EL FUTURO EN LA ESCUELA DEL PASO DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA PARA UN PSICÓLOGO COGNITIVO: MÁS INVESTIGACIÓN

Juan José Giraldo Huertas
Grupo de Matemáticas y Cognición Universidad del Valle
Cali, Colombia
juangir@univalle.edu.co

Resumen

Desde la visión de un psicólogo cognitivo se puede proponer, en el aprendizaje y uso de la aritmética para el dominio del álgebra escolar, algo más que una renovación curricular que contemple la incorporación de técnicas y programas extensivos y de investigación, que permitan desde los primeros grados escolares, como muchos autores ya parecen proponerlo de otras maneras menos explícitas (Carpenter y Levi, 2000). Los problemas estudiados en numerosas investigaciones (Booth, 1984; Kieran, 1983; Wagner, 1981) se han centrado en el hallazgo de las posibilidades y límites de los estudiantes respecto al contenido que el álgebra exige para su aplicación, sin reconocer que desde varios estudios pioneros en el análisis de la comprensión del álgebra en la escuela primaria (Davis, 1975; Clement, 1982; Clement et al., 1981) y otros en didácticas de las matemáticas (Gascón, 1998) se pueden sustentar cambios, con la seguridad de proponer que la búsqueda de medios pedagógicos que permitan enriquecerlo no se detenga y que toda empresa que contemple una reforma que acoja una propuesta investigativa desde el aula, deba fomentarse.

1. Introducción

Intentaré desde la visión de un psicólogo cognitivo proponer algo más que una renovación curricular que contemple la incorporación de técnicas y programas extensivos y de investigación, que permitan desde los primeros grados escolares, el aprendizaje y uso de la aritmética para el dominio del álgebra escolar como muchos autores ya parecen proponerlo de otras maneras menos explícitas (Carpenter y Levi, 2000). Los problemas estudiados en numerosas investigaciones (Booth, 1984; Kieran, 1983; Wagner, 1981) se han centrado en el hallazgo de las posibilidades y límites de los estudiantes respecto al contenido que el álgebra exige para su aplicación, sin reconocer que desde varios estudios pioneros en el análisis de la comprensión del álgebra en la escuela primaria (Davis, 1975; Clement, 1982; Clement et al., 1981) y otros en didácticas de las matemáticas (Gascón, 1998) se pueden sustentar cambios, con la seguridad de proponer que la búsqueda de medios pedagógicos que permitan enriquecerlo, no se detenga y que toda empresa que contemple una reforma que acoja una propuesta investigativa desde el aula, deba fomentarse.

A pesar de esta iniciativa, nuestro medio escolar no cuenta con la suficiente experiencia investigativa y la conciencia pedagógica para soportar tales cambios. Bajo esta perspectiva es urgente considerar, dentro de los problemas a resolver, los siguientes interrogantes:

¿Cómo puede realizarse el paso de la aritmética al álgebra de manera que afecte el currículo, al menos en el área de las matemáticas?

¿Cuál puede ser el contenido de dicha reforma?

¿Cómo aproximar la investigación a la práctica en el aula?

¿Cómo debe evaluarse el cambio en los procesos de enseñanza y aprendizaje dentro de una reforma de tal naturaleza?

Estos interrogantes serán asumidos al interior del contenido de la presente ponencia.

2. Primeras consideraciones

Debido a la intención de presentar en un evento sobre aritmética una perspectiva del paso en la escuela de ésta al álgebra, es necesario iniciar por el punto de llegada: el álgebra. Es conocido en algunos medios académicos un estudio que realizó y presentó en el 2001 el ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) en el marco de un evento en la Universidad de Melbourne (Australia) titulado *The Future of the Teaching and Learning of Algebra.*

La intención de este estudio es que la palabra "Álgebra"se interprete de manera que abarque la diversidad de definiciones que circulan en sistemas escolares de varios países, extendiéndose más allá del plan de estudios o currículo estándar de algunos de estos sistemas. Esta interpretación describe al álgebra como un idioma para la generalización, abstracción y prueba; igualmente asume al álgebra como una herramienta para resolver problemas por medio de ecuaciones o graficas; para modelar con funciones y para comprender la manera como se usan símbolos e ideas en otras partes de las matemáticas y otras áreas académicas.

El estudio expone varias razones por las cuales es oportuno enfocar los esfuerzos curriculares y escolares en el futuro de la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Señalan a nuestros días como punto crítico donde es deseable reflexionar y realizar acciones a partir de lo que se ha logrado y se espera lograr, lo que debe hacerse y lo que puede hacerse en relación con dicha problemática. Para el informe, en muchos países es creciente el números de estudiantes que reciben una educación secundaria y esto está causando que gran parte del currículo de las matemáticas sea revisado. Sin duda para el álgebra, quizás más que para otras partes de las matemáticas, se elevan consideradas preocupaciones sobre la equidad y la relevancia de sus temas. Como el lenguaje matemática más elevado, el álgebra puede significar el puente hacia universos matemáticos y conceptuales más significativos, pero a menudo se transforma en una pared que bloquea los caminos a muchos otros.

