

EL PRINCIPIO DE FERMAT EN ÓPTICA GEOMÉTRICA

Mauricio Bautista Ballén

Profesor Universidad Pedagógica Nacional

Bogotá D.C, Colombia

mbautist@uni.pedagogica.edu.co

Resumen

El interés de este trabajo es ilustrar un tópico a través del cual se pueda establecer relación entre las matemáticas y la física en el nivel de educación media. Se consideran algunos aspectos relacionados con el Principio de Fermat que se pueden desarrollar para profundizar los conocimientos de los estudiantes en cuanto a geometría, cálculo diferencial y física, asignaturas que, por lo general, se abordan desvinculadas una de la otra.

Iniciemos por enunciar una versión del principio de Fermat en óptica. *La trayectoria real que sigue un haz de luz entre dos puntos es la que recorre en el tiempo mínimo.* Para ilustrar su significado, consideraremos la reflexión y la refracción de la luz. Posteriormente hacemos algunas consideraciones geométricas acerca del llamado *punto de Fermat*.

Reflexión de la luz

En la figura 1 se muestran dos “posibles” trayectorias de un rayo de luz que emerge del punto F y que incide en el espejo E . Se indica que $FB + BA < FB' + B'A$ para cualquier punto B' que se encuentre en el espejo. Veamos un argumento a partir de la geometría. Los puntos F y F' son simétricos con respecto al espejo y la única trayectoria seguida por el rayo es FBA , pues los puntos $F'BA$ son colineales, lo cual implica que $\angle EBF \cong \angle ABB'$.

Veamos, a partir del cálculo diferencial, que la condición de que el tiempo empleado por el rayo de luz sea mínimo, implica que, cuando el rayo de luz se refleja en un espejo, los ángulos de incidencia (i) y de reflexión (r) son congruentes (Figura 2).

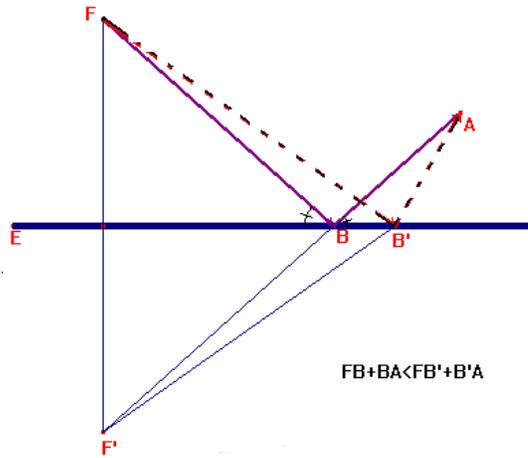


Figura 1.

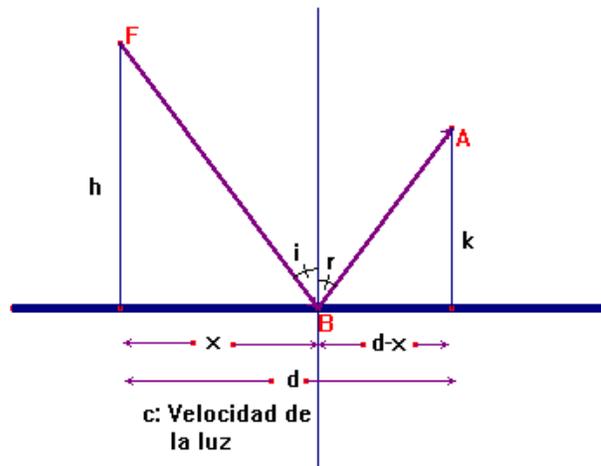


Figura 2.

