Didáctica arquimediana

Iván Castro Chadid
Profesor Pontificia Universidad Javeriana
Profesor Universidad Nacional de Colombia
Bogotá D.C, Colombia
ivan.castro@jol.net.co

Jesús Hernando Pérez
Profesor Emérito Universidad Nacional de Colombia
Profesor Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia
jhpalcazar@multiphone.net.co

...si se quieren hacer progresos en matemáticas hay que estudiar los maestros y no los alumnos...

Niels Henrik Abel (1802 - 1829)

Resumen

Se presenta, utilizando como ejemplo la obra arquimediana la idea de construir didácticas para la enseñanza de las matemáticas, empleando elementos de los trabajos de los grandes creadores del conocimiento matemático
Palabras claves:
Los métodos de Arquímedes, áreas, volúmenes, números finitospero grandes, infinitamente pequeño, infinito como cantidad, indivisibles, infinitésimo de orden mayor.

1. Introducción

El aprendizaje de una disciplina académica requiere, como lo ha explicado muy bién Thomas Kuhn en su obra *La estructura de las revoluciones científicas*, del uso de libros de texto muy bien elaborados. Para el caso de la matemática esto es bastante claro: Es suficiente pensar en la extraordinaria influencia ejercida por el tratado de Euclides conocido con el nombre de los Elementos de Geometría. Son numerosos los matemáticos e incluso filósofos, que reconocen explícitamente el papel desempeñado por esta obra maestra en su formación profesional; Bertrand Russell por ejemplo, califica esta experiencia como algo realmente muy especial, compara el deleite de estudiar geometría en el tratado de Euclides con un "primer amor", según sus própias palabras "no había imaginado que existiera algo tan delicioso" [11].

Si miramos el presente, no es posible dejar de reconocer el importante papel de algunos textos, como el *Cálculo* del profesor Tom Apostol, la mayoría de los matemáticos han utilizado este esplendido libro para iniciarse en la teorías del Análisis Matemático. Los ejemplos anteriores son apenas un indicio de la importancia de la más antiga tradición investigadora en educación natemática: la elaboración de libros de texto.

Infortunadamente el uso de algunos textos, no todos bien elaborados, aleja a los estudiantes de otra experiencia crucial: El manejo de escritos originales. Muchos de los textos de geometría elemental,con la pretención de mejorar la obra euclidiana, terminan deformando negativamente el original. Si bién es cierto que algunos textos originales son difíciles de manejar, otros como sería el caso de ciertos capítulos de los *Elementos de Geometrí* a de Euclides, permiten superar rápidamente tales dificultades. Hay escritos originales bastante difísiles de manejar, pongamos por caso El *Método* de Arquimedes, es más bien complejo y una lectura directa de esta obra que, también es un clásico, puede resultar desmotivante. Sin embargo lo importante con los "clásicos" es que tales obras se llaman así porque desarrollan técnicas muy eficases para resolver determinados problemas. En El Método, Arquímedes desarrolla su teoría para determinación de áreas y volúmenes y con ella, propone una técnica para efectuar cálculos que es muy efectiva en muchos casos, no requiere de muchos prerequisitos y puede utilizarce en la enseñanza básica.

Didacticamente, resulta muy útil aprender con los clásicos, entendiendo que son ellos los creadores de conocimiento matemático y en consecuencia son los más indicados para mostrar como se construye este conocimiento. Arquímedes, Euclides y muchos otros, son auténticos educadores matemáticos, muestran claramente como utilizar las herramientas de la creatividad matemática, ofrecen multitud de ejemplos todos ellos auténticos paradígmas del desarrollo de la matemática. En este artículo, utilizando el ejemplo de Arquímedes, se presentamos la idea de construir didácticas inspiradas en los clásicos de la matemática.

2. El método de Arquímedes

La teoría Arquimediana para la determinación de áreas y volumenes se encuentra esplicada en varios de sus escritos; sin embargo, los ejemplos fundamentales se presentan en su trabajo conocido con el nombre *El Método* el cual permaneció perdido durante varios siglos. Dicho tratado es uno de los aportes más importantes al desarrollo de los métodos infinitesimales.

La idea más antigua sobre lo infinitamente pequeño esta asociada a una manera

Demócrito de Abdera (460-360 a. de C.)

muy particular de entender las circunferencias y los círculos. No es estraño que fuera precísamente la figura más esclarecida del atomismo griego, Demócrito de Abdera (460-360 a. de C.), quien sugirió por primera vez, que las circunferencias y los círculos son, en realidad, polígonos regulares con infinitos lados infinitamente pequeños.

La concepción atomista en las diferentes etapas del desarrollo científico se ha manifestado también en matemáticas, por ejemplo a traves del concepto que se tenga sobre lo infinitamente pequeño. La primera presentación formal coherente y sólida que se conoce de una teoría atomista se debe a Demócrito. Esta descansa sobre el principio del movimiento de la materia. Según dicha concepción, los átomos se mueven eternamente; el átomo es la materia misma en movimiento, Demócrito entendía los átomos como el ser , y el vacío como el no ser; pero el vacío era para él tan real como los átomos [3].

