729} - \frac{6859}{729}}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{134}{27} + \sqrt{\frac{11097}{729}}} + \sqrt[3]{\frac{134}{27} - \sqrt{\frac{11097}{729}}}$$

Podemos aproximar la solución

$$y = \sqrt[3]{\frac{134}{27} + 3,9016} + \sqrt[3]{\frac{134}{27} - 3,9016}$$

$$y = \sqrt[3]{8,86456296} + \sqrt[3]{1,06126296330}$$

$$y_1 = 2,069597 + 1,0200496$$

hasta que finalmente,

$$y_1 = 3,0896466$$

y por lo tanto,

$$x_1 = y_1 - \frac{a}{3}$$

y aproximando de nuevo a dos decimales

$$x_1 = 3,09 - \frac{(-2)}{3}$$

obtenemos

$$x_1 = 3,76$$

Las otras dos raíces las obtenemos mediante

$$y_2 = 2,069597w_1 + 1,0200496w_2$$

$$y_3 = 2,069597w_2 + 1,0200496w_1$$

donde

$$w_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \qquad \text{y} \qquad w_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

son las dos raíces complejas de $x^2 + x + 1 = 0$.

Ejercicio

Una solución x_1 de la ecuación cúbica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

se obtiene a partir de la solución que conseguimos con la fórmula de Cardano-Tartaglia; las otras dos soluciones podríamos conseguirlas factorizando el polinomio de tercer grado del lado izquierdo de la ecuación, en la forma:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - x1)(\mathrm{Pol}_2(x))$$

donde $\mathrm{Pol}_2(x)$ es un polinomio de segundo grado en x; esto daría lugar a que las otras dos soluciones se puedan conseguir con las soluciones de la ecuación cuadrática:

$$\mathrm{Pol}_2(x) = 0$$

Para conseguir $\mathrm{Pol}_2(x)$, bastaría efectuar la división:

$$\mathrm{Pol}_2(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x - x_1}$$

¿Son correctos nuestros razonamientos? En caso de serlos, ¿conducen a las mismas soluciones?

3.5. Propiedades de las raíces de la ecuación cúbica

Como

$$x^3 - 1 = (x - 1)\left(x^2 + x + 1\right)$$

la ecuación $x^3 - 1 = 0$ tiene la raíz real $x = 1$ y w_1 y w_2 , las dos raíces complejas de

$$x^2 + x + 1 = 0$$

que son

$$w_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \qquad \text{y} \qquad w_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

esto significa que:

$$w_1^3 = 1 \qquad \text{y} \qquad w_1^2 + w_1 + 1 = 0$$

y lo mismo para

$$w_2^3 = 1 \qquad \text{y} \qquad w_2^2 + w_2 + 1 = 0$$

pero además

$$w_1^2 = \frac{1}{w_1} = \frac{w_2}{w_1 w_2}$$

y como

$$w_1 w_2 = 1$$

por ser raíces de la ecuación cuadrática, entonces

$$w_1^2 = w_2$$

Además

$$(1 - w_1)(1 - w_2) = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2$$

y

$$w_1 - w_2 = \sqrt{3}i$$

Con lo anterior, podemos expresar todo en términos de una sola raíz, digamos w_1 a la que llamaremos simplemente w.

Las tres raíces de la ecuación cúbica

$$y^3 + py + q = 0$$

son

$$\begin{gathered} y_1 = u + v \\ y_2 = (u \times w) + (v \times w^2) \\ y_3 = (u \times w^2) + (v \times w) \end{gathered}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= (u + v) + (u \times w) + (v \times w^2) + (u \times w^2) + (v \times w) \\ &= (u + v) + (u + v)w + (u + v)w^2 \\ &= (u + v)(1 + w + w^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

esto significa que la suma de las raíces de la ecuación:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

dadas por

$$\begin{gathered} x_1 = y_1 - \frac{a}{3} \\ x_2 = y_2 - \frac{a}{3} \\ x_3 = y_3 - \frac{a}{3} \end{gathered}$$

es

$$x_1 + x_2 + x_3 = a$$

Podemos ampliar nuestro conocimiento de las relaciones que existen entre las raíces y los coeficientes de la ecuación cúbica de manera similar a como lo hicimos en el caso de las ecuaciones de segundo grado; si suponemos que el polinomio

$$x^3 + ax^2 + bx + c$$

se puede factorizar como

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (xx_1)\,(xx_2)\,(xx_3)$$

efectuamos las multiplicaciones en el lado derecho de la ecuación y obtenemos:

$$(xx_1)\,(xx_2)\,(xx_3) = x^3(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x + x_1x_2x_3$$

lo que significa que

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b \\ x_1x_2x_3 = c \end{gathered}$$