De hecho, un currículo para las matemáticas que en los años por venir sirva de manera adecuada a nuestros estudiantes, puede parecer muy diferente a los que diseñamos y en muchos casos recorrimos hace algunos años. La disponibilidad creciente de computadoras y calculadoras, con alguna probabilidad, cambiarán el uso y aplicación de las matemáticas tanto en la escuela como en otros contextos. Al respecto, el estudio del ICMI señala que al tiempo que estas tecnologías desafían el volumen de contenidos de enseñanza, la revolución tecnológica podrá mantener perspectivas que ofrezcan nuevas formas de comprensión y aprendizaje.

Sin embargo y como primera distancia que un psicólogo cognitivo puede tomar ante este tipo de propuestas, estos medios tecnológicos nos ofrecen una ilusión que solo puede resolverse a través de mayor investigación sobre el impacto de las NTCI[1] en el aprendizaje de los estudiantes. Los estudios actuales no resultan para nada concluyentes sobre los efectos del medio informático y queda mucho que resolver sobre como cualquier conocimiento específico puede fortalecerse a través de estas herramientas, no solo con estas herramientas (Martí, 1993).

[1] La revisión del impacto en la enseñanza de las Nuevas Tecnologías de la Comunicación y la Información (NTCI) para las matemáticas, puede iniciar con el clásico artículo "Technology and Mathematics Education"(1988) de James Kaput que aparece en el Handbook of teaching and learning of mathematics.

A continuación sugiero otras dudas sobre algunas propuestas que como el nombrado informe del ICMI, permiten una recomendación especial sobre la investigación de objetos matemáticos específicos y no la acumulación de temas de acercamiento entre la aritmética y el álgebra.

3. Dudas sobre la organización de temas (organizing themes) como articulador del paso de la aritmética al álgebra

Otro notable grupo de investigación[2] que estudia el paso de la aritmética al álgebra en la escuela, presenta la *organización de temas* como una oportunidad de mejorar las condiciones en la escuela para el paso de la aritmética al álgebra escolar. Estos temas u organizadores conceptuales se han seleccionado, según el estudio de la NTCM y a mi parecer de manera muy ambiciosa, para dar coherencia a los currículos, desarrollarlos, implementarlos e incluso para servir de objetos de investigación. Entre otros temas, el informe del estudio nombra las Funciones y Relaciones, Modelización, Estructuras, Lenguaje y Representación. Sin entrar a discutir de manera profunda esta propuesta, las definiciones de estos temas resulta al menos compleja y extraña: no puedo más que emitir dudas sobre la pertinencia para la investigación de objetos en relación con el currículo de las matemáticas, de dos de estos temas tan generales e inespecíficos como las estructuras de sistemas simbólicos y el lenguaje y los fenómenos de representación presentados desde una perspectiva comunicativa.

Un gran riesgo de propuestas de esta naturaleza es la *"aritmetización del álgebra escolar"* (Gascón, 1999). De manera resumida, este es un fenómeno que consiste en identificar el álgebra escolar con el lenguaje algebraico, entendiendo este proceso como la generalización de un presunto "lenguaje aritmético"y en considerar el "pensamiento algebraico"como la extensión de un supuesto "pensamiento aritmético"al que se contrapone, pero del que depende, de manera absoluta y unilateral. Así, en la medida que una institución docente identifica el *álgebra escolar* con la *aritmética generalizada*, la actividad algebraica se reduce a una actividad aritmética en la que, además de la representación de números concretos, se utilizan letras (ya sea como representación de números desconocidos específicos, como representación de números generalizados o como variables). Este fenómeno tiene consecuencias lamentables, entre las que se destaca la significación de al-

[2]The Algebra Working Group del NTCM (National Council of Teachers of Mathematics)

gunos resultados de las operaciones aritméticas, bajo una interpretación cultural (precio por unidad, velocidad, volumen, frecuencia, etc.) al parecer, porque en la aritmética escolar se combinan pocas magnitudes simultáneamente y están relacionadas de forma tan sencilla y ambigua que su construcción retraza y entorpece los procesos de dominio algebraico en secundaria.

La necesidad del dominio de técnicas algebraicas, permiten poner en relación muchas más variables a la vez y relacionarlas de una forma mucho más compleja, lo que permite que "aparezcan muy rápidamente magnitudes compuestas que no pueden ser interpretadas por la cultura corriente, por ejemplo ¿cómo denominar el producto de un peso por una velocidad dividido por la raíz cuadrada de un coste en pesetas?"(Gascón y otros, 1998). Si, copiando a la aritmética, se quiere preservar el sentido del resultado de las operaciones algebraicas: *"se acaba eliminando las magnitudes* y reduciendo la actividad algebraica a una *actividad puramente numérica* donde la estructura de las relaciones y por tanto, el álgebra como instrumento de modelización[3] , pasa inadvertida"(Gascón, 1999). De estas consideraciones, surge el interrogante: *¿Es posible la introducción del álgebra elemental en un marco diferente del marco aritmético habitual en el que lo algebraico es considerado como un epifenómeno de lo numérico?* Cualquier aportes conceptual, metodológico o empírico que contribuyan a la reformulación de este interrogante final, a partir de la aplicación activa de herramientas algebraicas[4], podría ser, especulativamente, una posibilidad viable.