Aristóteles refiriendose a Demócrito sostenía: "*Parece haber meditado sobre todas las cosas, y nadie antes que él había hablado del crecimiento y del movimiento más que de un modo superficial*" [1], Marx y Engels lo consideraban como un "*naturalista empírico y primera mente enciclopédica de los griegos*" [2]. Fue el primero que planteó en toda la historia de la ciencia griega de la Antiguedad el problema del espacio y del tiempo; para este filósofo abderita, espacio es todo el gran vacío en el que se mueven los átomos, además lo consideraba continuo infinito en extensión y negaba que su divisibilidad fuera infinita [3].

En la carta a Eratóstenes enviandole un ejemplar de *El Método*, Arquímedes atribuye a Demócrito el cálculo del volumen de la pirámide, además, de acuerdo a la interpretación de algunos escritos de Plutarco refiriendose a Demócrito, se afirma que éste ya tenía la idea del sólido como suma de infinitos planos paralelos o de láminas infinitamente delgadas e infinitamente próximas, lo cual constituye la más importante anticipación de la misma idea que conducirá a los resultados más fecundos de Arquímedes [1].

Las ideas de Demócrito suscitaron el rechazo de algunos filósofos entre ellos Platón quien "*abrigo el propósito de quemar todas las obras de Demócrito que él había podido reunir pero los pitagóricos Amiclas y Clinias le disuadieron* " [4]; si bien es cierto, no se quemaron, desafortunadamente desaparecieron en el Siglo III, quedanto tan sólo algunos fragmentos y referencias a sus escritos a traves de otros autores. Demócrito fue llamado "*el filósofo que ríe*" [1], sostenía que "*es preferible un descubrimiento científico a la corona de un rey*"[1], se afirma además que se quedo voluntariamente ciego: para meditar mejor , según unos y para que el corazón no se le fuera tras lo que veían sus ojos, según otros [1].

La tesis de que las circunferencias y los círculos son, en realidad, polígonos regulares con infinitos lados infinitamente pequeños, fue retomada posteriormente por Arquímedes y muchos siglos depués por L$'$ Hôpital. Aquí aparecen dos tipos de infinitos cualitativamente diferentes: uno para contar (infinitos lados) y otro para medir (cada lado es infinitamente pequeño).

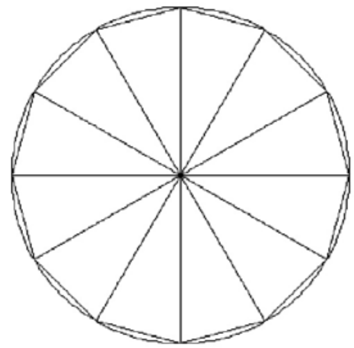
En manos de Arquímedes, esta idea permite construir argumentos para justificar teoremas. Un ejemplo interesante es el siguiente:

Para calcular el área de un círculo C de radio r, sabiendo que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$ (notación moderna), Arquimedes procedio de la siguiente manera:

Sean P_n un n-ágono regular inscrito en C y a_n su lado; al trazar los radios que van del origen a los vértices del n-ágono, obtenemos n triángulos todos de base a_n y altura b. El área de cada triángulo es $\frac{1}{2}\, a_n b$, luego el área de P_n es $\frac{n}{2} a_n b$.

Pero el propio círculo C es un polígono de infinitos lados infinitamente pequeños (infinito actual), en este caso $\mathrm{na_n}$ es la longitud de la circunferencia, esto es $2\pi r$ y b es el radio r. De donde el área del círculo es: $\frac{1}{2}(2\pi r)r = \pi r^2$.

Sobre la vida de este gran científico griego es poco lo que se conoce con exactitud. Se sabe que murió en el año 212 a.C. en la colonia griega de Siracusa durante la segunda guerra púnica, asesinado por un soldado enemigo al caer esta ciudad en manos de las tropas romanas comandadas por Marcelo.



Cálculo del área de un círculo

Arquímedes (287 a.C-212 a.C)

En algunos escritos se asegura que vivió 75 años y en base a esto se cree que nació alrededor del año 287 a.C. . En uno de sus libros se refiere a su padre como el astrónomo Fídias. Parece ser que estudió en Alejandría pero vivió en Siracusa. Muchas de las anécdotas que se han tejido alrededor de la vida de Arquímedes lo relacionan con la familia real, de ahí que algunos historiadores consideran que él hacía parte de dicha familia.

De sus escritos se pueden intuir algunos aspectos de su personalidad como puede ser un fino sentido del humor. En su obra Sobre *Las Espirales*, cuenta que algunos de sus amigos de Alejandría resolvieron publicar unos teoremas que él les mandó, como própios. Por tal razón en el siguiente envío incluyó dos teoremas falsos "*para que aquellos que afirman haberlo descubierto todo pero no ofrecen prueba alguna, puedan ser refutados de haber pretendido en realidad descubrir lo imposible*" [1].

La obra científica de Arquímedes es inmensa, Plutarco se refirió a ella con las siguientes palabras: "*No es posible encontrar en geometría cuestiones más difíciles e intrincadas, ni explicaciones más sencillas y brillantes. Algunos lo atribuyen a su genialidad; otros a un increible esfuerzo y desvelo que producen estos resultados aparentemente fásiles y naturales*" [4].

