CAPÍTULO 20

TECNOLOGÍA Y REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

JOSÉ LUIS LUPIÁÑEZ
lupi@matesco.unican.es
Universidad de Cantabria

LUIS E. MORENO
lmorenoa@data.net.mx
Cinvestav del IPN

Las nuevas tecnologías modifican sustancialmente los entornos socioculturales. El ámbito educativo no es ajeno a este hecho, pero aún es necesario perseverar en las discusiones acerca de cómo ha de llevarse a cabo una adecuada implementación de estas herramientas en el aula, para transformarlas en instrumentos cognitivos. En este capítulo se elaboran una serie de reflexiones en torno al papel que puede desempeñar la tecnología en esos procesos, y su relación con los sistemas de representación y las representaciones semióticas, que constituyen la clave para entender la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes.

INTRODUCCIÓN: MEDIACIÓN Y REPRESENTACIÓN

Una de las tesis centrales de los enfoques psicológicos de corte socio cultural, consiste en sostener que la acción cognitiva *humana* es siempre una acción mediada por alguna forma de herramienta. La herramienta puede ser simbólica (el lenguaje natural por ejemplo) o material (un telescopio, por ejemplo). Para el aprendizaje se desprende entonces una consecuencia nodal: la naturaleza del conocimiento producido depende de la herramienta. Sólo un largo proceso de *descontextualización instrumental* podrá, posteriormente, hacer factible el traslado de ese fragmento de conocimiento a otros contextos (Moreno, 1999). Hablaremos de la calculadora (TI-92), como una herramienta de mediación en la construcción y estructuración del conocimiento matemático de los estudiantes.

La tesis que sostiene que las diferentes representaciones de los conceptos matemáticos son fundamentales para su comprensión, ha llevado a incrementar su estudio durante los últimos tiempos. Muchos investigadores han dedicado sus esfuer-

En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.* Granada: Editorial Universidad de Granada.

zos a precisar el concepto de representación y a analizar el papel que desempeñan en el razonamiento de los estudiantes (Duval, 1999).

Por *representaciones* entenderemos, en el ámbito de las matemáticas, notaciones simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina así como sus características y propiedades más relevantes. Estas representaciones se clasifican en *registros de representación* (Duval, 1999), según sus características. Por ejemplo, si consideramos el concepto de *función,* asociado a él existen registros gráficos, algebraicos y tabular. Desde luego hay otros pero hasta hoy, estos han sido los mas usados en la enseñanza. En el interior de cada registro se pueden llevar a cabo *procesamientos*, es decir, transformaciones de las representaciones en el mismo registro donde fueron creadas. Más importante aún, entre diferentes registros de representación se pueden realizar *conversiones*, que son transformaciones de una representación hecha dentro de un registro, en otra representación dentro de otro registro. En el ejemplo de las funciones, una operación de conversión puede ser la de traducir información tabular sobre una función en una gráfica.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y TECNOLOGÍA

Uno de los principales usos de las computadoras y calculadoras algebraicas (como la TI-89 y la TI-92) tiene que ver con el empleo de los *Sistemas de Cálculo Simbólico* (SCS). Es una tecnología diseñada para gestión computerizada de fórmulas, vectores, matrices, entre otros, con elementos numéricos y simbólicos (García et al., 1995). Actualmente existe un creciente interés en estudiar cómo pueden aprovecharse las posibilidades que brinda esta herramientas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En 1972, Hewlett-Packard introdujo en el mercado la primera calculadora científica de la historia, que realizaba operaciones con las funciones trascendentes (por ejemplo, evaluar funciones trigonométricas o logarítmicas hasta con 12 cifras exactas. Véase Demana y Waits, 1997).

En 1986, Casio desarrolló en Japón la primera calculadora graficadora, que fue una auténtica revolución en los entornos educativos. Años después, se produjo una nueva ruptura con lo establecido dentro de los sistemas educativos, cuando apareció la TI-92. Como se sabe, esta calculadora (este es un nombre inadecuado para dicha herramienta) posee un sistema de procesamiento simbólico cuyas principales áreas de funcionalidad son:

1) Aritmética exacta con racionales, reales y complejos.

2) Trabajo con álgebra simbólica.

3) Obtención de soluciones numéricas.