Aún más, como en el caso de las ecuaciones de segundo grado, podemos determinar el carácter real o complejo de las soluciones de la ecuación cúbica,

$$y^3 + py + q = 0$$

estudiando su *discriminante*, éste se define como:

$$\mathrm{D} = (y_1 - y_2)^2(y_1 - y_3)^2(y_2 - y_3)^2$$

Para calcularlo, como es habitual, hagámoslo por partes:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= (u + v) - (wu + w^2v) \\ &= (1 - w)u + w^3v - w^2v \\ &= (1 - w)u(1 - w)w^2v \\ &= (1 - w)(u - w^2v) \end{aligned}$$

análogamente obtenemos que

$$y_1 - y_3 = (1 - w^2)(u - wv)$$

y

$$y_2 - y_3 = (w - w^2)(u - v)$$

Ahora, notemos que

$$(1 - w)(1 - w^2) = 3$$

y
$$w{-}w^2 = \sqrt{3}i$$
además, como
$$(x-1)(x-w)(x-w^2) = x^3 - 1$$
porque w y w^2 son las raíces cúbicas de la unidad, y $x = \dfrac{u}{v}$ también es una raíz cúbica de la unidad, entonces
$$\left(\frac{u}{v} - 1\right)\left(\frac{u}{v} - w\right)\left(\frac{u}{v} - w^2\right) = \left(\frac{u}{v}\right)^3 - 1$$
lo que es equivalente a:
$$(u-v)\,(u-vw)\,(u-vw^2) = u^3 - v^3$$
o sea que:
$$(u-v)\,(u-vw)\,(u-vw^2) = 2\left(\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)$$
Y ya tenemos las herramientas para calcular el discriminante
$$\begin{aligned}
\mathrm{D} &= (y_1 - y_2)2(y_1 - y_3)^2(y_2 - y_3)^2 \\
&= [(1-w)(u-w^2v)\,(1-w^2)(u-wv)(w-w^2)(u-v)]^2 \\
&= [(1-w)(1-w^2)(w-w^2)(u-v)(u-wv)(u-w^2v)]^2 \\
&= \left[3\sqrt{3}i\,2\left(\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)\right]^2 \\
&= -108\left(\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right) \\
\mathrm{D} &= -(27q^2 - 4p^3).
\end{aligned}$$
Veamos ahora que el discriminante de la ecuación:
$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$
es el mismo que el de la ecuación asociada
$$y^3 + py + q = 0$$
puesto que las raíces de la primera están relacionadas con las de la segunda, de la forma:

$$x_1 - y_1 - \frac{a}{3}$$
$$x_2 - y_2 - \frac{a}{3}$$
$$x_3 - y_3 - \frac{a}{3}$$

pero

$$x_1 - x_2 = y_1 - y_2,$$
$$x_1 - x_3 = y_1 - y_3,$$
$$x_2 - x_3 = y_2 - y_3.$$

Y por lo tanto el discriminante de la ecuación

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

es el mismo

$$\mathrm{D} = -(27q^2 - 4p^3).$$

Y en términos de a, b y c:

$$\mathrm{D} = 18abc - 4a^3c + a^2b^2 - 4b^3 - 27c^2.$$

Si la ecuación cúbica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

tiene coeficientes reales, su ecuación asociada

$$y^3 + py + q = 0$$

también tiene coeficientes reales y como es de grado impar, entonces tiene al menos una raíz real.

Por lo tanto, existen tres posibilidades para sus raíces:

1. Tiene tres raíces reales diferentes.
2. Tiene tres raíces reales y por lo menos dos de ellas iguales.
3. Tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas.