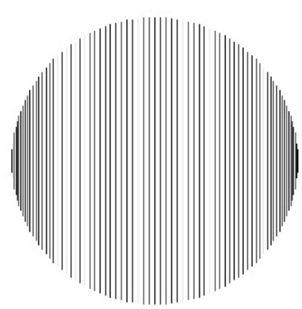
Su producción intelectual ha sido clasificada en tres categorías:

1. Las que se han conservado a través de los tiempos.
2. Los palimpsestos.
3. Las que estan incompletas o definitivamente han desaparecido.

Los palimpsestos son llamados así, debido a que algunos monjes del siglo XIII rasparon unos pergaminos en donde estaban escritas ciertas obras de Arquímedes para reescribir en ellas oraciones y liturgia. Entre estos se destaca *El Método*, descubierto en 1906 por el historiador Johann Ludwing Heiberg en un palimpsesto de la Biblioteca de Irak.

En *El Método* y en *Sobre el Equilibrio de las Figuras Planas (I y II)* [6] (una de las obras que se han conservado a través de los tiempos), Arquímedes establece los principios de su técnica en forma de una teoría con axiomas y teoremas, los elementos básicos de esta teoría son [7] :

1. Todas las figuras tienen peso.
2. El peso de cada figura es igual a su magnitud geométrica; por ejemplo, el peso de una linea es su longitud, el peso de una superficie es su área, etc.



3. todas las figuras tienen centro de equilibrio, o como se llama modernamente centro de masa, por ejemplo, el centro de masa de un círculo es su centro

geométrico, similarmente, el centro de masa de un triángulo equilátero es su centro geométrico.

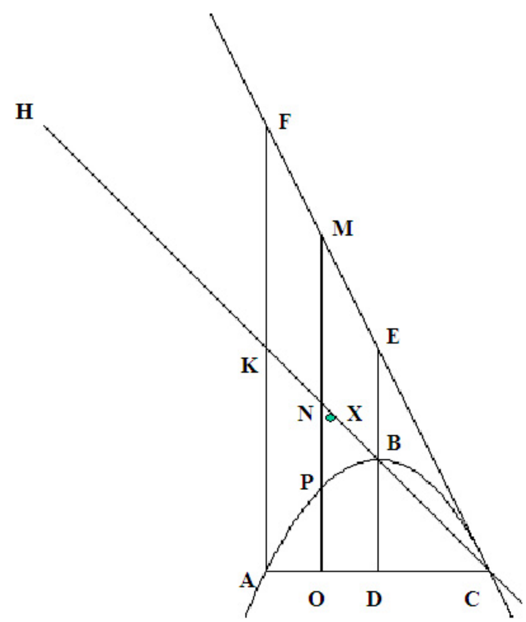
4. Cada figura, según el caso, se puede descomponer en infinitas figuras del mismo tipo y de orden inferior. Por ejemplo, un círculo es la unión de todas sus cuerdas paralelas a una cuerda dada.

Este último principio fue la fuente de inspiración para el posterior trabajo de Cavalieri.

Como todas las figuras tienen peso, utilizando una balanza y equilibrando figuras se pueden determinar magnitudes como se ilustra en los dos ejemplos que se presentan a continuación [6], [8].

2.1. Área de un segmento parabólico

Considerese una parábola de vértice en B y cuyo eje es $\overline{BD}$ (vease la figura correspondiente). Se quiere determinar el área comprendida entre la parábola y la perpendicular $\overline{AC}$ al eje.



Sobre la tangente a la parábola en el punto C tomamos F de tal manera que $\overline{FA}$ sea paralelo a $\overline{ED}$; $\overline{MO}$ se construye paralelo a $\overline{ED}$. Los puntos K y H se toman en la recta determinada por los puntos B y C de tal manera que $\overline{HK} = \overline{KC}$.

Por propiedades de la parábola se tiene que $\overline{EB} = \overline{BD}$. La justificación moderna y al estilo cartesiano, de este hecho es la siguiente:

Consideremos coordenadas cartesianas de tal manera que el punto B sea el orígen del sistema y la recta que pasa por D y E coincida con el eje y. En esta forma la ecuación de la parábola será $y = -ax^2$ en donde $a > 0$. Si x_0 es la ordenada del punto C, entonces la ecuación de la recta tangente será:

$$y = -(2ax_0)x + ax_0^2.$$

En esta forma la abscisa del punto E es ax_0^2 mientras que la de D es $-ax_0^2$. Luego la longitud de $\overline{BE}$ es ax_0^2 y la de $\overline{BD}$ es también ax_0^2, y así, $\overline{BE} = \overline{BD}$.

Por otra parte, los triángulos $\triangle AFC$ y $\triangle KFC$ son semejantes respectivamente a los triángulos $\triangle DEC$ y $\triangle BEC$, por lo tanto $\overline{FK} = \overline{KA}$. En forma análoga se demuestra que $\overline{MN} = \overline{NO}$.

Como los triángulos $\triangle AKC$ y $\triangle ONC$ son semejantes se tiene que $\overline{CA} : \overline{CO} = \overline{CK} : \overline{CN}$

luego, $\overline{CA} : (\overline{CA} - \overline{AO}) = \overline{CK} : (\overline{CK} - \overline{KN})$ y así $\overline{CA} : \overline{AO} = \overline{CK} : \overline{KN}$.

Se tiene también la relación $\overline{CA} : \overline{AO} = \overline{MO} : \overline{OP}$.