4) Graficación de funciones y superficies.

La Figura Nº 2 muestra algunos ejemplos del trabajo con dicha herramienta, en un contexto educativo.

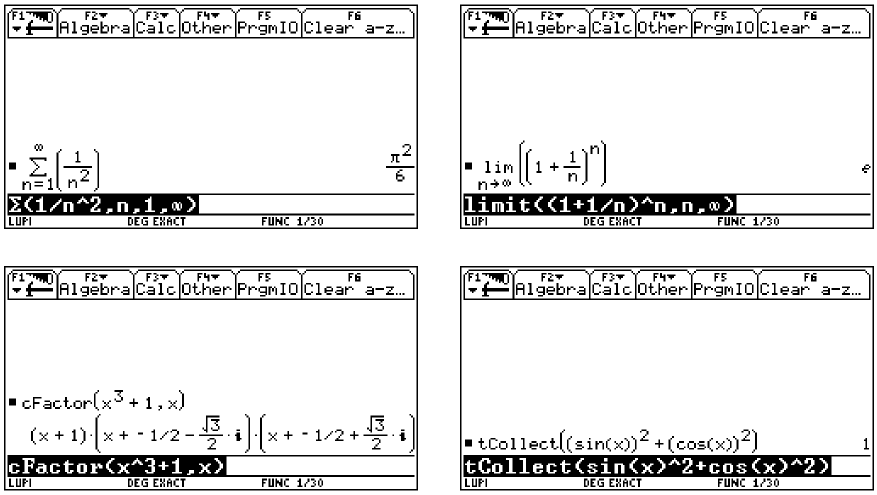

Figura 2.

Este tipo de posibilidades de las calculadoras, ha hecho crecer el número de proyectos educativos que incluyen una componente tecnológica, además de alentar a profesores e investigadores a incluirlas dentro de sus actividades. En diversos países se han establecido proyectos y programas para la formación de docentes y estudiantes de matemáticas, con la mediación de estas herramientas computacionales (Rojano y Moreno, 1999).

Un argumento que se esgrime habitualmente en contra del empleo de tecnología en la enseñanza de las matemáticas es que se abandona y olvida lo que se hace con papel y lápiz, y eso va en perjuicio de la calidad en la formación. Creemos que hay que entender la instrumentación de las tecnologías informáticas en la enseñanza de las matemáticas, como un proceso de enriquecimiento, no como sustitución, tratando de mejorar capacidades cognitivas, no de sustituirlas. Una reflexión más detenida, nos enseña que detrás de estas críticas hay una comprensión precaria de la tecnología. Lo primero que se pone de manifiesto cuando se escucha hablar de tecnología es que como tal, sólo se reconoce la *última* tecnología. Ya casi no se menciona que la escritura (¡sobre todo la escritura!) es una forma de tecnología. En la introducción de su libro *Oralidad y escritura, tecnologías de la palabra*, Ong (1987), nos señala que la investigación ha podido establecer diferencias fundamentales entre las culturas orales y aquellas afectadas por el uso de la escritura. Que muchas de las características que damos por sentadas en el pensamiento científico, por ejemplo, en realidad se originaron "debido a los recursos que la tecnología de la escritura pone a disposición de la conciencia humana" (p.11). Aquí se establece algo muy profundo, que ya habíamos mencionado anteriormente: que la mediación de las herramientas afecta sustancialmente los productos de la cognición. En este caso la afectación proviene de la escritura.

Entonces, cuando un niño realiza una operación aritmética con papel y lápiz, el trabajo intelectual que realiza depende ya de los sistemas de escritura y de notación decimal que están mediando sus acciones. La tecnología está presente en este caso aunque casi no la vemos: se ha tornado invisible (la invisibilidad de las tecnologías una vez que se sumergen en la matriz socio cultural, es uno de sus rasgos más interesantes). Si consideramos ejemplos más recientes, por ejemplo una calculadora simple que sólo tiene capacidad para ejecutar las cuatro operaciones aritméticas, entonces vemos surgir las críticas a su empleo en la escuela primaria. Los niños ya no aprenderán a sumar debido a la presencia de la calculadora. ¿Es así acaso? Diríamos que es una afirmación "entre dos aguas", que es una verdad a medias. Un uso indiscriminado de la herramienta sin duda introduce distorsiones en el proceso de enseñanza. Pero así como la escritura numérica no es un obstáculo para que el niño pueda realizar cálculos mentales, la calculadora tampoco tiene por qué jugar ese papel. La calculadora no viene a desmovilizar la actividad cognitiva del estudiante, sino a darle la posibilidad de actuar, cognitivamente, en terrenos nuevos. Por ejemplo, el uso de calculadoras con sistemas de procesamiento simbólico, permite que el estudiante se centre en la interpretación de lo que está realizando y que no se quede estancado en la realización exclusivamente sintáctica de cálculos repetitivos y tediosos.

EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

El papel que juegan las representaciones dentro del marco de la educación tiene una importancia muy relevante. El NCTM, por ejemplo, dentro del borrador de sus *Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del 2000* (NCTM, 1998), sugiere el estudio de las representaciones como uno de los principales propósitos. Otra muestra del interés creciente en este tema, es que congresos de conocida relevancia a nivel internacional se centran en él. Así por ejemplo, la XXI reunión del PME-NA, celebrada en México en octubre de 1999, giró en torno a la visualización y representación en educación matemática.

Asociados a la idea de *sistema semiótico de representación* surgen interrogantes que podemos calificar de *complejos.* Por ejemplo, sabemos que del objeto matemático sólo se puede hablar mediante sus representaciones, entonces ¿cómo entender las relaciones entre las representaciones y un objeto que no existe antes de representarlo? ¿Cómo puedo saber que el conjunto de todas las representaciones conocidas de un objeto matemático no lo agotan?, y lo que es más, ¿sin usarlas?

Las respuestas a estas cuestiones pasan por admitir que la construcción de un concepto matemático es un proceso en permanente desarrollo, por lo que el nivel de objetividad con el que lo entendemos es sólo transitorio. Nunca se posee plenamente el concepto, y por eso no hay lugar a concepciones platónicas de los objetos matemáticos.

En este trabajo, reflexionaremos en torno a las representaciones que suministra la calculadora. Estas representaciones poseen ciertas cualidades que las hacen especialmente productivas para el aprendizaje de las matemáticas. Son *representaciones ejecutables*, es decir, portadoras de la potencialidad de simular acciones cognitivas con independencia del usuario de la calculadora. Esto acontece, por ejemplo, cuando la calculadora "traza la gráfica" una función.

Quizá una estrategia adecuada, desde la perspectiva del profesor, sea concebir la calculadora como un sistema cognitivo artificial. La calculadora manipula las representaciones tanto internamente como a nivel de la pantalla, se comunica con el usuario y tiene capacidad para "resolver" ciertos problemas. Aunque todo esto es posible porque ha sido programada por humanos, la complejidad del instrumento es tal, que alcanza una cierta autonomía (al menos a ojos del usuario). Podríamos ver la calculadora como un sistema cognitivo con el que tenemos oportunidad de comunicarnos y de colaborar en la solución de ciertos problemas. La calculadora ofrece la oportunidad de que el estudiante interactúe con un nuevo socio cognitivo y pueda construir nuevos significados. Desde la perspectiva del profesor, la calculadora es un nuevo agente de enseñanza, mientras que el conocimiento que "vive" en la calculadora es un referente para el estudiante, en el proceso de socializar su conocimiento.

Es crucial entender que los objetos que aparecen en la pantalla y que manipula la calculadora no son objetos concretos ni objetos del mundo matemático formal: son objetos virtuales que están en la *interface* que separa el mundo conceptual de las matemáticas del mundo de los objetos concretos. Son pues instrumentos de conocimiento y no conocimiento en sí mismos.

REPRESENTACIONES EJECUTABLES

Las calculadoras graficadoras en general (especialmente la TI-89 y la TI-92) suministran un amplio abanico de representaciones de objetos y relaciones matemáticas en diferentes registros. Y lo que es más importante, permiten pasar de unos a otros registros, es decir, permiten la conversión de registros, lo cual supone una inapreciable herramienta de trabajo en educación matemática.