El tiempo empleado por el rayo de luz en seguir la trayectoria FBA se expresa mediante

$$t = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{c} + \frac{\sqrt{k^2 + (d-x)^2}}{c}$$

Al derivar la función que representa el t con respecto a la distancia x , se obtiene

$$t' = \frac{1}{c} \left(\frac{2x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{2(d-x)}{\sqrt{k^2 + (d-x)^2}} \right)$$

Como el tiempo debe ser mínimo, se cumple que

$$\frac{1}{c} \left(\frac{2x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{2(d-x)}{\sqrt{k^2 + (d-x)^2}} \right) = 0$$

Por tanto,

$$\frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{k^2 + (d-x)^2}}$$

Luego

$$\text{sen } i = \text{sen } r$$

En consecuencia,

$$\angle i \cong \angle r$$

Es decir, que el ángulo de incidencia (i) es congruente con el ángulo de reflexión (r).

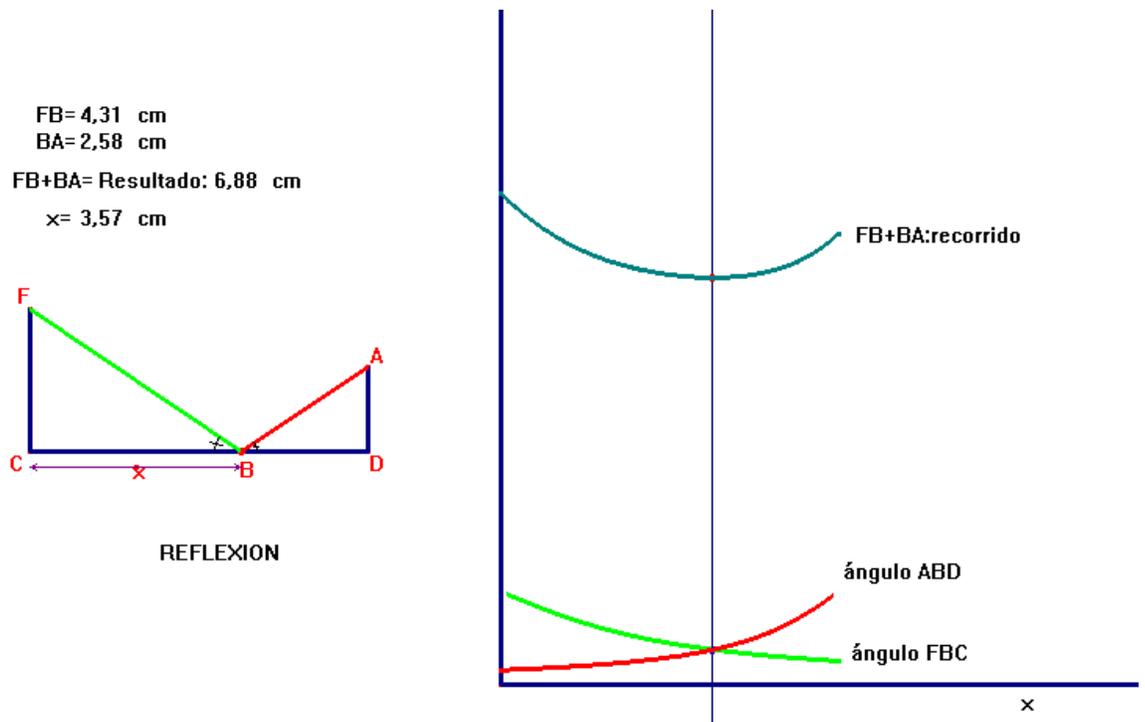


Figura 3.

En la figura 3 se muestra una imagen de una construcción en CABRI, mediante la cual, al mover el punto B a lo largo del segmento CD, se observa que las medidas de los ángulos ABD y FBC son iguales cuando el recorrido FB+BA es mínimo.

A través de esta construcción los estudiantes pueden relacionar la propiedad de la reflexión de la luz, con la congruencia de triángulos y además visualizar un problema de variación como aplicación de máximos y mínimos.

Refracción de la luz

El fenómeno de refracción se puede analizar a partir del Principio de Fermat. En la figura 4, se muestra la trayectoria de un rayo de luz que emerge del punto F e incide en la superficie de separación entre dos medios ópticamente diferentes. Este hecho implica que en el medio 1 (el no sombreado) la velocidad de la luz es v_1 , mientras que en el medio 2 (sombreado) la velocidad de la luz es v_2 .

