MEDIACIÓN SEMIÓTICA Y CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO DEL RAYO A TRAVÉS DE SU USO[1]

Semiotic mediation and meaning-making of ray through its use

Leonor Camargo, Patricia Perry, Carmen Samper, Óscar Molina

Universidad Pedagógica Nacional, Colombia

Resumen

Presentamos una conceptualización de las nociones "construcción de significado" y "mediación semiótica del profesor" ilustradas con el análisis de la construcción de significado del objeto geométrico rayo, a la luz de una perspectiva semiótica inspirada en la idea peirceana de signo triádico. Introducimos el concepto "objeto dinámico didáctico" derivado de la identificación de signos-objeto, sugeridos por Peirce como uno de los componentes de la semiosis. Ejemplificamos el tipo de análisis con el que recurrimos a las dos nociones mencionadas para estudiar a fondo cómo se construye conocimiento matemático en el aula, con un fragmento de clase tomado de un curso de geometría de nivel universitario.

Palabras clave: *construcción de significado, mediación semiótica del profesor, análisis semiótico desde una perspectiva peirceana, objeto dinámico didáctico*

Abstract

We present a conceptualization of the notions "meaning-making" and "teacher semiotic mediation" illustrated with the analysis of meaning-making of the geometric object ray, in the light of a semiotic perspective inspired by the Peircean idea of triadic sign. We introduce the concept of "didactic dynamic object" derived from the identification of sign-objects, suggested by Peirce as one of the components of semiosis. We illustrate the type of analysis, in which we resorted to the two notions mentioned, to study in depth how mathematical knowledge is constructed, with a class fragment from a university level geometry course.

Keywords: *meaning-making, teacher semiotic mediation, semiotic analysis from a Peircean perspective, didactic dynamic object*

INTRODUCCIÓN

En el sistema educativo colombiano, el objeto geométrico rayo se introduce en los primeros años de educación primaria, se menciona ocasionalmente en secundaria y se usa en cursos universitarios de geometría euclidiana. En primaria, por lo regular, se presenta mediante una representación icónica, como sinónimo de semirrecta; se describe como porción de una recta que tiene "un punto inicial y [otros puntos] que siguen indefinidamente en una dirección" (Camargo, Castiblanco, Leguizamón y Samper, 2003) y se establece visualmente su distinción con una recta y un segmento. En secundaria, en ocasiones se introduce la definición de rayo y se proponen ejercicios tendientes a interpretar los términos involucrados. Por ejemplo, se define el rayo *LK* como "el conjunto de puntos del segmento *LK* junto con todos los demás puntos de la recta *LK,* tal que *K* esté entre cualquiera de estos puntos y *L* (Samper, 2008). A partir de la definición, se proponen algunos ejercicios de reconocimiento y diferenciación de rayos y se definen rayos opuestos. Consideramos que la construcción de significado de rayo va más allá de la interpretación de su definición; se puede continuar a través del uso de la definición en la resolución de problemas matemáticos. Específicamente, es un objeto que usado con los números reales positivos permite justificar que en un sistema teórico de geometría plana euclidiana se puede determinar un punto en una interestancia y a una distancia dada de otro.[2]

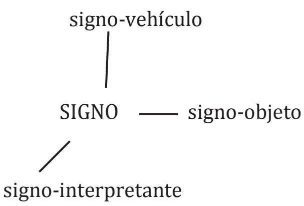
Camargo, L., Perry, P., Samper, C., Molina, O. (2014). Mediación semiótica y construcción de significado del rayo a través de su uso. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 197-206). Salamanca: SEIEM.

Como parte de un proyecto de investigación en curso, cuya problemática se centra en la búsqueda de mecanismos para propiciar y favorecer la construcción de significados en el aula de clase, de nivel universitario, y se propone interpretar en detalle cómo se da este proceso, optamos por recurrir a elementos de la teoría del Signo triádico de Peirce basándonos en elaboraciones de dicha teoría realizadas por Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012). Consideramos que esta teoría es útil para describir el aprendizaje de las matemáticas e interpretar la gestión del profesor denominada mediación semiótica. Las nociones de construcción de significado (Robles, Del Castillo y Font, 2010) y mediación semiótica del profesor (Muñoz-Catalán, Carrillo y Climent, 2010; Salinas, 2010; Mariotti, 2012; Samper, Camargo, Molina y Perry, 2013) son constructos útiles, que tienen su origen en la perspectiva sociocultural de Vygotsky (1995), para describir, interpretar y explicar fenómenos específicos de aprendizaje, dado la aproximación metodológica de la enseñanza con la que se desarrolla el curso de geometría plana, escenario de varias investigaciones que desde 2004 hemos adelantado en torno a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración (e. g., Camargo, Samper, Perry, Molina y Echeverry, 2009; Molina, Samper, Perry y Camargo, 2011).