En el medio de expresión que suministran las calculadoras, pueden obtenerse propiedades y relaciones matemáticas de esos objetos, distintas a las que se observan mediante papel y lápiz. Por ejemplo, representar funciones en la máquina que resultan prácticamente imposibles de dibujar en el papel, permitiendo así conjeturar propiedades y *comprobar visualmente* (actividad que puede tener un importante uso didáctico) hechos que escapaban al análisis algebraico. Para ilustrar lo anterior, tomemos una función que fue importante en la búsqueda de funciones continuas pero no derivables en ningún punto.

Antes de la sorprendente presentación que dio Karl Weierstrass en la Academia de Berlín en 1872 de la serie trigonométrica $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ (en donde *a* es un entero impar, *b* es un real entre 0 y 1, y han de verificar que *ab* sea mayor que $1 + \frac{3}{2}$) como ejemplo de función continua no derivable, en 1861 Riemann introdujo, en uno de sus trabajos la siguiente función, afirmando que era continua para cualquier valor de *x* pero que existían infinitos valores de la variable en donde no era diferenciable (Bressoud, 1994):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

La no diferenciabilidad de esta serie es difícil de probar, y no fue sino hasta 1916, cuando G.H. Hardy mostró que, dado cualquier intervalo acotado, existen en él infinitos valores de *x* en los que la función no es diferenciable. Pero en 1970 se demostró que también existen infinitos valores de la variable en los que sí lo es. Si representamos algunas sumas parciales de esta función en la calculadora podemos observar lo complicado de su gráfica, si bien puede encontrarse cierto carácter simétrico asociable a la acción de la función seno. En la figura de la izquierda se muestra la suma de los 15 primeros términos de la serie, y el recuadro indicado en ésta se ve ampliado en la figura derecha:

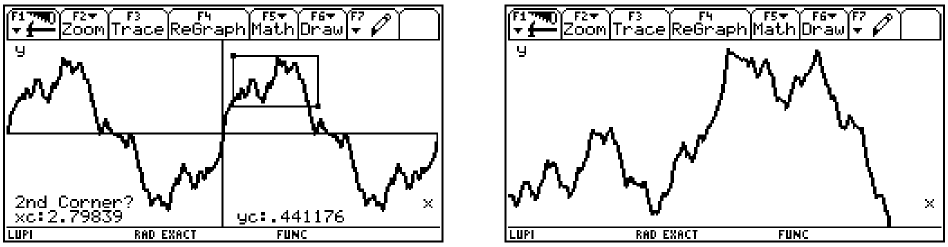

Figura 3.

Dentro del ambiente de trabajo de la calculadora, una función es derivable en un punto si al realizar sucesivamente varios acercamientos (*zooms*) sobre su gráfica, un entorno de la imagen de ese punto se ve como un trozo de recta. Si hacemos esto sucesivas veces en el ejemplo arriba citado, nos acercamos a una forma de argumentación de la existencia de infinitos puntos en los que la función no es derivable, si bien el estudio de los puntos en los que sí lo es requeriría de un tratamiento diferente. En cualquier caso, un tratamiento de las funciones bajo esta perspectiva siempre ha de ser cuidadosamente planificado para no conducir al estudiante a concepciones erróneas o malas interpretaciones. Además, es importante conjugar las posibilidades gráficas de estas tecnologías con las analíticas, pues de estas relaciones es de donde surge un conocimiento útil y consistente.

El poder de la tecnología es epistemológico. Su impacto está basado en una reificación de objetos y relaciones matemáticas, (Balacheff y Kaput, 1996), que los estudiantes usan para actuar más directamente sobre dichos objetos y relaciones de lo que se hacía antes, con una enseñanza auxiliada con tecnologías más tradicionales. La calculadora permite ver los objetos matemáticos como *manipulables*, y permite actuar sobre ellos y por eso, la fuerza de la tecnología está basada, en gran medida, en esa reificación de objetos y relaciones matemáticas.