En el primer caso, el discriminante D es positivo, en el segundo caso D= 0 y en el tercer caso, el discriminante D es negativo, pues si

$$x_1 = \alpha + \beta_i \quad \text{y} \quad x_2 = \alpha - \beta_i$$

son las dos raíces complejas conjugadas, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{D} =&(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 \\
=&[2\beta_i]^2[(\alpha - x_3) + \beta_i]^2[\alpha - x_3) - \beta_i]^2 \\
=& - 4\beta^2[(\alpha - x_3)^2 + \beta^2]^2 < 0.
\end{aligned}$$

También se tiene la implicación recíproca. En suma tenemos que una ecuación cúbica con coeficientes reales

1. Tiene sus tres raíces reales diferentes, si y solo si, su discriminante es positivo.

2. Tiene sus tres raíces reales y al menos dos iguales, si y solo si, su discriminante es cero.

3. Tiene una raíz real y dos complejas conjugadas, si y solo si, su determinante es negativo.

Ejercicios

1. Halle las raíces de la ecuación

$$x^3 + 3x^2 - x + 6 = 0$$

2. Comparar la forma del como se halló el método descrito en esta sección para hallar las raíces cúbicas de una ecuación de tercer grado con el método expuesto en el texto 'Calculus' de Spivak, (Págs. 642, 643, 644, 645, 646). Establecer diferencias y similitudes.

4. Ecuaciones de cuarto grado

4.1. Método Babilónico

En Babilonia se formularon algunos problemas que conducen a ecuaciones de grado cuatro, que pueden resolverse como ecuaciones cuadráticas donde la incógnita es un cuadrado, conocidas como *ecuaciones bicuadradas*; como de costumbre, los problemas aparecen formulados y resueltos de forma verbal, sin utilizar símbolos.

Muchos de los problemas algebraicos surgieron de situaciones geométricas y por lo tanto en ellos aparecen las palabras *us* (longitud), *sag* (anchura) y *asă* (área) para representar las incógnitas.

Un ejemplo de estos problemas es:

> "*He multiplicado la longitud por la anchura y el área es 10. He multiplicado la longitud por ella misma y he obtenido un área. El exceso de la longitud sobre la anchura lo he multiplicado por sí mismo y el resultado por 9. Y esta área obtenida multiplicando la longitud por ella misma. ¿Cuáles son la longitud y la anchura?* "[22] .

el problema se traduce en el sistema de ecuaciones:

$$xy = 10$$

$$9(x-y)^2 = x^2$$

Este sistema es equivalente a la ecuación de cuarto grado en x,

$$2x^4 + 225 = 45x^2$$

que es una ecuación cuadrática en x^2, y así la resolvieron los antiguos babilonios.

4.2. El método de Ferrari

La solución de la ecuación de cuarto grado fue casi simultáneo con la de tercer grado; el método se debe a *Ludovico Ferrari*, y fue publicado en el *Ars Magna* de Cardano, donde se presenta resolviendo muchos casos especiales, con coeficientes numéricos; se da una prueba geométrica de los pasos algebraicos básicos, y luego la regla de solución en palabras[23] .

La presentación de numerosos ejemplos por parte de Cardano, Tartaglia y Ferrari muestra que buscaron y encontraron métodos generales que funcionaban para todos los casos, la búsqueda de generalidad es una característica nueva, que aparece con la introducción de los coeficientes literales por parte de Vietá.

[22]KLINE, M., *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días I*, Alianza Editorial, 1972, p. 27.

[23]No por las limitaciones propias de la época debemos menospreciar el valor de la obra *Ars magna* de Cardano, ella fue un gran estímulo para las investigaciones algebraicas; además de las soluciones a las ecuaciones de tercero y cuarto grado, llevó a los matemáticos a considerar nuevos números: los negativos y los complejos.

Vietá, observó además que los métodos de resolución de las ecuaciones de segundo, tercer y cuarto grados, eran diferentes y buscó un método que fuese válido para las ecuaciones de cualquier grado. Su primera idea, como ya vimos, fue eliminar un término de grado inmediatamente inferior, al máximo mediante una sustitución. Tartaglia había hecho esto para la ecuación cúbica, pero no lo intentó para todas las ecuaciones.