El objetivo de este escrito es presentar un análisis de un episodio de aula, en el que se avanza en la construcción de significado de rayo[3], con la mediación semiótica del profesor. Nos interesa contribuir a precisar lo que significa adoptar una perspectiva semiótica de la enseñanza y del aprendizaje inspirada en la idea peirceana de Signo triádico, no solo como aporte a la investigación sino también a la enseñanza de conceptos matemáticos. Comenzamos delineando los elementos centrales de la teoría. Luego presentamos una síntesis del proceso metodológico investigativo, incluyendo la descripción del contexto experimental. Enseguida, ejemplificamos el análisis hecho al episodio y exponemos los resultados de dicho análisis. Concluimos el texto con algunas reflexiones que son producto del análisis realizado.

MARCO DE REFERENCIA

La perspectiva semiótica de la enseñanza y el aprendizaje que desarrollan Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) está basada en la teoría del Signo triádico de Peirce. Desde el punto de vista de Peirce, la semiosis es la actividad comunicativa o mental en la que se crean o se usan SIGNOS.

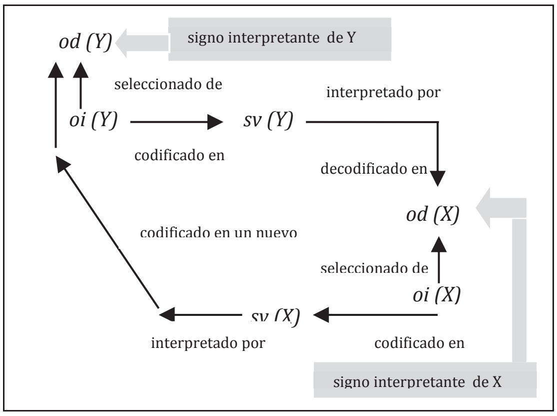


En un SIGNO se ponen en relación tres componentes: signo-objeto (so), a lo que se alude en la comunicación o el pensamiento; signo-vehículo (sv), representación con la que se alude al objeto (e. g., palabras, gestos, gráficos, combinación de estos tres elementos, etc.); y signo-interpretante (si), lo que produce el signo-vehículo en la mente de quien lo percibe e interpreta.

A continuación, describimos, de manera esquemática, la semiosis que tiene lugar en un intercambio verbal constituido por dos turnos. Para dar inicio a la comunicación, una persona Y elige un determinado aspecto de un *signo-objeto* que hace parte de su *signo-interpretante,* lo codifica y expresa un *signo-vehículo* dirigido a una persona X. En un acto de interpretación de lo dicho por Y, que se da en el marco de su conocimiento y experiencia, X decodifica el *signo-vehículo* emitido por Y, y surge en la mente de X un *signo-interpretante*, que determina su *signo-objeto* que puede o no estar en consonancia con el *signo-objeto* incluido en el *signo-vehículo* de Y. En su turno, X centra la atención en un aspecto de su *signo objeto* y lo codifica en un *signo-vehículo* dirigido a Y. Ahora es Y, quien en el marco de su conocimiento y experiencia, decodifica el *signo-vehículo* emitido por X y surge en Y su *signo-interpretante* que determina un nuevo *signo-objeto.*

La complejidad del proceso descrito hace evidente la necesidad y conveniencia de identificar clases de *signos-objeto, signos-interpretante* y *signos-vehículo.* Para efectos del análisis realizado al episodio que es tema de este documento, solo nos referimos a la distinción que hacen Sáenz-

Ludlow y Zellweger (2012) de tres clases de *signo-objeto:* el *Objeto Real* (*OR*), matemático en nuestro caso, que es un objeto aceptado por la comunidad del discurso matemático de referencia; el *objeto inmediato del emisor* (*oi*), constituido por un aspecto específico del *OR* que el emisor representa con un *signo-vehículo*; y el *objeto dinámico del receptor* (*od*), que se refiere a un aspecto de lo interpretado por el receptor, a partir del *signo-vehículo* del emisor.