Las representaciones analíticas tradicionales, se han visto ampliamente complementadas y enriquecidas con estas recientes tecnologías. El carácter estático que poseen los sistemas de representación tradicionales desaparece con las representaciones ejecutables, que son manipulables, que permiten actuar directamente sobre ellas. Esto se ilustra muy bien en los entornos de geometría dinámica como el Cabri, del cual la TI-92 incorpora una versión. Si en este ambiente representamos un triángulo, y trazamos las bisectrices de sus ángulos externos, puede observarse que éstas se cortan en un punto, y que si variamos la posición, forma, o medidas con la posibilidad que brinda el dragging (deformación de la figura sin alterar sus relaciones geométricas) del entorno, esta propiedad se sigue verificando:

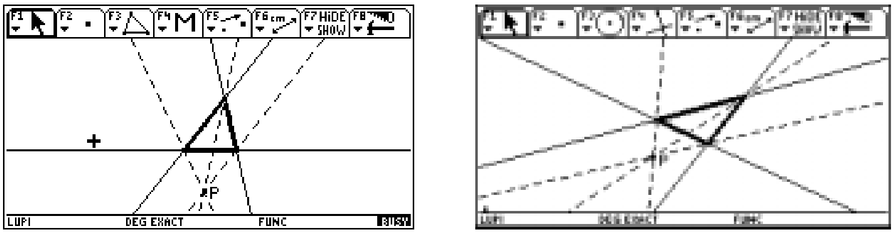

Figura 4.

Con esta actividad puede plantearse la construcción de las circunferencias exteriores a un triángulo, que es un ejercicio de especial belleza geométrica:

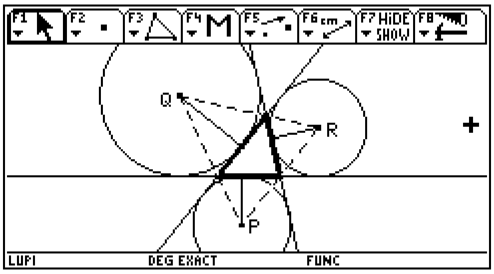

Figura 5.

Esto viene a destacar esa idea de representaciones ejecutables que brindan estas herramientas, en contraposición a las representaciones estáticas tradicionales, con las cuales resulta casi que imposible visualizar ciertas propiedades de objetos matemáticos. Las ideas y conceptos abstractos de las matemáticas se convierten en reales con el uso de la calculadora, en el sentido de que se pueden manipular, transformar. En otras palabras, se hace posible *intervenirlos matemáticamente*.

Las representaciones ejecutables tienen consecuencias diversas para el proceso de construcción del conocimiento: el hecho de usarlas permite reflexionar sobre un nuevo objeto, que es el resultado de la ejecución; hay dos objetos de reflexión: ese resultado y el texto que se ejecuta, por ejemplo cuando se trata de una serie de instrucciones organizadas a través de un programa. Un ejemplo de esto lo constituyen los *Scripts* que pueden realizarse con la calculadora. Un script es un documento del editor de textos formado por una serie de comandos que permiten al usuario hacer más sencillo el manejo de la máquina al poder repetir importantes procesos con sólo alterar las funciones o variables que intervienen. Tomemos la siguiente actividad como ejemplo:

Dada la función racional $f(x) = \dfrac{x^4 + x^3 - 6x^2 + 6}{x^2 + x - 6}$*, analizar su gráfica y compararla con la de la parábola* $g(x) = x^2$.

Construir la gráfica de esta función no es tarea fácil, ya que es complejo hallar los valores necesarios debido sobre todo a las dos asíntotas que presenta:

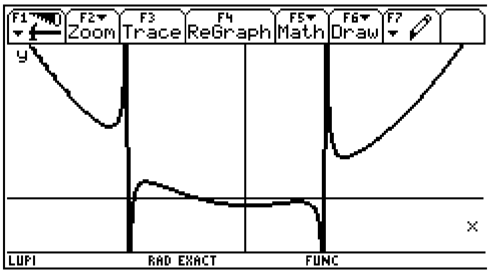

Figura 6.

No obstante, y a pesar de esta complejidad, puede reconocerse cierto comportamiento parabólico en la gráfica; más concretamente, parece un parábola salvo en un entorno de los “puntos malos” en los que hay asíntotas.