Esto se puede ver, mediante el método cartesiano, en la siguiente forma:

Considerese, nuevamente, el plano de la parábola como un plano cartesiano en el cual el orígen es el punto B y la recta determinada por los puntos B y D es el eje de las abcisas. Para simplificar, considere que la ecuación de la parabola es $y = -x^2$ y llamemos, nuevamente, x_0 la ordenada del punto C. La ecuación de la tangente será:

$$y = -2x_0x + x_0^2,$$

y entonces, llamando x_1 la ordenada de los puntos P, M, estos se representarán como

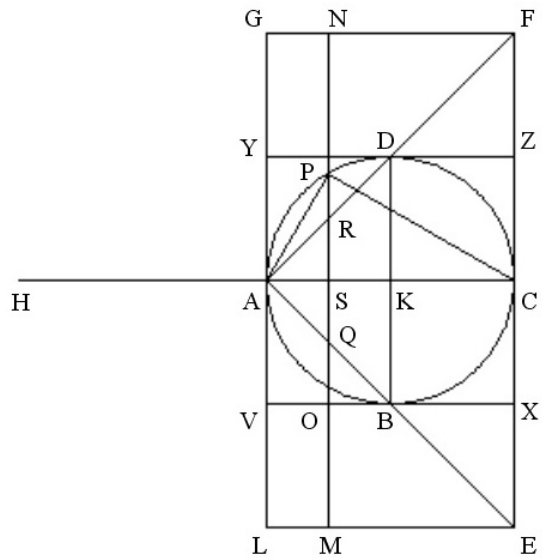
$$P = (x_1, -x_1^2) \quad \text{y} \quad M = (x_1, -2x_0x_1 + x_0^2)$$

De esto se sigue que

$$OM = x_0^2 - 2x_0x_1 + x_0^2 = 2x_0(x_0 - x_1), \qquad OP = x_0^2 - x_1^2.$$

De otra parte

$$AC = 2x_0 \quad \text{y} \quad AO = x_0 + x_1.$$



En conclusión
$$\frac{OM}{OP} = \frac{2x_0(x_0 - x_1)}{x_0^2 - x_1^2} = \frac{2x_0}{x_0 + x_1} = \frac{AC}{AO}.$$

Como $\overline{CK} = \overline{HK}$ se tiene entonces que $\overline{KH} : \overline{KN} = \overline{MO} : \overline{OP}$. Supongamos ahora que los segmentos $\overline{MO}$, $\overline{PO}$ son pesos proporcionales a su longitud , y traslademos $\overline{OP}$ al punto H. Tomando K como centro de equilibrio de la palanca $\overline{HN}$ tenemos entonces que el segmento $\overline{OP}$ colocado en H equilibra al segmento $\overline{OM}$ colocado en N y si O recorre $\overline{AC}$ tendremos que el área que buscamos colocada en H equilibra el área del triángulo AFC colocada en X, centro de gravedad del mismo. Así pues, llamando α el área del sector parabólico y β la del triángulo tenemos:
$$\alpha : \beta = \overline{KX} : \overline{HK};$$

o sea $\alpha = \dfrac{1}{3}\,\beta$.

2.2. Volumen de la esfera

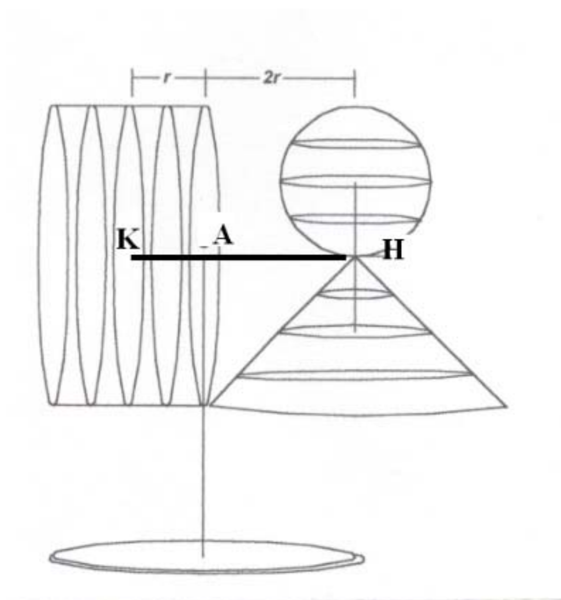
Los datos de la figura adjunta son los siguientes: $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son diámetros perpendiculares de la circunferencia con centro en K y radio r; $\overline{EF}$, $\overline{LG}$ son perpendiculares a $\overline{AC}$; $\overline{YZ}$, $\overline{VX}$ perpendiculares a $\overline{HC}$. Se tienen las siguientes relaciones: $\overline{AS} = \overline{SR}$, $\overline{AP}^2 = \overline{SR}^2 + \overline{SP}^2$; $\overline{AP}^2 = \overline{SR} \cdot \overline{AC} = \overline{SR} \cdot 2r$. Deducimos entonces la relación $\overline{SR}^2 + \overline{SP}^2 = \overline{SR} \cdot \overline{AC}$ y de esta se obtiene

$$\frac{\pi\overline{SR}^2 + \pi\overline{SP}^2}{\pi(2r)^2} = \frac{\overline{SR}}{2r}. \qquad (*)$$

Girando la figura 360º alrededor de $\overline{HC}$, la circunferencia nos determina una esfera, el triángulo $\triangle AEF$ un cono y el rectángulo $LGFE$ un cilindro.