Es debido a esto y limitando esta ponencia a entregar algo de utilidad para contribuir a la transición de la aritmética al álgebra en la escuela, que a continuación identifico dos puntos centrales: primero, una propuesta de investigación educativa que transforme el paradigma de investigación *en el aula por uno desde el aula* y segundo, algunos objetos de investigación en la aritmética escolar con el objetivo de señalar puentes que permitan el paso de nuestros estudiantes hacia el álgebra.

[3]Desde esta perspectiva, Gascón y otros (1998) dentro de la Enseñanza Secundaria Obligatoria, no hablará del "álgebra"para designar una organización matemática escolar relativamente independiente, como puede ser la "geometría"o la "aritmética". Dice el autor: *"Nuestra caracterización inicial del álgebra escolar se basa en su consideración como un instrumento genérico de modelización de la actividad matemática que puede afectar a cualquier organización previamente construida. Será el desarrollo posterior de este instrumento el que dará lugar a la emergencia de organizaciones matemáticas autónomas en torno al estudio de las "estructuras algebraicas"la llamada "Álgebra moderna"(pag. 8).*

[4]Una herramienta algebraica es todo material, situación y actividad que permitan la transformación del álgebra como área matemática independiente y fragmentada, en Álgebra como *"un instrumento genérico de modelización de la actividad matemática"* (Gascón y otros, 1998; Pág. 8).

4. Base para propuestas de investigación desde el aula

Tener un conocimiento adecuado de algo no implica tener el conocimiento adecuado para enseñarlo. Esta ruptura se hace fundamental cuando observamos, en ciertas áreas de conocimiento específico dentro de contextos escolares, la relación entre estudiante y maestro en una lamentable situación que puede denominarse como "del ciego guiando al ciego"(Campbell, 2001)

La manera más recurrente de asumir el trabajo investigativo proviene de la forma tradicional de investigación que puede denominarse "Imitación metodológica"(Tabla 1). Esta forma tradicional soporta creencias que apoyan la acción docente sobre una especie de labor "tecnológica", es decir, caracterizada por aplicar los hallazgos producidos en el campo de las ciencias sociales o humanas, u otras ciencias, al contexto educativo. Así, los conocimientos producidos por disciplinas como la psicología y la sociología, son "aprendidos"por el profesor para ser "aplicados"y posteriormente examinar la consecuencia practica de tales teorías, verificadas o rechazadas de acuerdo con los resultados académicos de los estudiantes. De esta manera el docente se asume a sí mismo "como un tecnólogo y no como un constructor de conocimiento científico sobre los fenómenos educativos"(Zapata, 2001; p.16).
Este mismo autor (Zapata, 2001) agrega al respecto que:
"Ciertamente este podría ser un aspecto del trabajo docente, pero sesga y minimiza la capacidad de los docentes para producir teoría educativa. La teoría educativa no consiste en la formulación de un conjunto de enunciados y prescripciones sobre como deben *adaptarse* los hallazgos de diversas ciencias al contexto educativo, sino en la formulación de principios de acuerdo y acción, que sustentados a través de la investigación científica en educación, provean teorías (principios, procedimientos, técnicas, instrumentos) que orienten el trabajo de quienes se ocupan de una u otra forma de producir prescripciones sobre lo que debe hacerse o saberse en educación sin estar en contacto directo con el sistema educativo"(p.17) - *énfasis del autor* - En términos no solo ideales sino necesarios para la transformación educativa que esperamos, quien formule una teoría educativa no pueden continuar estando alejado o siendo ajeno a las situaciones del aula. Los laboratorios que permiten la emisión de juicios que afectan la toma de una decisión respecto al empleo de una determinada estrategia de enseñanza o a una intervención efectiva sobre una dificultad en la construcción de un conocimiento, son las aulas de cada docente. A partir de estas reflexiones y experiencias, el producto de su análisis profundo es el material primigenio y fundamental del trabajo colectivo que supone la interacción con distintos grupos o culturas de la institución

escolar; son precisamente los profesores quienes deben generar sus conocimientos "teóricos y prácticos"no **con** investigaciones en el aula, sino **desde** el aula.

Forma tradicional de enseñanza	**Profesor investigador (1):Forma tradicional de investigación(Imitación metodológica)**	**Profesor investigador (2):Modalidad de investigación desde el aula (Articulación académica)**
Trabaja aislado ante un trabajo académico desde el aula	Trabaja aislado ante un trabajo académico desde el aula	Trabaja en el aula formando parte de un grupo académico que se reúne regularmente
Reflexiona sobre su practica de vez en cuando	Reflexiona sobre su practica. Selecciona hipótesis que aplica como métodos de enseñanza	Reflexiona sistemáticamente sobre su practica
No recurre a asesores externos	Puede pedir ayuda a un asesor	De manera constante recurre a un asesor o compañero critico
No recoge datos de forma sistemática	Recoge datos de forma sistemática	Recoge datos sistemática y organizadamente: descubre regularidades y ausencias
No hace informes escritos que sean producto de sus indagaciones	Analiza los datos para verificar o falsear hipótesis (Uso verificativo del registro)	Analiza datos y genera hipótesis que se discuten y exponen ante una comunidad científica o experta (Uso activo y dinámico del registro)
Incorpora de vez en cuando las reflexiones a la practica	Escribe informes organizados abiertos a criticas	Redacta informes independientes de indagación continua y artículos o textos abiertos a críticas
	Espera contribuir al descubrimiento de leyes	Incorpora las reflexiones de modo sistemático y busca el perfeccionamiento contrastando hipótesis en el plano institucional