Esta clasificación pone en evidencia la complejidad de la comunicación, no solo porque los objetos *inmediato del emisor* y *dinámico del receptor* generalmente no están en consonancia, sino porque el *objeto inmediato del emisor* está explícito en el *signo-vehículo* que lo acarrea, mientras que el *objeto dinámico del receptor* es generado en su *signo-interpretante*, no es explícito, y debe ser inferido a través de uno o más *signos-vehículos* producidos por el receptor, cuando asume el papel de emisor. Esto hace que sea difícil distinguir claramente el *objeto dinámico* del *objeto inmediato* cuando la persona cambia su papel de receptor a emisor, pero no se da un cambio sustancial en el aspecto del *OR* al que la persona se está refiriendo.

En particular, en una interacción dialógica en el aula, cuyo propósito es el aprendizaje de los estudiantes con el apoyo de un experto representante de la comunidad del discurso matemático, se produce una semiosis colectiva cuya intención es la *construcción de significado* de un *Objeto Real* matemático, ligado a una meta educativa particular. La comunicación genera una secuencia de SIGNOS triádicos. Los *objetos inmediatos del profesor,* son aspectos del *OR* que quiere representar en sus *signos-vehículos.* Los *objetos dinámicos de los estudiantes,* inferidos a partir de sus respectivos *objetos inmediatos,* y que hacen parte de sus *signos-interpretantes,* están en menor o mayor coincidencia con los *objetos inmediatos* del profesor. La meta de la enseñanza es lograr la convergencia de los *objetos dinámicos* de los estudiantes hacia *objetos inmediatos* que se correspondan con los *objetos inmediatos del profesor.*

Llamamos *mediación semiótica del profesor* a las acciones comunicativas deliberadas que realiza con el propósito de lograr la convergencia mencionada en el párrafo previo. Tal propósito hace que, en el intercambio comunicativo, se vea en la necesidad de ajustar sus *objetos inmediatos*, a aquellos aspectos interpretados por él, cuando actúa como receptor, que considera útiles en la evolución que pretende. Por esta razón, la mayoría de los *objetos dinámicos* generados en sus *signos-interpretantes* no son *objetos dinámicos* matemáticos "genuinos" pues el objetivo de la interacción no se centra en que el profesor avance en la construcción de significado del *OR,* objetivo de la interacción, (aun cuando eventualmente sí lo haga), sino contribuir a que sus estudiantes sí avancen en ello. En Perry, Camargo, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina (2014) les pusimos el adjetivo "didácticos" y los llamamos *objetos dinámicos didácticos del profesor* (*odd*). Con este constructo pretendemos interpretar la mediación semiótica del profesor en acciones que resultan de las interpretaciones que hace de los significados que los estudiantes van construyendo.

ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

El episodio analizado se compone de interacciones comunicativas entre los estudiantes, cuando resolvían algún problema en grupos de dos o tres personas (constituidos voluntariamente), con el apoyo del programa de geometría dinámica Cabri, o entre el profesor y todos los estudiantes, durante una puesta en común de las soluciones al problema. Específicamente se consideraron algunos momentos de dos clases de una implementación del curso de geometría euclidiana plana de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). Estaba constituido en esta oportunidad por 14 estudiantes cuyas edades estaban entre 18 y 24 años. El curso se ubica en el segundo semestre del programa y tiene como propósito que los estudiantes aprendan a demostrar, participando en actividad demostrativa asociada a la resolución de problemas geométricos abiertos que incluyen la realización y exploración de una construcción en Cabri, a partir de la cual deben formular conjeturas y validarlas en el sistema teórico que se va conformando en el curso. El profesor, coautor de este artículo, tiene amplia experiencia en el respectivo desarrollo curricular. Una de sus tareas en las clases consiste en guiar la exposición del trabajo de los grupos para discutir las conjeturas formuladas, promover la demostración de aquellas que se admiten como ciertas e institucionalizarlas como teoremas del sistema.

Desde 2004, el curso de geometría plana ha sido escenario de un experimento de enseñanza (Cobb y Whitenack, 1996) que busca analizar diversos fenómenos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración (Camargo, Samper, Perry, Molina y Echeverry, 2009; Molina, Samper, Perry y Camargo, 2011). A continuación presentamos algunos aspectos del registro de información, la construcción de datos experimentales y el análisis de los mismos.