Veamos un ejemplo de Cardano: para resolver la ecuación:

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$$

1. Completa el cuadrado en el lado izquierdo de la ecuación
$$x^4 + 12x^2 + 36 = (x^2 + 6)^2$$
2. Suma en cada lado de la igualdad términos que incluyen *una nueva incógnita* de manera que el término de la izquierda continúa siendo un cuadrado perfecto
$$\begin{aligned}(x^2 + 6 + y)^2 &= 60x + 6x^2 + y^2 + 12y + 2yx^2\\ &= (6 + 2y)x^2 + 60x + y^2 + 12y\end{aligned}$$
con lo que obtiene un trinomio en x.
3. Elige y de forma que el trinomio en x del lado derecho de la igualdad sea un cuadrado perfecto; para ello, iguala a cero el discriminante, de la ecuación cuadrática
$$(6 + 2y)x^2 + 60x + y^2 + 12y = 0$$
o sea
$$60^2 4(6 + 2y)(y^2 + 12y) = 0$$
esta es equivalente a la ecuación cúbica:
$$y^3 + 15y^2 + 36y = 450$$
cuya solución es, conocida por Cardano,
$$y = \sqrt[3]{\sqrt{80499\frac{1}{4}} + 287\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{-\sqrt{80499\frac{1}{4}} + 287\frac{1}{2}} - 5$$
4. Sustituye y en la ecuación para x:
$$(x^2 + 6 + y)^2 = (6 + 2y)x^2 + y^2 + 12y$$
y toma la raíz cuadrada en cada lado de la igualdad.
5. Resuelve la ecuación de segundo grado que resulta al extraer la raíz cuadrada.

4.3. La solución moderna

Una ecuación general de cuarto grado tiene la forma:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

El primer paso consiste en eliminar el término

$$ax^3$$

de la misma manera que hicimos en las ecuaciones cúbicas, sustituimos:

$$x = y - \frac{a}{4}$$

en la ecuación original:

$$\left(y - \frac{a}{4}\right)^4 + a\left(y - \frac{a}{4}\right)^3 + b\left(y - \frac{a}{4}\right)^2 + c\left(y - \frac{a}{4}\right) + d$$

operamos

$$\begin{aligned}
&\left[y^4 - 4y^3\left(\frac{a}{4}\right) + 6y^2\left(\frac{a}{4}\right)^2 - 4y\left(\frac{a}{4}\right)^3 + \left(\frac{a}{4}\right)^4\right] + \left[a\left(y^3 - 3y^2\left(\frac{a}{4}\right) + 3y\left(\frac{a}{4}\right)^2\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \left(\frac{a}{4}\right)^3\right)\right] + \left[b\left(y^2 - \frac{2ya}{4} + \frac{a^2}{16}\right)\right] + \left[cy - \frac{ca}{4}\right] + d = 0 \\
&y^4 - \frac{4y^3a}{4} + \frac{6y^2a^2}{16} - \frac{4ya^3}{64} + \frac{a^4}{256} + ay^3 - \frac{3y^2a^2}{4} + \frac{3ya^3}{16} - \frac{a^4}{64} + by^2 - \frac{2yab}{4} \\
&\qquad + \frac{a^2b}{16} + cy - \frac{ca}{4} + d = 0 \\
&y^4 - y^3a + \frac{3y^2a^2}{8} - \frac{ya^3}{16} + \frac{a^4}{256} + ay^3 - \frac{3y^2a^2}{4} + \frac{3ya^3}{16} - \frac{a^4}{64} + by^2 - \frac{yba}{2} + \frac{a^2b}{16} \\
&\qquad + cy - \frac{ca}{4} + d = 0 \\
&y^4 - \frac{3y^2a^2}{8} + \frac{2ya^3}{16} - \frac{3a^4}{256} + by^2 - \frac{bya}{2} + \frac{ba^2}{16} + cy - \frac{ac}{4} + d = 0
\end{aligned}$$

agrupamos y cambiamos los nombres

$$y^4 + \left(-\frac{3a^2y^2}{8} + by^2\right) + \left(\frac{2a^3y}{16} - \frac{aby}{2} + cy\right) + \left(-\frac{3a^4}{256} + \frac{ba^2}{16} - \frac{ca}{4} + d\right) = 0$$

$$y^4 + y^2\left(-\frac{3a^2}{8} + b\right) + y\left(\frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c\right) + \left(-\frac{3a^4}{256} + \frac{ba^2}{16} - \frac{ca}{4} + d\right) = 0$$