5. Marco conceptual y experiencia con objetos de investigación en la aritmética escolar

Un interés reciente sobre la comprensión de sistemas numéricos, ha estado dirigido hacia los modelos mentales que reflejan la estructura conceptual del sistema de numeración y el valor de posición (Boulton-Lewis, 1992), las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje de conceptos asociados con la comprensión del número (Hiebert & Wearne, 1992), la búsqueda de "landmarks"en la comprensión del número (Rubin & Russell, 1992; Thomas, 1992; Thomas, 1996) y perspectivas que relacionan la operación multiplicativa y el dominio del sistema de notación decimal (Orozco, 1997).

Sin embargo, los modelos e hipótesis que pueden relacionar a estas investigaciones, se organizan por lo general y de manera especulativa, con la integración de tres dominios específicos que figuran en modelos conexionistas de procesamiento numérico (Dehaene & Cohen, 1995): (1) un dominio de los formatos de representación verbal escrita y hablada, (2) un dominio representacional y analógico de habilidades básicas para la formación del concepto de número y finalmente, (3) un dominio operacional que no sólo se aplica de manera estratégica o heurística, sino que además puede identificar las propiedades de las operaciones aritméticas formales.

Otra manera tripartita de considerar la formación conceptual del número se halla en el modelo de Red de Soporte Conceptual (conceptual-support net) de Fuson (1998). En este modelo los tres componentes son: referentes de cantidad, palabras y notaciones. Estos tres componentes se presentan en al menos tres contextos: el del mundo-real, el de las matemáticas y el de los significados. Según su autora (Fuson, 1998, p.161), este modelo permite reconocer una diferencia notable entre el tipo de estructura lingüística numérica de una lengua particular y los métodos de resolución de problemas aditivos con numerales de 2 dígitos. Sin embargo, el modelo no aporta mayor evidencia experimental de que tal diferencia afecte la comprensión del número ni el dominio del SNBD.

A partir de los modelos conexionistas y el modelo de Fuson (1998), podemos revisar investigaciones recientes inscritas de manera arbitraria y con un objetivo particular: señalar una problemática sobre la comprensión del número natural y su relación con las operaciones aritméticas básicas, los formatos de representación verbal y arábigo y, algunas habilidades básicas para la formación del concepto de número natural. En este sentido, limitaré esta revisión a la operación aditiva y su relación con tres dominios ya nombrados: el dominio de operaciones con naturales, el dominio de los formatos verbal y arábigo y por último, el domino de habilidades básicas para la formación del concepto de número natural. Previo a esta revisión señalaré de manera resumida la relación entre los procesos de reificación (Sfard, 1998) y el sentido operacional (Picciotto and Wah, 1993) como nociones necesarias para comprender la dirección inicial de estudios que el Grupo de Matemáticas y Cognición de la Universidad del Valle se propone realizar como parte de un programa de investigación institucional.

6. Reificación y Operation Sense

El aprendizaje de las matemáticas puede parecer para algunos autores (Sfard, 1998) como una actividad asombrosamente comprimible: "usted puede esforzarse un tiempo largo, paso a paso, para trabajar a través de algún proceso o idea desde varios acercamientos. Pero una vez usted realmente lo entiende y tiene la perspectiva mental para verlo en conjunto, hay una tremenda *condensación*[5] mental".

Si la "condensación"se traduce, según Sfard (1998), como un acto de reificación, es decir como una transición de un estado, acto o proceso operacional (process-oriented) a una estructura o representación (object-like) de un concepto[6] , este corto pasaje puede ofrecer los aspectos más importantes de este intrincado proceso. Primero, muestra que nosotros debemos tener un buen conocimiento de un proceso matemático para poder llegar a su concepción estructural. Segundo, implica que la reificación hace mucho por nuestra comprensión de algunos conceptos y por nuestra habilidad de trabajar con ellos. Tercero, dice que la reificación a menudo viene después de un largo proceso. Varios estudios en educación matemática e historia de las matemáticas (Breidenbach, Dubinsky, Hawks, & Nichols, 1992; Sfard, 1992; Sfard & Linchevski, 1994) confirman esta última afirmación: sugieren que si nosotros estamos hablando sobre funciones, números, espacios lineales o conjuntos formales, la reificación es difícil de lograr.

La fuente principal de esta dificultad inherente es para Sfard, la naturaleza circular de nuestra comprensión, qué en el caso específico de las matemáticas la autora lo denomina "el círculo vicioso de la reificación". Este se define así: por un lado, uno no puede realizar las acciones (por ejemplo ciertos funcionamientos aritméticos) en objetos matemáticos (los números naturales), sin antes construir

[5]Cursivas nuestras.

[6]Según la propia Sfard (1998): "No tiene que ser traducido de esta manera, pero tal interpretación es consonante con el termino concepciones estructurales"- structural conceptions.

estos objetos; por otro lado, uno no puede construir los objetos antes de operar con ellos.