Supongamos ahora que las áreas y volúmenes son pesos proporcionales a sus medidas y traslademos al punto H las circunferencias de radio $\overline{SR}$ y $\overline{SP}$ las cuales equilibran a la circunferencia de radio $\overline{SN}$ según la ralación $(*)$ en la palanca $\overline{HS}$ con centro de equilibrio en A. Si S recorre $\overline{AC}$, entonces $(*)$ nos produce la relación:

$$\frac{\text{esfera} + \text{cono}}{\text{cilindro}} = \frac{AK}{AH} = \frac{1}{2}$$



Como el volumen del cilíndro es tres veces el del cono y además

$$\text{cono}(\ DAK) = \frac{1}{8} \cdot \text{cono}(FAC)$$

obtenemos esfera $= 4$ cono(CAD) es decir, esfera $= \frac{4}{3}\ \pi r^3$.

Como se observa, los argumentos arquimedianos aunque no son rigurosos desde el punto de vista de la geometría euclideana son convincentes, muy sencillos, constituyen una teoría elemental y ofrecen una forma bastante facil para calcular áreas y volumenes lo cual representa un gran aporte a la metodología de la enseñanza de la geometría.

Arquímides también puede ser muy útil para trabajar uno de los tópicos más motivantes de la matemática elemental: La diferencia entre números finitos, aunque muy grandes, y el infinito..

El génio de Siracusa llamó la atención hacia lo infinitamente grande en aritmética. En su obra *El Arenario* escribía lo siguiente: "*Algunos estiman, rey Gelón, que el número de granos de arena es infinitamente grande y yo pienso no sólo en la arena de los alrededores de Siracusa y del resto de Sicilia, sino tambien en la repartida por toda la tierra, habitada o inculta. Otros aún admitiendo que tal número no es infinitamente grande , piensan que no existe un número expresable lo bastande grande para superar la cantidad de arena. Sin embargo, si quienes son de esa opinión se imaginasen un volumen de arena igual al de la Tierra, comprendidos en ese volumen todos los mares y todos los valles de la Tierra, llenos de arena hasta las montañas más altas, es evidente que menos aún reconocerían que se puede enunciar un número que sobrepase el número de estos granos de arena. Ahora bien, yo trataré de hacerte ver, mediante demostraciones geométricas que tú podrás seguir, que entre los números que he enunciado y expuesto en mis escritos dirigidos a Zeuxipo, los hay que superan no sólo el número de granos de arena cuyo volumen sería igual al de la Tierra rellena del modo que hemos indicado, sino incluso los que tuvieran un volumen igual al del mundo*" ([12]).

Arquímedes demostró que los grandes números son también entes matemáticos, este hecho es de gran importancia ya que los griegos no tenían un sistema de notación que les permitiera escribir y manipular números grandes siendo el mayor de todos la *miríada de miriadas* que por comodidad notaremos Ω y cuyo valor es de 10^8 .

El sistema de numeración de Arquímedes estaba integrado por Ω períodos, representados de la siguiente manera:

Números del primer período:

Primeros números:	$1, 2, \cdots, \Omega$
Segundos números:	$\Omega, \Omega+1, \Omega+2, \cdots, \Omega+(\Omega\text{-}1)\Omega=\Omega^2$
$\vdots$	$\vdots$
n-ésimos números:	$\Omega^{n\text{-}1}, \Omega^{n\text{-}1}+1, \Omega^{n\text{-}1}+2, \cdots, \Omega^{n\text{-}1}+(\Omega\text{-}1)\,\Omega^{n\text{-}1}=\Omega^n$
$\vdots$	$\vdots$
Ω-ésimos números:	$\Omega^{\Omega\text{-}1}, \Omega^{\Omega\text{-}1}+1, \Omega^{\Omega\text{-}1}+2, \cdots, \Omega^{\Omega\text{-}1}+(\Omega\text{-}1)\,\Omega^{\Omega\text{-}1}=\Omega^{\Omega}=\Pi$

Números del segundo período:

Primeros números:	$\Pi, \Pi+1, \Pi+2, \cdots, \Pi+(\Omega\text{-}1)\Pi=\Pi\Omega$
Segundos números:	$\Pi\Omega, \Pi\Omega+1, \Pi\Omega+2, \cdots, \Pi\Omega+(\Omega\text{-}1)\,\Pi\Omega=\Pi\Omega^2$
$\vdots$	$\vdots$
n-ésimos números:	$\Pi\Omega^{n\text{-}1}, \Pi\Omega^{n\text{-}1}+1, \Pi\Omega^{n\text{-}1}+2, \cdots, \Pi\Omega^{n\text{-}1}+(\Omega\text{-}1)\,\Pi\Omega^{n\text{-}1}=\Pi\Omega^n$
$\vdots$	$\vdots$
Ω-ésimos números:	$\Pi\Omega^{\Omega\text{-}1}, \Pi\Omega^{\Omega\text{-}1}+1, \Pi\Omega^{\Omega\text{-}1}+2, \cdots, \Pi\Omega^{\Omega\text{-}1}+(\Omega\text{-}1)\,\Pi\Omega^{\Omega\text{-}1}=\Pi\Omega^{\Omega}=\Pi^2$