para obtener

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

donde

$$p = -\frac{3a^2}{8} + b$$

$$q = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c$$

$$r = -\frac{3a^4}{256} + \frac{ba^2}{16} - \frac{ca}{4} + d$$

De nuevo, como en la cúbica cambiamos una ecuación de cuarto grado en una incógnita por tres ecuaciones simultáneas con tres incógnitas, haciendo

$$y = u + v + w$$

y calculamos

$$y^2 = (u + v + w)^2$$

$$y^2 - (u + v + w)^2 = 0$$

$$y^2 - (u^2 + v^2 + w^2 + 2uv + 2uw + 2wv) = 0$$

$$y^2 - (u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + wv)) = 0$$

$$y^2 - u^2 - v^2 - w^2 - 2(uv + uw + wv)) = 0$$

$$y^2 - (u^2 + v^2 + w^2) - 2(uv + uw + wv)) = 0$$

Nuevamente elevamos al cuadrado:

$$[y^2 - (u^2 + v^2 + w^2)]^2 = [2(uv + uw + wv)]^2$$

$$y^4 - 2y^2(u^2 + v^2 + w^2) + (u^2 + v^2 + w^2)^2 = [2uv + 2uw + 2wv]^2$$

$$y^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)y^2 + (u^2 + v^2 + w^2)^2 = 4(u^2v^2 + u^2w^2 + w^2v^2) + 8uvw(u + v + w)$$

y esto es lo mismo que

$$y^4 - 2(u^2 + v^2 + w^2)y^2 - 8uvw(u + v + w) - 4(u^2v^2 + u^2w^2 + w^2v^2) + (u^2 + v^2 + w^2)^2 = 0$$

Como

$$y = u + v + w$$

y

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

entonces

$$y^4 - 2(u^2+v^2+w^2)y^2 - 8uvwy - 4(u^2v^2+u^2w^2+w^2v^2) + (u^2+v^2+w^2)^2 = 0$$

las dos ecuaciones son equivalentes si

$$\begin{aligned} -2(u^2+v^2+w^2) &= p && \text{(a)}\\ -8uvw &= q && \text{(b)}\\ (u^2+v^2+w^2)^2 - 4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2) &= r && \text{(c)} \end{aligned}$$

Para resolver este sistema, le modificamos la cara a la ecuación (b), en la forma:

$$u^2v^2w^2 = \left(\frac{-q}{8}\right)^2$$

Sustituyendo (a) en (c), obtenemos:

$$\frac{p^2}{4} - 4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2) = r$$

y después de unas breves cuentas, obtenemos

$$(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2) = \frac{p^2-4r}{16}$$

En resumen tenemos que:

$$u^2+v^2+w^2 = -\frac{p}{2}$$
$$u^2v^2w^2 = \left(\frac{-q}{8}\right)^2$$
$$(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2) = \frac{p^2-4r}{16}$$

esto puede interpretarse, diciendo que $z_1 = u^2$, $z_2 = v^2$ y $z_3 = w^2$ son las raíces de la ecuación cúbica:

$$z^3 + \frac{p}{2}z^2 + + \frac{p^2-4r}{16}z - + \frac{q^2}{64} = 0$$

lo que nos lleva al caso anterior que, en teoría, ya sabemos resolver.

Por fortuna tenemos maneras para resolver ecuaciones de tercero y cuarto grado sin utilizar estos métodos engorrosos, que hemos presentado, por su ingenio y originalidad; es la salida natural de usar una computadora con programas como Derive, Matemática, Maple, etc.

Otra alternativa es visitar la página

http://www.c-sw.com/symcalc.shtml

donde hay una herramienta que permite resolver ecuaciones, sin procesos, ni complicaciones.

5. Ecuaciones de quinto grado

Un estudiante aventajado habrá notado la similitud en los métodos para resolver las ecuaciones cúbicas y las cuárticas y no dudará en lanzar la idea de resolver la ecuación general de quinto grado

$$x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

eliminando el término ax^4, sustituyendo:

$$x = y - \frac{a}{5}$$

para luego reemplazar y por una suma de cuatro incógnitas:

$$y = u + v + w + t$$

con la idea de cambiar una ecuación de grado 5 por un sistema de ecuaciones de grado inferior que conduzcan a una ecuación de grado 4 que ya sabemos resolver.

El programa parece sensato, eventualmente aparatoso por el tamaño de las ecuaciones, pero en el fondo elemental.