Registro de información

La información sobre la actividad semiótica desplegada en la clase, provino de cinco fuentes: (i) video grabaciones de todas las clases de geometría plana del segundo semestre de 2013, hechas con dos cámaras; se accionaban para enfocar al profesor, el tablero, los computadores o a los estudiantes, según el interés de capturar la interacción comunicativa y poderla reproducir lo más fielmente posible; (ii) grabaciones de audio tomadas con dos dispositivos: uno de ellos situado muy cerca del profesor y el otro cerca a los estudiantes; (iii) notas de clase de los estudiantes, como tarea cotidiana en la clase; distribuidos por grupos, los estudiantes se turnaban a diario para reconstruir los principales aspectos tratados en la clase y enviar las notas al profesor; él las revisaba y las ubicaba en una carpeta virtual en la web para uso de todo el grupo; (iv) notas tomadas por algún miembro del equipo de investigación que acompañaba las clases y hacía observaciones no participantes, *in situ,* de los aspectos de la interacción que le parecía oportuno registrar y comentar en las reuniones de investigación; (v) reconstrucción narrativa a cargo del profesor en las reuniones de investigación para evaluar los sucesos de la clase y definir el rumbo de nuevas acciones.

Construcción de datos experimentales

Para la construcción del episodio, cuyo análisis se presenta aquí, se revisaron las interacciones registradas en las video grabaciones y las notas de clase del 5, 11 y 12 de septiembre, clases en las que se introdujo el objeto rayo y se usó para demostrar, en la última clase, el Teorema de Localización de Puntos (TLP)[4]. De acuerdo a la aproximación metodológica del curso, a raíz de una tarea, los estudiantes se involucraron en un proceso de resolución de un problema abierto con Cabri que los llevó a realizar una construcción que podía interpretarse haciendo referencia a un rayo. Se expusieron y se estudiaron las conjeturas que formularon, con el objetivo de determinar si el proceso de construcción y exploración realizada se podía validar teóricamente.

Para posibilitar que el lector se haga una idea global de lo sucedido en esas tres clases, presentamos un recuento rápido de estas, aunque el episodio se construyó únicamente con fragmentos de las clases del 5/09 y 12/09. La clase del 5/09 comienza con la presentación de las producciones de dos grupos de estudiantes, fruto de la resolución del problema "de los cuatro puntos" propuesto en una clase anterior, que el profesor recuerda así: *Dados tres puntos A, B y C, nos preguntan si es posible construir un punto D tal que [los segmentos] AB y CD se bisequen.* Con el problema, se busca que los estudiantes tengan la experiencia de construir un punto con unas condiciones específicas: en una interestancia[5] dada y a una distancia específica de otro punto. Casi todos los grupos se valen de una circunferencia con centro en el punto medio del segmento *AB* y radio *CM*[6]. Pero como el objeto circunferencia no hace parte del sistema teórico construido hasta el momento, el problema busca preparar el camino para introducir el TLP como sustituto del Postulado recta-números reales[7], el cual permite justificar el procedimiento usado para determinar el punto *D* a una distancia de *M* igual a *CM*. El episodio se construye a partir de la exposición de Juan, del trabajo realizado por María, Elisa y él. El profesor los escoge precisamente porque ellos se valen de un rayo, además de la circunferencia, para encontrar el punto *D*. Los fragmentos de la interacción correspondiente al 5/09, escogidos para construir el episodio, incluyen: la explicación de Juan sobre cómo construyeron el punto *D,* una interacción comunicativa en la que discuten cuál es el término apropiado para referirse al rayo y si se puede denominar vector o semirrecta, la comparación que se hace de la construcción del grupo de Juan con la hecha por otros grupos que usaron una recta y no un rayo, y la escritura en el tablero del listado de conjeturas obtenidas, fruto de la resolución del problema.

En la clase del 11/09 se demuestra la conjetura: Dados tres puntos no colineales *A, B* y *C*, si *D* pertenece a la recta *CM*, *D* es diferente de *C, M* punto medio del segmento *AB*, y *MD* igual a *MC*, entonces el segmento *AB* y el segmento *CD* se bisecan. Para justificar la interestancia *C-M-D* se valen del Postulado recta-números reales y descartan las opciones *D-C-M* y *C-D-M*. Finalmente, dado que Juan menciona el uso de un rayo se introduce la definición: "Un rayo *AB* es la unión del segmento *AB* con el conjunto formado por los puntos *Y* tal que *A-B-Y*".