Sin embargo, una alternativa para resolver tal discusión, puede hallarse en la propuesta del profesor Henri Picciotto de la Urban School of San Francisco. El señala que el núcleo de los procesos necesarios para el desarrollo desde los inicios intuitivos y escolares de las matemáticas es el sentido operacional - Operation sense. Este sería el principal vínculo entre el sentido numérico, el sentido funcional y el sentido simbólico de las matemáticas. De acuerdo con esta perspectiva, la manera de comprender matemáticamente una secuencia como 5, 8, 11, 14, ..., a través de dichos componentes sería:

- El *Sentido numérico* incluirá la habilidad para reconocer una adición reiterada y una relación con la multiplicación en tal secuencia.
- El *Sentido simbólico* incluirá la habilidad para expresar y reconocer la misma secuencia en una forma como $a + nd$, o para este caso $5 + 3n$.
- El *Sentido funcional* incluirá la habilidad para reconocer la relación entre esto y la función linear $y = mx + b$, en este caso $y = 3x + 5$.

Según este autor, nada de esto sería posible sin una sólida comprensión de la adición y la multiplicación, sus relaciones estructurales y su uso aplicado en diversas situaciones. Resumiendo a Picciotto & Wah (1993), la comprensión de las operaciones son el fundamento del sentido numérico, funcional y simbólico de las matemáticas.

Esta propuesta implica que la medición del sentido operacional se realice en términos del dominio de las reglas generales o propiedades de la adición (p.e., Conmutatividad y Asociatividad) en relación con los dominios específicos de la adición con naturales, los formatos verbal y arábigo, entre otros códigos semióticos, y las habilidades básicas para la formación del concepto de número natural.

7. Dominio de operaciones con naturales

En palabras de Kamii (1985): "Según Piaget, el número es una síntesis de dos tipos de relaciones que el niño establece entre objetos (mediante la abstracción reflexionante). Una es el orden, y la otra, la inclusión jerárquica". Y más adelante, explica: "La abstracción reflexionante comporta la construcción de relaciones entre objetos. Las relaciones no tienen existencia en la realidad exterior, sólo existen en el pensamiento de quienes las puedan establecer entre los objetos. Los números no se aprenden mediante la abstracción empírica de conjuntos que ya existen, sino mediante la abstracción reflexionante a medida que el niño construye relaciones".

Con esta descripción, el marco de las relaciones que consolidan la construcción del concepto de número puede llegar a ser todo lo amplio que se quiera. Pero el hecho concreto es que los seguidores de Piaget han centrado su atención en la consolidación del concepto de número en las acciones de contar correctamente (empleando los términos de la secuencia numérica), en la cardinación de conjuntos y en la asimilación de la regla de cardinación y del principio del orden irrelevante.

Todos estos hechos, técnicas y conceptos son muy importantes e imprescindibles en la adquisición de los conceptos relativos al número natural, pero no lo agotan. Las relaciones que se pueden considerar son variadas, al igual que los contextos de empleo de los términos numéricos.

De hecho, otra posición sobre la construcción y adquisición del concepto de número natural se interesa por el carácter operatorio de los mismos y pretende no limitarse en el estudio de la simbolización de las cantidades mediante los numerales o materiales concretos adecuados para tal fin.

Así, Castro y otros (1996) sustentan que "La Aritmética surgió en cada caso junto con un sistema de numeración y para satisfacer unas necesidades primordiales, no sólo de recuento sino también operatorias; con los números no sólo se simbolizan cantidades, también las acciones, relaciones y transformaciones cuantitativas, que pueden realizarse sobre los objetos tienen un reflejo en las operaciones numéricas".

El interés del número es que se trata de un concepto operatorio, en un doble sentido.

Por una parte el número expresa simbólicamente determinadas características del mundo real, en particular la cantidad, el orden y la medida. Sobre los objetos reales, y relacionado con la cantidad, hay acciones básicas: agregar, separar, reiterar y repartir, que expresan multitud de transformaciones con los objetos. También entre objetos se pueden establecer relaciones como comparar, igualar, determinar las veces que uno abarca a otro, etc. Se trata de operaciones en el sentido físico del término, pero también en el sentido psicológico en cuanto conjuntos de acciones coordinadas y reversibles. Pues bien, este cúmulo de acciones sobre el mundo real tiene su expresión simbólica correspondiente en las operaciones numéricas básicas: suma, resta, producto y división.

Las operaciones numéricas son las que dan potencialidad al número: sin ellas, dice Vergnaud (1979) "el concepto de número podría incluso no existir".

Por otro lado, las operaciones, mediante unos pocos principios, establecen una red de conexiones entre los distintos números. Se convierte así el concepto de número en un concepto operatorio y el sistema de los números naturales aparece dotado de una estructura respecto de las operaciones fundamentales: adición y multiplicación, con unas peculiaridades derivadas de las operaciones inversas: sustracción y división. Sin embargo, un análisis de la operación aditiva desde un punto de vista formal (Vealer, 1982, citado por Maza, 1991) nos permite inferir que para extender la suma hacia la construcción de la resta como operación inversa, es necesario definirla como operación unitaria y no como operación binaria, pues el carácter estático de esta última, dificulta establecer una relación entre suma y resta. Debido a esto, las investigaciones que asumen al conteo como una estrategia particular de resolución de problemas aditivos (Núnez y Bryant, 1996; Serrano y Denia, 1987) no conducen a condiciones suficientes como para mantener sus diseños y métodos de análisis.