Números del i-ésimo período:

Primeros números:	$\Pi^{i\text{-}1}, \Pi^{i\text{-}1}+1, \Pi^{i\text{-}1}+2, \cdots, \Pi^{i\text{-}1}+(\Omega\text{-}1)\Pi^{i\text{-}1}=\Pi^{i\text{-}1}\Omega$
Segundos números:	$\Pi^{i\text{-}1}\Omega, \Pi^{i\text{-}1}\Omega+1, \Pi^{i\text{-}1}\Omega+2, \cdots, \Pi^{i\text{-}1}\Omega+(\Omega\text{-}1)\,\Pi^{i\text{-}1}\Omega=\Pi^{i\text{-}1}\Omega^2$
$\vdots$	$\vdots$
n-ésimos números:	$\Pi^{i\text{-}1}\Omega^{n\text{-}1}, \Pi^{i\text{-}1}\Omega^{n\text{-}1}+1, \Pi^{i\text{-}1}\Omega^{n\text{-}1}+2, \cdots, \Pi^{i\text{-}1}\Omega^{n\text{-}1}+(\Omega\text{-}1)\,\Pi^{i\text{-}1}\Omega^{n\text{-}1}=\Pi^{i\text{-}1}\Omega^n$
$\vdots$	$\vdots$
Ω-ésimos números:	$\Pi^{i\text{-}1}\Omega^{\Omega\text{-}1}, \Pi^{i\text{-}1}\Omega^{\Omega\text{-}1}+1, \Pi^{i\text{-}1}\Omega^{\Omega\text{-}1}+2, \cdots, \Pi^{i\text{-}1}\Omega^{\Omega\text{-}1}+(\Omega\text{-}1)\,\Pi^{i\text{-}1}\Omega^{\Omega\text{-}1}=\Pi^{i\text{-}1}\Omega^{\Omega}=\Pi^i$

$\forall i = 1, \cdots, \Omega$.

De acuerdo con lo anterior, se puede afirmar que el número más grande que conocían los griegos era:

$$\Pi^{\Omega}= 10^{80,000,000,000,000,000}$$

El Arenario, aunque es una obra secundaria en la producción científica de Arquímedes y no ha tenido una influencia mayor, es un trabajo en el cual se muestra claramente la diferencia finito-infinito. Arquímedes argumentó en la dirección de no confundir números infinitos con números muy grandes. La cantidad de granos de arena que hay en una playa , en la tierra y aún en el universo aunque es muy grande es finita. Pero la finitud del número de granos de arena le sirve a Arquímedes como referencia para hacer explícito el hecho fundamental, conocido también por los pitagóricos, que existen números tan grandes como se quiera: En nuestras palabras, si $\mathcal{V}$=10.000, $\mathcal{V}+1, \cdots, \mathcal{V}+\mathcal{V}, \cdots, \mathcal{V}+\mathcal{V}+\cdots+\mathcal{V}, \cdots, \mathcal{V}^2, \cdots, \mathcal{V}^{\mathrm{n}}, \cdots, \mathcal{V}^{\mathcal{V}}$ son números más grandes que $\mathcal{V}$. Si llamamos $\mathcal{W}$ al número $\mathcal{V}^{\mathcal{V}}$ entonces $\mathcal{W}+1, \mathcal{W}+2, \cdots, \mathcal{W}+\mathcal{W}, \cdots, \mathcal{W}+\mathcal{W}+\cdots+\mathcal{W}, \cdots, \mathcal{W}^2, \cdots, \mathcal{W}^{\mathcal{W}}$ son números finitos pero claro está , todos mucho más grandes que $\mathcal{W}$ y alguno de ellos igual al número de granos de arena que hay en la tierra.

Todo niño vive este tormento que vivieron los griegos y que cada uno, como Arquímedes, supera después de una puja con los números y sus sistemas de notación.

La teoría Arquimediana fue retomada 19 siglos después por Bonaventura Cavalieri (1578-1647)quien la modifico eliminando el contenido físico de la propuesta dada en *El Método*. En el libro *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, escrito por Galileo en forma de diálogo entre tres personajes: Salviati, un estudioso científicamente preparado, Sagredo, un laico inteligente, y Simplicio, un aristotélico obtuso, se introdujeron los términos infinitamente pequeño e infinitésimo de orden mayor los cuales aparecen en un diálogo entre Salviati y Simplicio [9].

Johann Kepler (1571-1630) empleó los infinitesimales para calcular áreas y volúmenes; para tal efecto, imaginó que una figura geométrica dada, se podía descomponer en figuras infinitesimales de tamaño y forma conveniente, de tal manera que no era difícil hallarles el área o el volumen; a continuación, calculaba la suma de todas estas áreas o volúmenes, obteniendo finalmente el área o el volumen de toda la figura.

En 1635 Cavalieri publicó su obra *Geometría por medio de los indivisibles de los continuos desarrollada de un modo nuevo* y 12 años después escribió *Seis Ejercicios Geométricos*; estos libros, no sólo fueron importantes porque a través de ellos popularizó el uso sistemático de técnicas infinitesimales para cálculos de áreas y volúmenes, sino especialmente porque en ellos se presenta nuevamente la posición atomista en la geometría.