Así pensaron muchos de los más célebres matemáticos durante muchos años[24], pero el resultado no se dio, apareció una dura roca muy difícil de mover que

[24]Por ejemplo James Gregory que había proporcionado métodos propios de resolución de la ecuación de tercer y cuarto grados, trató de emplearlos en la solución de la de quinto y fracasó. En posteriores trabajos sobre integración, Gregory dio por sentado que no era posible resolver algebraicamente la ecuación general de grado n para n mayor que cuatro. Walter von Tschirnhausen (1651-1708) probó transformaciones de la forma

$$x = t - \frac{a_1}{na_0}$$

impidió el camino. En 1824, a sus 19 añitos! el joven matemático noruego Niels Henrik Abel demostró[25] la imposibilidad de resolver la ecuación general de quinto grado mediante un número finito de operaciones algebraicas.

Otro muchachito de 20 años, esta vez francés, llamado Evariste Galois dedujo las condiciones en las que una ecuación es resoluble por radicales[26]. Este resultado aunque fue hecho en 1830 sólo fue publicado por Liouville en 1846.

Galois desarrolló la teoría de grupos para estudiar métodos generales de resolución de ecuaciones, basados únicamente en las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces, aplicables a cualquier ecuación de grado n; demostró, en particular, que no existe ningún método general para resolver ecuaciones de grado mayor o igual que 5.

A pesar de tan desalentadores resultados, hay algunas ecuaciones de grado quinto y superior que se pueden resolver, por ejemplo

$$x^6 = 64$$

tiene la solución $x = 2$.

El método mas frecuente de resolver ecuaciones de grado superior a 2 es descomponer la ecuación en factores (dividiendo la ecuación por los posibles divisores), con lo que, con algo de suerte, la ecuación se reduce a un producto de otras ecuaciones de grado menor[27] que ya podemos resolver por las fórmulas anteriores.

Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$x^5 6x^4 + 6x^3 5x^2 + 2x - 10 = 0$$

encontramos los factores del término independiente[28] :

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$$

luego de ensayar con varios valores encontramos que 5, es una raíz, puesto que:

aplicables a cualquier ecuación de grado n : $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n = 0$, para convertirlo en otro, en el que ha desaparecido el término en $x^n 1$; pero en ecuaciones de grado mayor que cuatro no fructificaron.

[25]En 1799 Paolo Ruffini había demostrado un resultado similar pero no recibió reconocimiento.

[26]Una ecuación irreducible de grado primo es resoluble por radicales si y sólo si sus raíces son funciones racionales de dos cualesquiera de ellas.

[27]Este método fue ideado por Descartes.

[28]En LUQUE, C., MORA, L., TORRES, J., *Una construcción de los números reales positivos,* Universidad Pedagógica Nacional, 2004, p. 63. mostramos que una raíz de una ecuación de grado n, divide a su término independiente.

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrr|c}
x^5 & - & 6x^4 & + & 6x^3 & - & 5x^2 & + & 2x & - & 10 & x-5 \\ \cline{12-12}
-x^5 & + & 5x^4 & & & & & & & & & x^4 - x^3 + x^2 + 2 \\
 & & x^4 & + & 6x^3 & & & & & & & \\
 & & -x^4 & - & 5x^3 & & & & & & & \\
 & & & & x^3 & - & 5x^2 & & & & & \\
 & & & & -x^3 & + & 5x^2 & & & & & \\
 & & & & & & 0 & + & 2x & - & 10 & \\
 & & & & & & & - & 2x & + & 10 & \\
 & & & & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Esto significa que:

$$x^5 - 6x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = (x-5)(x^4 - x^3 + x^2 + 2)$$

En el procedimiento de la división pueden omitirse varios datos innecesarios y llegar a otro proceso que es conocido como *división sintética* y que podemos resumir en:

- Si el coeficiente de x^n es diferente de 1, dividimos toda la ecuación por él, para hacerlo igual a 1.
- Omitimos las potencias de x y colocamos solamente los coeficientes del polinomio en el dividendo.
- Omitimos la x en el divisor y sólo colocamos el número elegido.
- Para obtener el coeficiente de un término cualquiera del cociente, se multiplica el coeficiente del término anterior por el divisor, y sumando este producto con el coeficiente del término que ocupa el mismo lugar en el dividendo.
- El cociente es un polinomio con los coeficientes encontrados, cuyo grado es uno menos que el polinomio original.
- El último coeficiente del cociente es el residuo.