Retomando la posición de Castro y otros (1996), este doble carácter de las operaciones: expresión de las acciones con los objetos y las cantidades -sentido real de cada operación- y sistema de relaciones interno dentro del conjunto de los números -aspecto formal de cada operación-, está presente durante toda la etapa de aprendizaje de las mismas, y también en la utilización y aplicación posterior.

Por tanto, desde el sentido real y posiblemente psicológico de cada operación, una operación "puede caracterizarse como la colección de todos los modelos que la representan"(Vest, F. 1969). Son muchos los modelos posibles que se pueden considerar para cada operación ya que son distintas las variables que pueden combinarse. Por un lado están los distintos contextos numéricos; por otra parte hay que considerar si el modelo es estático e incluye sólo estados, o bien es dinámico y comprende también operadores; el modelo puede ser gráfico o físico y en cada uno de esos casos los materiales utilizados pueden variar.

De cualquier manera, el interés principal de esta presentación se halla en la indagación de propiedades básicas del conocimiento numérico a partir del estudio del dominio de la operación aditiva en niños de diferentes edades. Este interés puede ofrecer aportes significativos en el estudio de la comprensión del número natural, principal propósito de investigación del Grupo de Matemáticas y Cognición.

Un estudio que presenta una metodología muy cercana (Charron & Ducloy, 1996), revela un camino que debe refinarse a través de herramientas como el análisis de tareas y el reconocimiento de ítems que pueden permitir una apreciación más adecuada de la comprensión del sistema de numeración en base 10 con relación en la construcción del número natural.

8. Dominio de formatos semióticos

Investigaciones más recientes sustentan como dentro de actividades de resolución de problemas aritméticos, la evolución simbólica expresada en las modalidades de representación gráfica que el niño hace de las cantidades presentes en un problema aritmético, parece no tener relación con la evolución presente en la construcción de los sistemas de representación notacional, que pueden llegar a utilizar los niños de manera simultánea, sin reconocimiento del sentido simbólico de la representación convencional (Giraldo, 2001). Establecer una relación entre la escritura y las habilidades para monitorear la actividad consciente, es una necesidad evolutiva de procesos cognitivos superiores; probablemente es en esta relación donde se construye no solo el significado numérico que permite conceptuar toda actividad matemática avanzada, sino las relaciones semióticas que gobiernan la aprensión de objetos de razonamiento diversos.

Frente al dominio de algunos formatos de expresión y representación de los números naturales y otros sistemas numéricos, el formato verbal (escrito y hablado) y el arábigo o indo-arábigo (por inclusión del 0 y otros signos), son los más estudiados de forma científica por disciplinas tan diversas como la lingüística, la neurología y la psicología cognitiva (Ellis, 1992; Spalding & Zangwill, 1950; Wynn, 1992).

Sin embargo, pocos estudios han tenido controles adecuados en procesos relacionados con el dominio coherente y sistemático de estos formatos. Un proceso fundamental en el estudio de esta relación entre el formato verbal y el indo-arábigo, es el de transcodificación (McCloskey & Caramazza, 1987). Este proceso es recientemente valorado dentro del estudio de la comprensión y construcción del número natural y en especial, en el dominio del Sistema de notación en base 10 (Orozco & Hederich, 2002).

Respecto a la función del dominio de estos formatos dentro de la comprensión del sistema de los naturales, es necesario un estudio que controle ciertas características más profundas de los procesos de comprensión, por que de manera general, los diseños, la metodología y los análisis de los estudios de transcodificación se dirigen sobre los medios y resultados de producción en tareas de lectura y escritura de numerales. Por esta razón, algunas de las preguntas que se han presentado en investigaciones sobre el SNBD no responden a interrogantes sobre el conocimiento que tiene el sujeto que resuelve las tareas, en términos de la comprensión de los sistemas numéricos que pueden representarse en el sistema.

Se sugiere que un estudio sobre la comprensión del sistema de los naturales puede contribuir a la investigación sobre la manera como estos conceptos básicos se extienden sobre otros sistemas numéricos, pues la operatividad del SNBD requiere un dominio más complejo que puede opacar a través de sus formatos de representación habituales, la observación del dominio y comprensión que el niño tiene de las operaciones con N (adición y multiplicación). Así, puede explorarse si desde la adición y la multiplicación con N se puede llegar al dominio del SNBD y a la extensión de principios y propiedades de estas operaciones sobre otros sistemas numéricos más complejos.

En esta dirección Saxton y Towse (1998) presentan un estudio que contiene un diseño controlado de variables que pueden relacionarse con la comprensión, tanto del sistema de notación en base 10 como del sistema de los naturales, dentro del tópico de la relatividad lingüística o influencia del lenguaje en la representación de los números (Miura, 1987; Miura, Okamoto, Kim, Steere & Fayol, 1993).