Para él, una figura geométrica estaba constituida por infinitos indivisibles, de tal forma que el área estaba integrada por infinitas lineas paralelas equidistantes y

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.
Con una Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.
IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

Discorsi e Demostrazioni Matematiche Intorno a due nuone scienze

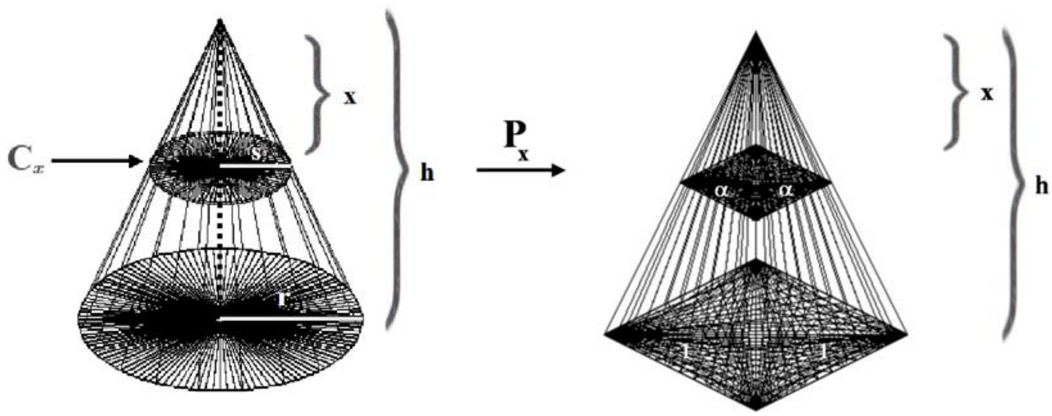
el volumen por infinitas secciones de planos paralelos y equidistantes.

El método seguido por Cavalieri para calcular áreas o volúmenes era el siguiente: Establecía una correspondencia uno a uno entre los elementos indivisibles de una figura geométrica y otra de la cual se conocía el área o el volúmen; si la razón entre los elementos indivisibles y su imagen siempre es constante, concluía que las áreas o volúmenes de las dos figuras también lo son. Este método es conocido como el Teorema de Cavalieri y su enunciado formal es el siguiente:

> *Si dos sólidos tienen igual altura , y si las secciones hechas por planos paralelos a las bases y a distancias iguales desde ellas, tienen siempre una razón dada, entonces, los volúmenes de los sólidos están también a esta razón.*

A manera de ejemplo, veamos como calculaba Cavalieri el volúmen del cono circular de radio r y altura h, comparándolo con una pirámide cuadrada P de altura h, cuya base es un cuadrado de lado 1.

Sabemos que el volumen de una pirámide de base cuadrada de lado 1 y altura h es $V(P) = \dfrac{h}{3}$. Si C_x es la sección hecha por un plano paralelo a la base del



cono a una distancia x del vértice y P_x es la sección hecha por un plano paralelo a la base de la pirámide a una distancia x del vértice, entonces, el área de C_x, es $A(C_x) = \pi s^2$ siendo s el radio de la respectiva sección. De la misma forma, se tiene que A(Px)=α^2 donde α es el lado de la sección paralela a la base de la pirámide. Por semejanza de triángulos tenemos en el cono que $\dfrac{x}{s} = hr$ y en la pirámide $\dfrac{x}{\sqrt{2}\alpha} = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$, luego $s = \dfrac{xr}{h}$ $y = \alpha = \dfrac{x}{h}$ por lo tanto

$$A(C_x) = \pi\left(\frac{xr}{h}\right)^2 \quad \text{y} \quad A(P_x) = \left(\frac{x}{h}\right)^2$$

luego $\dfrac{A(Cx)}{A(Px)} = \pi r^2$. Observese que esta última relación no es otra cosa que un equilibrio en una balanza de brazos 1 y πr^2.

Aplicando el teorema de Cavalieri o su equivalente, el principio de Arquímedes tenemos que $\dfrac{V(C)}{V(P)} = \pi\ r^2$, por lo tanto :

$$V(C) = V(P)\pi r^2 = \left(\frac{h}{3}\right)(\pi r^2) = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Cavalieri también calculó el área bajo la curva $y = x^n$ entre $x = 0$ y $x = b$, y demostró que su valor es $\dfrac{b^{n+1}}{n+1}$; este mismo problema fue resuelto en forma independiente y con procedimientos distintos por Gilles Personne de Roberval

Bonaventura Cavalieri (1578-1647)

Geometria Indivisibilibvs Continvorvm

(1602-1675), Pierre de Fermat (1601-1665), e Isaac Newton (1642-1727); aunque para $n = 2$ Arquímedes ya lo había resuelto, y para $n = 3$ Aryabhata en la India lo solucionó alrededor del año 500.

La aparición en 1620 de la obra *Geometría por medio de los indivisibles*, escrita por Bonaventura Cavalieri, hizo renacer la disputa sobre la manera de entender la división de los medios continuos en partes cada vez más pequeñas. La situación era compleja pues en ella se mezclaban íntimamente temas físicos y matemáticos con consideraciones teológicas. En este contexto, los trabajos de Cavalieri constituyen un punto de referencia particularmente significativo, puesto que su concepción del continuo fue combatida por la mayoría de los sabios jesuitas, ya que el atomismo era un punto sensible en el universo intelectual de los teólogos de la época [10].