En la clase del 12/09, el profesor les pide analizar si la demostración cambia o no, en caso de construir el punto *D* usando el rayo *CM* y no la recta *CM.* Los fragmentos de clase que se incluyen en la construcción del episodio contienen la reconstrucción de los primeros pasos de la demostración hecha el 11 de septiembre donde se resalta la diferencia entre las garantías teóricas que permiten validar la interestancia *C-M-D* según si se usa una recta o un rayo. En el caso de usar un rayo, es necesario expresar la pertenencia de un punto a un rayo como una disyunción, valiéndose de la unión incluida en la definición, para luego poder identificar dos posibles interestancias y descartar una. El episodio queda entonces constituido por fragmentos de interacción de las clases del 5/09 y 12/09, aunque en algunas intervenciones se aluda a sucesos del 11/09.

Una vez seleccionados los fragmentos de interacción para el análisis, se hizo la trascripción de los mismos, procurando una reproducción fiel de la interacción comunicativa. Esta se revisó varias veces, cotejando los registros de audio y video, y se incluyeron anotaciones entre paréntesis, para aclarar algunos aspectos del contexto de las intervenciones. Después, se hizo un primer ejercicio de análisis, poniendo en juego el marco teórico, lo que permitió dividir el episodio en 10 ciclos de interpretación, cada uno alusivo a un *objeto inmediato* introducido por el profesor; tres miembros del equipo de investigación resaltaron los *signos-vehículos* de profesor y estudiantes (lo que dicen), que consideraban relevantes para la reconstrucción de la semiosis correspondiente al significado del rayo, identificaron en los *signos-vehículos* los *objetos inmediatos*, como aquellos aspectos del significado de rayo explícitos en tales signos, y propusieron inferencias acerca de los *signos-interpretantes* (lo que piensan)*, objetos dinámicos* (aspectos del significado que se percibe están en los interpretantes y se codifican en el siguiente *signo-vehículo* dando lugar a otro ciclo) y *objetos dinámicos didácticos del profesor* (aspectos del significado que el profesor espera movilizar con la mediación y que se codifican en el siguiente ciclo de la semiosis). Posteriores ejercicios de depuración permitieron afinar el análisis de cada ciclo y unificar las formulaciones para hacer referencia a cada uno de los componentes de la semiosis.

En la Tabla 1 ilustramos el ejercicio analítico realizado para cada ciclo. Corresponde al ciclo 8 del episodio, ocurrido después de revisar el procedimiento de construcción del punto *D* (ver enunciado del problema), comparar las interestancias resultantes si se construye *D* usando la recta *CM* o el rayo *CM,* diferenciar las garantías teóricas para la demostración de la conjetura, según si se usa la recta *CM* o el rayo *CM*, y establecer la pertenencia de un punto de un rayo a alguno de los conjuntos de la unión que aparece en la definición. El profesor considera necesario revisar qué significa que un punto pertenezca a un rayo y qué relación tiene con la disyunción mencionada en el paso de la demostración. En la primera columna se encuentra la identificación de la persona o personas que toma(n) la palabra. En la segunda columna está la verbalización: resaltado en gris, se encuentra el *signo-vehículo* de interés. En el caso del profesor, él pregunta por qué aparece una "o" cuando se expresa el significado de la pertenencia de un punto a un rayo y pide hacer explícita la definición. En el caso de los estudiantes, ellos definen el rayo *CM;* su intervención es parafraseada por el profesor, a manera de aprobación. En la tercera columna se identifica el *objeto inmediato* del profesor y se infiere un *objeto dinámico didáctico del profesor* y un *objeto inmediato del estudiante*. No en todos los ciclos se identifican los mismos componentes de la semiosis ni en el mismo orden. Eso depende de la dinámica de la interacción en cada caso. En este ciclo no hay suficiente información para inferir un objeto dinámico de los estudiantes.