Otra operación que por lo general no es nada sencilla, consiste en expresar un cociente de polinomios como fracciones simples. Esta operación puede realizarse con la calculadora mediante la orden *PropFrac*:

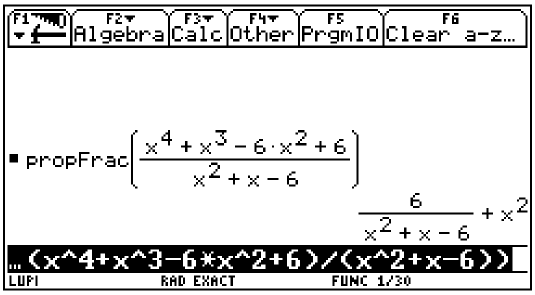

Figura 7.

Lo que hacemos con un script es escribir en el lenguaje ordinario de la máquina, las órdenes necesarias para que grafique una función racional y calcule su expresión como fracciones continuas. Además, distinguimos la parte hiperbólica y la parabólica, y representamos ésta última junto con al función original; podemos entonces observar cómo la parábola aproxima muy bien al cociente, y nos puede servir para evaluar dicho cociente para valores grandes de *x*:

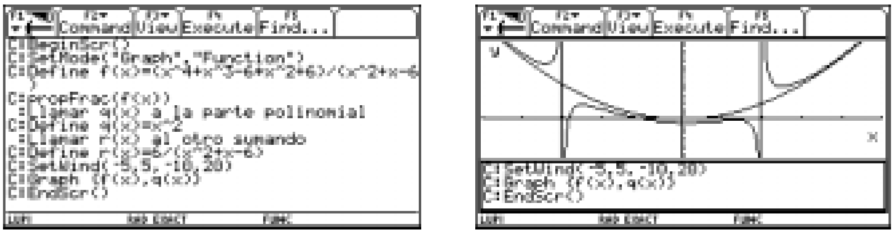

Figura 8.

Cada una de las líneas del script constituye un comando que se ejecuta de manera secuencial, permitiendo que el estudiante pueda observar qué va ocurriendo. Además, se pueden insertar líneas explicativas que aclaren o guíen este proceso. Por otro lado, no necesitamos cambiar esos comandos para trabajar la actividad con otro ejemplo, pues es suficiente alterar la definición de la función original y redefinir la parábola.

Actividades como ésta, y las ya mencionadas en el resto del trabajo, dan idea de la capacidad que tienen estos instrumentos para incidir en la formación matemática de los estudiantes, pues ofrecen representaciones y relaciones entre objetos matemáticos con las que ellos pueden interactuar, dando una nueva dimensión a la construcción del conocimiento matemático.

Queremos destacar el hecho que para llevar al aula un trabajo de este tipo, se requieren diferentes consideraciones en torno a los proyectos curriculares y, en particular, a la formación de los docentes. No se trata de hacer con estas herramientas sólo lo que se hacía sin ellas, sino que es necesaria un re-organización de los objetivos, las actividades y la manera de evaluación en matemáticas, y eso pasa por una instrucción precisa del profesorado.

REFERENCIAS

Bressoud, D. (1994). *A Radical Approach to Real Analysis*. Washington: Mathematical Association of America (MAA).

Demana, F., & Waits, B. (1997). *The Evolution of Instructional Use of hand Held Technology. What we wanted? What we got.* [On-Line] http://www.math.ohio–state.edu/˜waitsb/Papers/transcfd033098

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Traducción al español a cargo de M. Vega, realizada en la Universidad del Valle, Colombia, del original francés del mismo título publicado por P. Lang, Suiza en 1995.

García, A., & Martínez, A. (1998). *Nuevas Tecnologías y Enseñanza.de las Matemáticas*. Madrid: Síntesis.

Moreno, L. (1999). *Acerca del conocimiento y sus Mediaciones en la Educación Matemática*. Revista EMA, *4* (2), 101-114

NCTM (1998). *Principles and Standards in School Mathematics: Discussion Draft*. Reston: NCTM.

Ong, W. (1987). *Oralidad y escritura, tecnologías de la palabra.* México: Fondo de Cultura Económica.

Rojano, T. & Moreno, L. (1999). Educación Matemática: Investigación y Tecnología en el Nuevo Siglo. *Avance y Perspectiva*, *18*, 325-333.

Vonder Embse, C.& Yoder, V. (1998). Multiple Representations and Connections Using Technology. *The Mathematics Teacher*, *91,* 1, 62-67.

Wertsch, J. (1993). *Voces de la Mente*. Madrid: Visor.