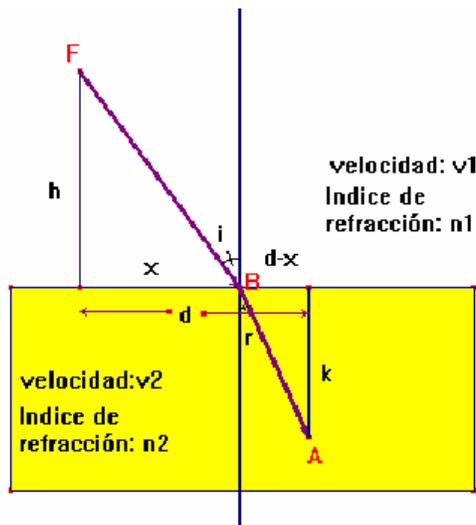


Figura 4.

El tiempo empleado por la luz mientras sigue la trayectoria FBA se expresa mediante

$$t = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{k^2 + (d-x)^2}}{v_2}$$

Al derivar la función que representa el tiempo con respecto a la distancia x , se obtiene

$$t' = \frac{1}{v_1} \frac{2x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{2(d-x)}{\sqrt{k^2 + (d-x)^2}}$$

Puesto que el tiempo empleado por el rayo de luz es mínimo, se cumple que

$$\frac{1}{v_1} \frac{2x}{\sqrt{h^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{2(d-x)}{\sqrt{k^2 + (d-x)^2}} = 0$$

Por tanto,

$$\frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = \frac{1}{v_2} \frac{d - x}{\sqrt{k^2 + (d - x)^2}}$$

Luego,

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_1}{v_2}$$

Esta igualdad muestra la relación entre los ángulos de incidencia (i) y de refracción (r) con las respectivas velocidades de la luz en los dos medios, conocida como la ley de Snell.

En la figura 5 se muestra una imagen de una construcción en CABRI, mediante la cual al mover el punto B a lo largo de la frontera entre los dos medios, se observa cómo la razón $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r}$ es igual a la razón $\frac{v_1}{v_2}$, cuando el tiempo es mínimo. Se observa aquí cómo una construcción permite a los estudiantes relacionar una propiedad de la luz, como es la refracción, contribuye a la visualización de un problema de variación y de aplicación de máximos y mínimos.