En nuestro caso

$$
\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & -6 & 6 & -5 & 2 & -10 & 5 \\
 & 5 & -5 & 5 & 0 & 10 & \\ \hline
1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 &
\end{array}
$$

6. Número de raíces de una ecuación de grado n.

Hemos mencionado que una ecuación de grado 1, tiene a lo más una solución, una de segundo grado 2, y sospechamos que una de grado n, debe tener a lo más n soluciones.

Este resultado, intuido inicialmente por Cardano, quien había introducido las raíces complejas y que por un tiempo pensó que una ecuación podía tener cualquier número de raíces, fue enunciado sin prueba por Albert Girard diciendo que *una ecuación polinómica de grado n, tiene n raíces, si se cuentan las raíces imposibles y si se tienen en cuenta las repetidas.*

También Descartes, asume que una ecuación puede tener tantas raíces como número de dimensiones de la incógnita, usando la expresión "puede tener"por considerar falsas las raíces negativas. Más tarde, al incluir las raíces imaginarias y las negativas, concluyó que hay tantas como indica el grado.

En cuanto al número de raíces positivas, negativas y complejas, Cardano observó que las raíces complejas de una ecuación se dan por pares y Newton lo demostró en su *Atihmetica Universalis.*

Descartes en *La Geometría*, enunció, sin demostración, la regla de los signos, conocida como *regla de Descartes*, que afirma: el máximo número de raíces positivas de $f(x) = 0$, donde f es un polinomio, es el número de variaciones del signo de los coeficientes y que el máximo número de raíces negativas es el número de apariciones de dos signos "$+$ "o dos signos "$-$ "consecutivamente.

Esta regla fue demostrada por varios matemáticos del siglo XVIII. La prueba que se da en la actualidad se debe a Abbé Jean-Paul de Gua de Malves (1712-85), que también demostró que la ausencia de $2m + 2$ ó $2m$ raíces complejas, según que los dos términos entre los que se halla la deficiencia tengan signos iguales o distintos.

Gauss demostró que si el número de raíces positivas queda por debajo del número de variaciones del signo, tal diferencia debe ser un número par.

7. Relaciones entre las raíces de una ecuación de grado n

Cardano descubrió que en una ecuación de grado n, la suma de las raíces es el opuesto del coeficiente de x^{n-1}, que la suma de productos de dos en dos es el coeficiente de x^{n-2} , etc.

Es decir que, si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las soluciones de la ecuación, entonces

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -a_1$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_2x_n + \cdots + x_{n-1}x_n = a_2$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_1x_2x_n + x_2x_3x4 + \cdots + x_2x_3x_n + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_3$$

$$\vdots$$

$$x_1\, x_2\, x_3 \ldots\, x_n = (-1)^n a_n$$

La prueba supone que un polinomio de grado n puede descomponerse en un producto de n factores de primer grado, en la forma:

$$x^n + a_1\, x^{n-1} + a_2\, x^{n-2} + \cdots + a_n = (xx_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3) + \cdots + (x - x_n)$$

donde x_1, x_2, x_3, $\ldots x_n$, son las raíces de la ecuación que se obtiene al igualar el polinomio a cero.

Realizando el producto e igualando los coeficientes correspondientes a iguales potencias de x, encontramos la relación entre cada coeficiente y las raíces. Por ejemplo para la ecuación de segundo grado:

$$x^2 + bx + c = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1\, x_2$$

o sea que

$$-(x_1 + x_2) = b$$

$$x_1\, x_2 = c$$

para la de tercer grado:

$$x^3 + bx^2 + cx + d = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

es decir que

$$-(x_1 + x_2 + x_3) = b$$

$$(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = c$$

$$-x_1x_2x_3 = d.$$

Tanto Cardano como Vietá en *De Aquetionum Recognitione et Emendatione*, emplearon la primera de estas relaciones entre raíces y coeficientes de ecuaciones de grado pequeño para eliminar el término x^{n-1} en las ecuaciones polinómicas de la forma descrita anteriormente.

Newton enunció la relación entre raíces y coeficientes en su *Arithmetica Universales*, y también James Gregory en una carta a John Collins (1625-83) secretario de Royal Society, pero ninguno de ellos dio demostración.