Los *padres revisores*, quienes entre otras funciones tenían la de dar dispensa sobre lo que se debía enseñar en las escuelas de la Compañía de Jesús, emitieron una "*censura*" contra el atomismo el 10 de agosto de 1632; en ella se recordaba la prohibición de utilizar la noción de átomo indivisible, tanto en física como en matemáticas. Esta censura fué seguida por otras tres, la última que se conoce fué promulgada en 1649 [10].

El argumento más fuerte que se empleaba contra el atomismo, se centraba en que era contrario al dogma de la *transubstanciación*, el cuál afirma la conversión del pan y del vino en el cuerpo y la sangre de Cristo en el momento de la consagración durante la Eucaristía, conservando las cualidades sensibles del pan y del vino y todo ello en virtud de un milagro. Según la concepsión atomista de Galileo las cualidades sensibles no existen en las sustancias sino que aparecen cuando dichas sustancias, que son átomos en movimiento, interactúan con un medio sensible, por lo tanto no es posible conservar por ningún tipo de milagro las cualidades sensibles de una sustancia transformada en otra; de ahí que la ensen anza del atomismo en cualquiera de sus formas fuese considerada como una herejía.

GALILEO GALILEI(1564-1642)

Cavalieri era un sacerdote boloñés, de la orden de los Gesuatos de San Jerónimo, una comunidad monástica disuelta en 1668; tres años después de la publicación de "*Geometría por medio de los indivisibles de los continuos desarrollada de un modo nuevo*", Galileo publicó en 1638 "*Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*", en donde da su punto de vista sobre algunos de los problemas ligados a la concepción de infinito en matemáticas, y al referirse a Cavalieri lo llama "*nuevo Arquímedes*". Según los especialistas en el tema, los trabajos de Cavalieri no sólo ejercieron gran influencia sobre Galileo, sino que tuvieron mucho que ver con la decisión de publicar "*Diálogo relativo a dos nuevas ciencias*", obra que lo llevó al Santo Oficio y le costó la condena a prisión por el resto de su vida.

En 1649, los padres revisores prohibieron que en las escuelas de la Compañía de Jesús se enseñara la "geometría por medio de los indivisibles", es así como el padre jesuita Sforza-Pallavicino, fue sancionado por haber enseñado que "*la cantidad se compone de simples puntos*"; acusado de ser un "*adepto de Zenón*", tuvo que retractarse por orden del padre general Vincenzo Caraffa.

Para que no quedara duda de su arrepentimiento, posteriormente escribió una obra en la que refiriéndose al caracter destructor que la doctrina de los átomos había ejercido en un número considerable de discípulos, manifiesta: "*Hace vacilar en las enseñanzas de la Iglesia sobre los Misterios de la Eucaristía*"[10].

Uno de los más destacados matemáticos jesuitas del momento, el padre Paul Guldin, escribió una obra en cuatro volúmenes titulada "*El centro de gravedad*", en la cual critica acerbamente el método de los indivisibles. La lucha contra la geometría por medio de los indivisibles fue sin duda un hecho lamentable para el desarrollo de la matemática, ya que este nuevo método posteriormente sería la base de muchas de las más importantes aplicaciones de la integración y particularmente en la cuadratura de áreas de regiones delimitadas por curvas.

Si bien es cierto, el papel que desempeñaron los padres revisores fue anticientífico, 350 años después, la Iglesia por intermedio del Papa Juan Pablo II, no sólo reconoció la gravedad del error cometido, sino que también presentó excusas por estas equivocaciones citando concretamente el caso de Galileo y otros.

Bibliografía

[1] Vera F., *Científicos Griegos*, Aguilar, Madrid, 1970.

[2] C.Marx y F. Engels, *La ideología alemana*, Obras completas, t. III, Mir, Moscú, 1955.

[3] Dynnik M.A., *Historia de la Filosofía*, t. I, Grijalbo, S.A., México, 1968.

[4] Heath, T., *A History of Greek Mathematics*, V. I, Dover Publications, Inc. New York,1981.

[5] Castro I. *Temas de teoría de anillos*, teoría de cuerpos y números algebráicos, t. III, Departamento de Matemáticas y Estadística Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1994.

[6] Pérez, J.H.. "*La História al servicio de la pedagogía*". Matemática Enseñanza Universitária, Nº 18, Bogotá, Marzo, 1981.

[7] Pérez, J.H.. "*El método de Arquímedes*". Boletín de Matemáticas. Vol. XVII Nº 1-2-3, Bogotá, 1983.

[8] Del Grande J. "*The method of Archimedes*". The mathematics teacher, vol 86, march 1993.

[9] Galilei, G. *Consideraciones y Demostraciones Matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, Editora Nacional. Madrid.

[10] Festa E. *La disputa del atomismo: Galileo, Cavalieri y los jesuitas.* Mundo Científico, Vol X, Nº 107, Barcelona,

[11] Russell B. *Autobiografía.* Sigma El Mundo de la Matemática, Barcelona.

[12] Vardi I., *Arquimedes ante lo Imnumerable, Investigación y Ciencia*, Temas 23.