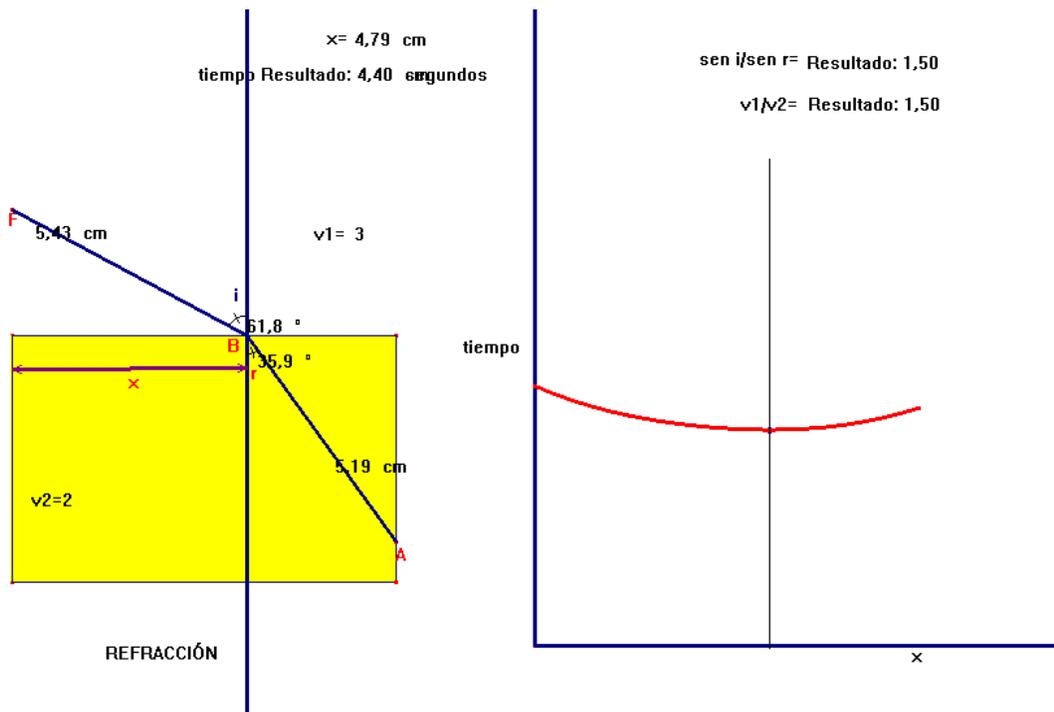


Figura 5.

La figura 6 ilustra la producción de espejismos. Las diferentes franjas representan las capas de aire, cuya densidad es variable, de tal manera que las capas

“muy delgadas” son ópticamente diferentes, por tanto, la luz experimenta sucesivos cambios de medio y, en consecuencia, cambia su trayectoria, lo que hace que el observador perciba brillo en la superficie del piso.

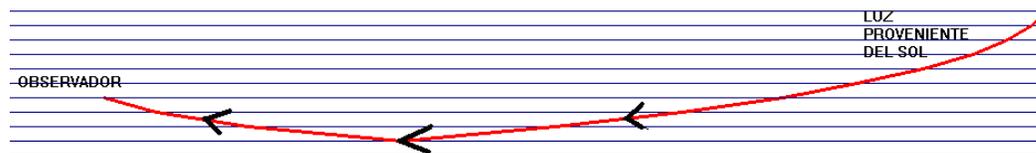


Figura 6.

Si los cambios entre capa y capa fueran discretos, podríamos considerar que el tiempo que emplea la luz en atravesar la i -ésima capa es el cociente entre la distancia recorrida, s_i , y la velocidad de la luz, v_i , en dicha capa. Por tal razón el tiempo en hacer el recorrido a través de n capas, se expresa como $t = \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{v_i}$.

Definimos la longitud del camino óptico (L.C.O.) como

$$L.C.O. = c \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{v_i}$$

Como el cambio de capa a capa es un proceso continuo, tenemos que la longitud de camino óptico es

$$L.C.O. = c \sum \frac{s_i}{v_i}$$

Podemos ahora enunciar el principio de Fermat como: *La luz al ir del punto A al punto B, sigue la trayectoria con longitud de camino óptico mínima.*

Problemas relacionados con la determinación de la longitud del camino óptico hacen parte del campo de aplicación del cálculo variacional.

El Principio de Fermat se enuncia en forma más moderna como sigue: *Al ir un rayo de luz del punto A al punto B, debe recorrer una longitud de camino óptico que es estacionaria con respecto a las variaciones de ese camino.*

Ilustramos este resultado con el comportamiento de un espejo de forma elíptica (fig. 7). Se puede mostrar que un rayo de luz que emerge de uno de los focos de la elipse (A), al reflejarse en el espejo incide sobre el otro foco (B), este hecho ilustra que independientemente del punto de la elipse en el cual incida el rayo proveniente de uno de los focos, la trayectoria seguida por la luz se ajusta a una condición: ir de foco a foco.

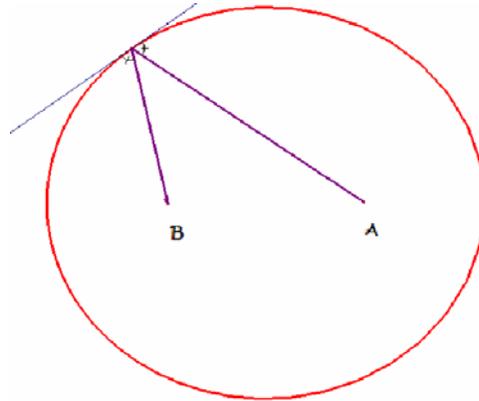


Figura 7.