Vietá y Descartes construyeron ecuaciones cuyas raíces fueran mayores o menores que las de la otra ecuación dada previamente. El proceso consiste solamente en reemplazar x por $y+m$. Ambos utilizaron la transformación $y = mx$ para obtener una ecuación cuyas raíces fuesen el producto de m por la ecuación dada. Para Descartes, el primero de estos procesos tenía el significado de que las raíces falsas (negativas) pudiesen hacerse verdaderas (positivas) y recíprocamente.

Descartes demostró también que si una ecuación de tercer grado con coeficientes racionales tiene una raíz racional, entonces el polinomio puede expresarse como producto de factores con coeficientes racionales.

En el tercer libro de *La Géometrie*, Descartes enuncia que $f(x)$ es divisible por $x - a$, con a positivo, si solo a es una raíz de $f(x) = 0$, y por $x + a$, si sólo a es una raíz falsa[29] .

8. El teorema fundamental del Álgebra

Una ecuación polinómica

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

de grado mayor que 1, con coeficientes complejos, tiene al menos una solución en los números complejos.

D'Alembert fue el primer matemático que dio una demostración, pero no era completa, la primera prueba rigurosa fue presentada por Gauss.

[29]KLINE, M., *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días I*, Alianza editorial, p.27.

Bibliografía

[1] CLEMENS, S. et al., *Geometría con aplicaciones y solución de problemas*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.

[2] BRUMFIEL, C. et al., *Geometry*, Addison -Wesley, 1962.

[3] VERA, F., *Científicos griegos*, Aguilar, Vol. 1, 1970.

[4] REY PASTOR, J., CALLEJA, P., TREJO, C; *Análisis Matemático*, Editorial Kapeluz, Buenos Aires, 1952.

[5] LUQUE, C., MORA, L., PAEZ, J., *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: contar e inducir*, Universidad Pedagógica Nacional, Ediciones Antropos, 2002.

[6] NIKLITSCHEK, A., *El prodigioso jardín de las matemáticas*, Editorial Iberia, Barcelona, Tercera edición, 1953.

[7] NEWMAN, J; *Sigma el mundo de las Matemáticas*, vol 1, Décima edición, Grijalbo, Barcelona, 1985.

[8] LUQUE, C., MORA, L., *Una aproximación a los números racionales positivos*, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2001.

[9] KLINE, M., *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Volumen II, Alianza Editorial, Madrid, 1992.

[10] SINGH S; *El enigma de Fermat*, Planeta, Barcelona, 1998.

[11] GUTIÉRREZ M. V., *Notas de Geometría*. Universidad Nacional de Colombia.1992.

[12] ALBIS VICTOR. *Temas de Aritmética y Álgebra*. Universidad Nacional de Colombia. Colección Textos. 1984.

[13] EUCLID. *The thirteen Books of the Elements*. Vol 1. Books I and II. Dover,1956.

[14] COURANT, R., ROBBINS H., *¿Qué es la matemática?* editorial Aguilar, España. 1971.

[15] KELLEY, J., *Introducción moderna al Álgebra*, Norma, 1968.

[16] BOURBAKI, N., *Elementos de Historia de las Matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid, 1972.

[17] ORE, O., *Number Theory and Its History*, Dover, 1976.

[18] PETERSON, J., HASHISAKI, J., *Teoría de la Aritmética*, Limusa-Wiley, México, 1969.

[19] BOYER, CARL B., *Historia De La Matemática*. Editorial Alianza Universidad. Madrid. 1986.

[20] CASTRO, I., *Leonhard Euler*, Grupo Editorial Iberoamérica, 1996.

[21] CARO, V; *Los números: Su historia, sus propiedades, sus mentiras y verdades*, Minerva, Bogotá, 1936.

[22] KLINE, M., *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Vol. III, Alianza Editorial, Madrid, 1992.

[23] SAGASTUME, A, et. al., *Álgebra y cálculo numérico*, Editorial Kapeluz, 1960.

[24] LUQUE C., MORA L., TORRES J., *Una construcción de los números reales positivos*, Universidad Pedagógica Nacional, 2003.

[25] ORTIZ, L., GÓMEZ, M., *Algebra abstracta*, Eafit, 1986