9. Domino de habilidades básicas para la formación del concepto de número natural

Para muchos autores (Dehaene, 1997; Lakoff & Núñez, 2000) el problema del dominio numérico no reside solo en dominios de carácter específico o en formalismos de carácter matemático. Para tales autores, existe una pregunta fundamental: "How can cognitive science bring systematic *scientific rigor* to the study of human mathematical ideas, which lies outside the rigor of mathematics itself?"(Lakoff & Nuñez, 2000; p. xii, énfasis de los autores). Esta cuestión remite de manera inmediata a diseños experimentales que puedan controlarse dentro de estudios que investiguen como ciertas actividades cotidianas o coloquiales pueden contribuir con la construcción de los objetos matemáticos más básicos y primitivos de nuestro pensamiento. De manera general, esta relación entre acciones asociadas a conceptos numéricos que no se registran a través de formalismos matemáticos o formatos de representación simbólica, tienden a recogerse en el término "Sentido Numérico"- Number Sense (Dehaene, 1997).

Jones et al. (1996) utilizan este concepto de "Sentido Numérico"en una forma que contradice la definición expuesta. Estos investigadores presentan un marco de instrucción y evaluación del desarrollo de sentido numérico con multidígitos[7] , en relación con el concepto de valor de posición. Teniendo en cuenta esta contradicción conceptual, un aporte valioso se puede extraer al identificar 4 componentes claves en el desarrollo de sentido numérico con multidígitos: Conteo, Agrupación, Partición y Relaciones numéricas.

Para cada componente señalan una definición tomada de investigaciones sobre el aprendizaje de números en cada tópico: para Conteo toman a Bell (1990), Fuson (1990), Kamii & DeClark (1985), Steffe et al. (1988) entre otros; para Agrupación se apoyan en Bednarz y Janvier (1988); en Partición se refieren desde los estudios de Resnick (1983), Fuson (1990) y Bednarz y Janvier (1988); para las Relaciones numéricas señalan los estudios de Greeno (1991) y Sowder (1988) como base conceptual.

10. Conclusiones

El motivo más inmediato de esta ponencia tiene relación con la formación de nuestros docentes y con la consideración de posibles hipótesis como objetos de interés para la investigación de la aritmética escolar desde la perspectiva de un grupo interesado tanto en el dominio de las matemáticas como en la perspectiva de un observador atento al sujeto que aprende. Esta propuesta de formación se orienta hacia la construcción de una comunidad académica que tenga como principio el desarrollo de actitudes investigativas y científicas desde el aula.

De manera general, se pueden especificar algunos objetivos de los procesos de formación que permiten actitudes deseables en nuestros docentes (Fernández, 1979; p.19):

- a Desarrollar la curiosidad científica expresada en el deseo de conocer y comprender que y como ocurren los fenómenos educativos en nuestras aulas
- b Desarrollar el escepticismo científico
- c Contrastar de manera empírica hipótesis, interpretaciones y juicios, adoptando una actitud critica y no dogmática
- d Analizar premisas y consecuencias didácticas a través del desarrollo de hábitos de razonamiento de tipo científico

[7]Multidigit Number Sense, se refiere al sentido numérico involucrado con formaciones numéricas de varios dígitos.

Sin embargo, estos propósitos formativos no pueden surgir aislados del discurso institucional sobre la oportunidad de trabajar y ser reconocidos por su trabajo investigativo. El desarrollo profesional de los docentes atraviesa no solo sus intenciones personales; muchas dificultades se presentan cuando la institución escolar, profesores, administradores y estudiantes no avanzan hacia objetivos comunes. Esta organización escolar es fundamental, en el sentido de realizar las planeaciones necesarias para proveer espacios, recursos y tiempos donde los distintos componentes y participantes actúen coherente, unificada y sistemáticamente.

Bibliografía

[1] Algebra Working Group to the National Council of Teachers of Mathematics (1995) A Framework for Constructing a Vision of Algebra: a Discussion Document. This document has been adapted from the Algebra in the K-12 Curriculum: Dilemmas and Possibilities.

[2] Booth, L. (1984) *Algebra: Children's Strategies and Errors,* NFER-Nelson.

[3] Campbell, S. (2001) *Early mathematics education: A case of the blind leading the blind?* Forum on exemplary practices and challenges in teacher preparation. American Association of Universities. Boston, MA.

[4] Carpenter, T. & J. Moser (1983) The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh and M. Landau (Eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (7-43). Orlando, FL: Academic Press.

[5] Carpenter, T., Franke, M. et al. (1998) A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education,* 29(1), 3-20.

[6] Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1996) *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar.* España. Editorial Síntesis

[7] Charron, C. & Ducloy, N. (1996) How does addition contribute to the construction of natural numbers in 4 to 13 year old children. En *Proceedings of the PME 20,* Vol. 2, 209-216. Valencia, España

[8] Clement, J. (1982) Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception, *Journal for Research in Mathematics Education,* 13, 16-30.

[9] Cooper, T., Heirdsfield, A., et al.(1996) Children's mental strategies for addition and subtraction word problems. In J. T. Mulligan and M. C. Mitchelmore (Eds.). *Children's Number Learning* (pp. 147-161). Adelaide, Aus.: The Australian Association of Mathematics Teachers.