El punto de Fermat

Es pertinente indagar acerca de la aplicación de los conceptos de la geometría. En la figura 8 se muestra el punto de Fermat, P, que cumple que dados tres puntos A, B y C, se tiene que $AP+BP+CP$ sea mínima

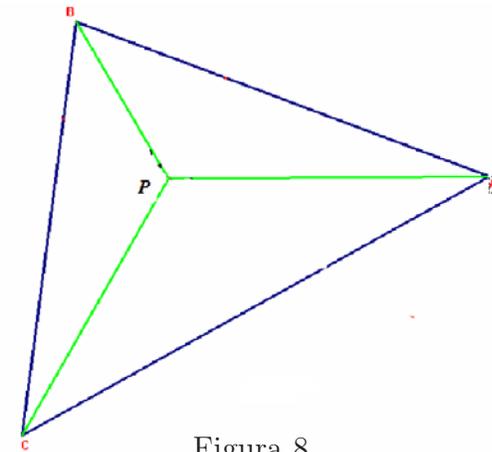


Figura 8.

En la figura 9 se muestra una forma de encontrar el punto de Fermat: Sobre cada uno de los lados del triángulo ABC se construyen los triángulos equiláteros CBF, ABE y ACD. Se trazan los segmentos AF, EC y DB. El punto de corte de los segmentos trazados es el punto de Fermat.

A partir de la congruencia de los triángulos ABF y EBC (Fig. 10) se puede establecer que los segmentos AF y CE son congruentes, pero además, se tiene que los ángulos EPB y APB miden 60° . En realidad, los seis ángulos APD, DPC, CPF, FPB, BPE y EPA miden 60° . Resulta interesante ver que si se traza la

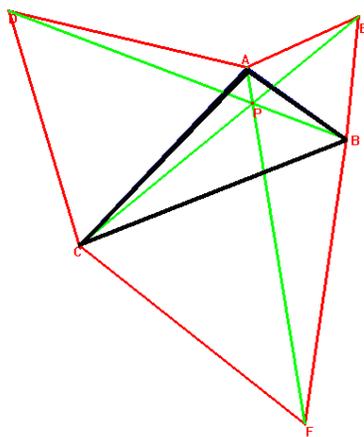


Figura 9.

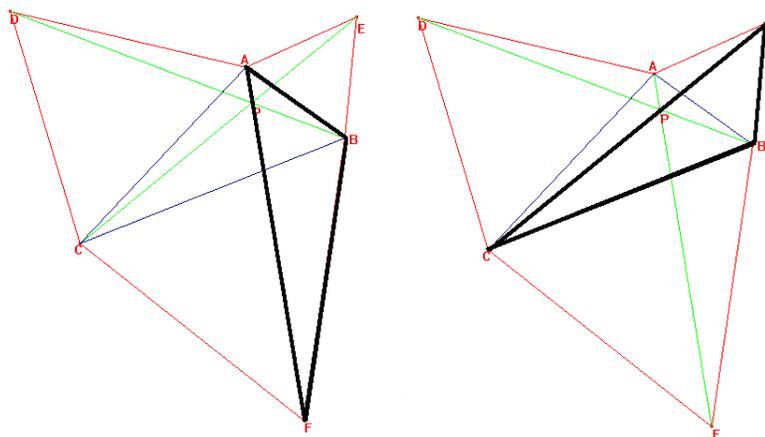


Figura 10.

recta m por los puntos C y P (Fig. 11) y la recta l perpendicular a la recta m que pase por P , se tiene que l bien podría representar un espejo y un rayo de luz que emerge del punto A incide en el punto B al reflejarse en el espejo.