Tabla 1. Ejemplificación del análisis realizado para cada fragmento

<table>
<tr><td>Profesor:</td><td>C, M, Y. (Ha quedado escrito en el tablero: "D pertenece al segmento CM o D pertenece al conjunto de los Y tal que C-M-Y") ¿Ven el asunto? Ahora, ¿por qué acá aparece una "o"? Surge esta pregunta. Porque cuando analizamos la definición de rayo… en términos de notación ¿qué es el rayo CM? El rayo CM ¿es igual a qué?</td><td rowspan="5">oi-p: disyunción obtenida como consecuencia de la unión en la definición de rayo. (Se identifica de manera explícita en el sv)

odd-p: El uso de la definición de rayo en la demostración requiere expresar la pertenencia de un punto a un rayo en términos de disyunción, afirmando que el punto puede pertenecer a cualquiera de los conjuntos que componen la definición. (Este odd se infiere del sv emitido por el profesor en el ciclo anterior).

oi-estudiante: definición de rayo en términos de unión de dos conjuntos. (Se identifica de manera explícita en su sv).</td></tr>
<tr><td>Estudiante:</td><td>Al segmento CM</td></tr>
<tr><td>Profesor:</td><td>Al segmento CM, ajá.</td></tr>
<tr><td>Estudiante:</td><td>unido con los puntos Y tal que C, M, Y.</td></tr>
<tr><td>Profesor:</td><td>unido con… los puntos Y tales que C, M, Y ¿cierto? Eso es lo que significa en términos de notación. ¿Se acuerdan que yo les decía que la definición de unión en términos verbales desde la lógica tiene el conector o? Eso significa que si yo quiero hablar de un punto [D] que pertenezca a este conjunto (señala la notación del rayo CM), que es el rayo, entonces tengo que decir: D está en este conjunto (señala la notación del segmento CM) o D está en este conjunto (señala la otra expresión que hace parte de la definición del rayo CM), ¿ven el asunto? […].</td></tr>
</table>

RESULTADOS

Exponemos los resultados del análisis del episodio, con respecto a dos asuntos, aunque por falta de espacio no presentamos el análisis de los diez ciclos de interpretación. El primero es la construcción de significado del objeto rayo, ligada al uso de su definición como garantía teórica en una demostración. Específicamente, se busca que los estudiantes se percaten de la unión que define al rayo, y que reconozcan que si un punto pertenece a un rayo debe pertenecer exclusivamente a uno de dos conjuntos disyuntos. En este caso, el análisis de la evolución de los *objetos inmediatos de los estudiantes y de los objetos dinámicos* de los estudiantes, a lo largo de los diez ciclos, es central. El segundo asunto es la mediación semiótica del profesor. En este caso, los *objetos inmediatos del profesor* y los *objetos dinámicos didácticos*, nos permiten explicar la mediación de forma detallada.

Acerca de la construcción del significado de rayo

En el análisis del episodio pudimos identificar un avance en la evolución del significado de rayo a través de los *objetos inmediatos* de los estudiantes, que construyen a partir de la interpretación que hacen del *OR* rayo, en su uso, promovido por los *signos-vehículos* del profesor. Se logra una evolución en los *objetos-dinámicos* contenidos en los *signos-interpretantes*, desde la representación geométrica de un rayo, hasta la interpretación de lo que significa que un punto pertenezca a un rayo, aspecto central para hacer operativa la definición en una demostración. En la Figura 1 ilustramos la evolución a la que hacemos referencia.