[10] Costa, A. (1989) Prefacio. En: Resnick, L. & Klopfer, L. (Comp.) *Currículum y Cognición.* Buenos Aires, Argentina. Aique Grupo Editor S.A. p. 11-14

[11] Dehaene, S. (1997) *The number sense.* New York. Oxford University Press

[12] Ebbutt, D. (1982) Educational action research: some general concerns and specific quibbles. TIQL, Cambrige, Cambrige Institute of Education. Citado por Walquer, R. (1989) *Métodos de investigación para el profesorado.* Ediciones Morata, p. 227

[13] Fernández, E. (1979) Estructura y didáctica de las ciencias. Madrid, España. Servicio de Publicaciones del Ministerio de educación

[14] Fuson, K. (1988) Research on whole number addition and subtraction. En: *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan Publishing Company.

[15] Fuson, K. C., Wearne, D., et al.(1997) Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28(2), 130-162.

[16] Fuson, K.; Richards, J. y Briars, D.(1982) The acquisition and elaboration of the number word sequence. En C. Brainer (ed.) *Children's logical and mathematical cognition.* (pp. 33-92) New York: Springer-Verlag.

[17] Gascón, J. (1999) La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar, *Educación Matemática,* 11(1), 77-88.

[18] Gascón, J.; Bosch, M. y Bolea, P. (1998) ¿Cómo se construyen los problemas en didáctica de las matemáticas? Parte (I) *El álgebra escolar en el Programa Cognitivo.* (En prensa).

[19] Giraldo, J. (2001) Problemas aritméticos verbales, Representación Gráfica y Resolución de problemas en preescolar. *I coloquio internacional y III regional de la cátedra UNESCO para la lectura y la escritura en América latina. "Lectura y escritura para aprender a pensar".* Cartagena de Indias, Colombia; Diciembre 9 al 15 de 2001.

[20] Greeno, J.(1983) Conceptual entities. En: *Mental Models.* New Jersey: Lawrence Erlbaum.

[21] Hiebert, J. & Wearne, D. (1996) Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction,* 14(3), 251-283.

[22] ICMI (2001) *The Future of the Teaching and Learning of Algebra.* University of Melbourne (Australia)

[23] Jones, G., Thornton, C., Putt, I., Hill, K., Mogill, T., Rich, B. & Van Zoest, L. (1996) Multidigit number sense: a framework for instruction and assessment. *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 27, 3, 310 - 336

[24] Kamii, C.(1985) Place value: Children's efforts to find a correspondence between digits and the number of objects. *10º JPS Symposium.* Philadelphia.

[25] Kaput, J. (1995) Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying"the K-12 curriculum. Documento presentado en: *NTCM meeting.* San Francisco. pp. 11.

[26] Kaput, J. (1996) ¿Una línea de investigación que sustente la reforma del álgebra? I y II, UNO. *Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 9, 85-97 y 10, 89-103.

[27] Kieran, C. y Filloy, E. (1989) El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica, *Enseñanza de las Ciencias,* 7 (3), 229-240.

[28] Lakoff, G. & Núñez, R. (2000) *Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being.* New York. Basic Books

[29] Lakoff, G. y Johnson, M. (1980) *Metaphors We Live By.* The University of Chicago Press. Chicago.

[30] Lamon, S. (1996) The development of unitizing: its role in children partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 27, 2, 170 - 193

[31] Maza, C. (1991) *Enseñanza de la suma y la resta.* España. Editorial Síntesis

[32] McCloskey, M., Caramazza, A., Basili, A. (1985) Cognitive mechanisms in number processing and calculation: evidence from dyscalculia. *Brain and Cognition* 4, 171-196.

[33] Miura, I. (1987). Mathematics achievement as a function of language. *Journal of Educational Psychology,* 79, 79-82.

[34] Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M.C., et al. (1997) Second grader's representations and conceptual understanding of number: A longitudinal study. Paper presented to the *20th Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (MERGA), Rotorua, New Zealand.

[35] Orozco, M. & Hederich, C. (2002) *Errores de los niños al escribir numerales dictados.* On line www.matematicaycognition.cjb.net.

[36] Orozco, M. (1997) La matemática en primaria. *Actas 8vas JAEM. Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.* Salamanca, España: 447-449

[37] Resnick, L.(1983) A developmental theory of number understanding. En Ginsburg, H.(comp.), *The development of mathematical thinking.* (pp. 109-155) New York: Academic Press.

[38] Saxton, M. & Towse, J. (1998) Linguistic relativity: The case of place value in Multi-digit numbers. *Journal of Experimental Child Psychology,* 69, 66 - 79

[39] Serrano, J. y Denia, A.(1987) Estrategias de conteo implicadas en los procesos de adición y sustracción. *Infancia y aprendizaje,* 39-40. 57-69

[40] Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher,* 27, 2, 4 -13

[41] Steffe, L., Cobb, P., et al. (1988) *Construction of Arithmetical Meanings and Strategies.* New York, Springer-Verlag.

[42] Thomas, G. & Ward, J. (2001). *An Evaluation of the Count me In Too Pilot Project.* Wellington, NZ: Learning Media.

[43] Vergnaud, G. (1988) Multiplicative structures. En J. Hiebert, J. and M. Behr, *Number Concepts and Operations in the Middle Grades.* Vol 2. Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc., Second Printing 1989, 141-161.

[44] Zapata, P. (2001) *Educar científicamente en ciencias: Implicaciones para la formación docente.* Universidad Pedagógica Nacional y Programa de Doctorado en Educación. Área Educación en Ciencias. UPN. No publicado