Otro resultado interesante, que cabe mencionar es que el punto de Fermat obtenido a partir de los puntos A , B y C se encuentra sobre la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero construido sobre cada uno de los lados del triángulo dado como se muestra en la figura 12, en la cual se ha construido la circunferencia circunscrita al triángulo equilátero ABE . Por último se puede ver que el punto de Fermat se encuentra en la intersección de las circunferencias circunscritas a los tres triángulos equiláteros construidos sobre los lados del triángulo ABC (Fig.

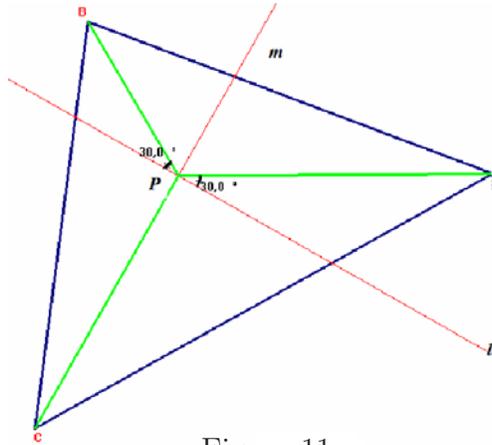


Figura 11.

13).

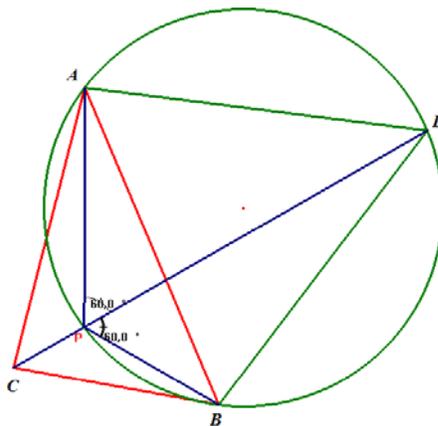


Figura 12.

A manera de conclusión, se ha mostrado un problema relacionado con el principio de Fermat en la óptica geométrica como un tópico generador de una serie de resultados que se pueden estudiar desde la geometría, el cálculo diferencial y la física. Antes que tratar de formalizar una serie de resultados matemáticos, que desde luego, para el nivel propuesto son de acceso para los estudiantes, se busca mostrar la manera de enfocar una serie de contenidos para ser abordados, quizás, desde el enfoque de la resolución de problemas. Cabe decir que los resultados obtenidos pueden ser deducidos por los estudiantes a partir de conocimientos básicos. Es importante reiterar que la situación considerada muestra una posibilidad de abordar temáticas que apuntan al trabajo interdisciplinario.

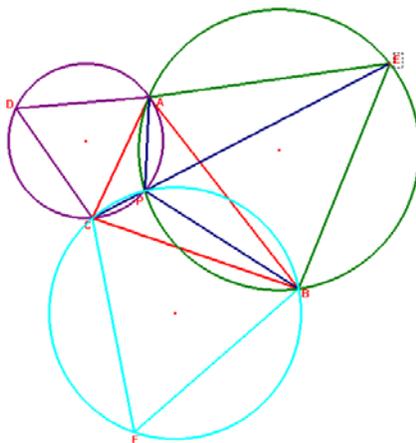


Figura 13.

Bibliografía

- [1] Courant, Richard. *¿Qué es la matemática?* Aguilar. Madrid. 1979.
- [2] Coxeter, H and S.L.Greitzer. *Geometry Revisited*. Fermat point of a triangle.htm
- [3] Edwards, C. H. y D. Penney. *Cálculo Diferencial e integral*. Prentice Hall. México. 1997.
- [4] Eisberg, Robert y L. Lerner. *Física. Fundamentos y Aplicaciones*. Mc. Graw Hill. México 1986.
- [5] Hecht, Eugene y A Zajac. *Óptica*. Addison Wesley. Wilmington, 1977.
<http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/optigeo/rayons.html>
hwang@phy03.phy.ntnu.edu.tw
- [6] Serway, Raymond y R. Beichner. *Física para Ciencias e Ingeniería*. Mc. Graw Hill. México. 2000.