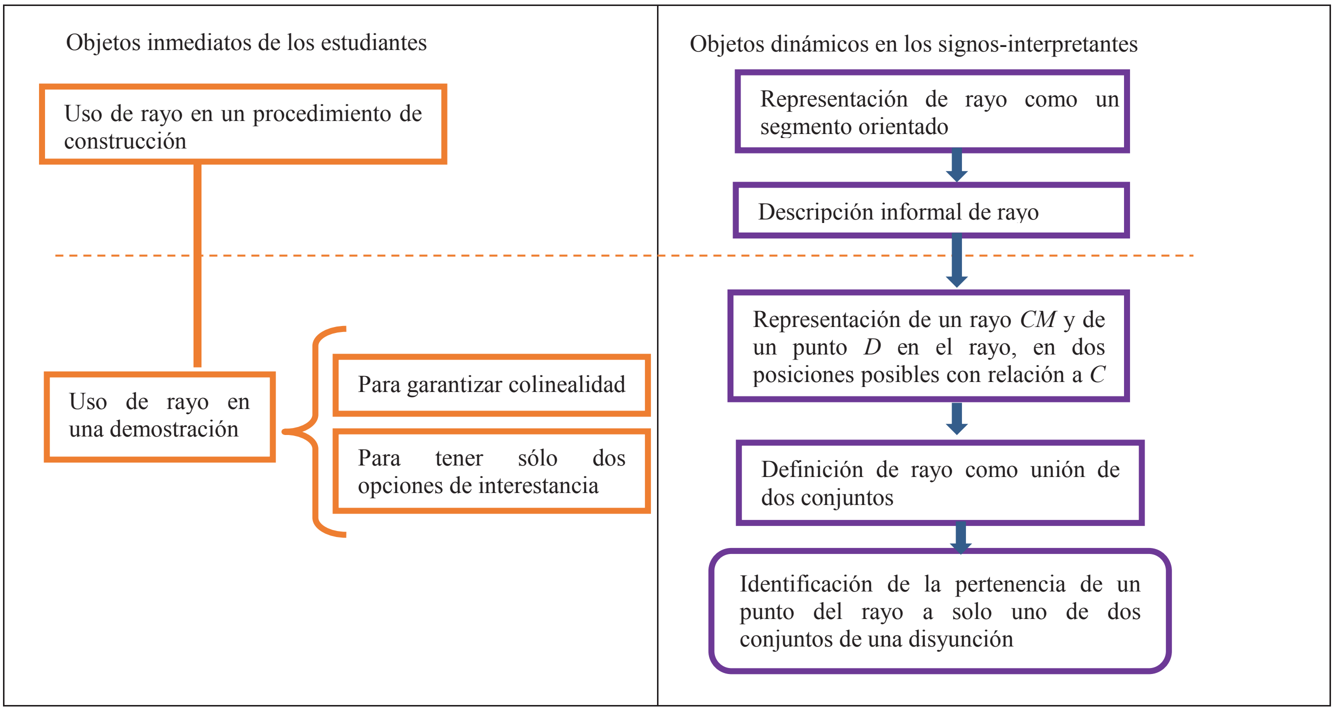


Figura1. Esquema de la evolución en la construcción de significado del objeto rayo

Inicialmente, el significado de rayo se asocia a su representación gráfica. En el procedimiento de construcción del punto *D,* tal que los segmentos *AB* y *CD* se bisequen (ver enunciado del problema), es necesario garantizar que el punto pertenezca a la recta *CM,* con *M* punto medio del segmento *AB* y luego que *D* quede a la misma distancia que *C,* de *M.* Los estudiantes recurren a la recta *CM* o al rayo *CM* para garantizar la colinealidad de *C, M* y *D.* Para efectos de la construcción en Cabri, no es necesario usar una recta, por eso algunos estudiantes usan un rayo. El profesor no desaprovecha la oportunidad para recordar la notación y la definición de este trabajada en el curso previo.

El significado inicial da paso a otras interpretaciones, cada vez más elaboradas. La representación geométrica se complementa con los nombres del punto origen *C*, otro punto en el rayo *M* y un tercer punto, *D,* que pertenece al rayo, hecho que permite afirmar que los tres puntos son colineales, aunque no se sepa la ubicación de *D* respecto a los otros dos. Con ello, el significado del rayo se asocia a su uso para garantizar la colinealidad de tres puntos. Luego, el significado se asocia a la definición matemática de rayo, especialmente a la identificación de este como unión de conjuntos. Y finalmente, la construcción de significado se hace más compleja aún, cuando se interpreta la implicación de la pertenencia de un punto a un rayo como una disyunción en términos de la pertenencia a uno u otro conjunto que componen la definición. Este último significado es potente matemáticamente, pues se usa en demostraciones que requieren validar interestancias.

Acerca de la mediación semiótica del profesor

La mediación semiótica del profesor se lleva a cabo a partir de los *objetos-inmediatos* que introduce en sus *signos-vehículos.* Como representante experto de la comunidad de discurso matemático tiene la responsabilidad de modular el acercamiento de los estudiantes al *Objeto Real* matemático presente en la interacción comunicativa. Consciente de su papel, aprovecha la oportunidad para contribuir a la evolución de los significados de los objetos matemáticos involucrados en el teorema, por parte de los estudiantes. Pero no es un asunto que pueda planearse completamente y de manera lineal, pues depende de los *signos-interpretantes* de los estudiantes, que el profesor va infiriendo de los signos vehículos que ellos producen. Algunos *signos-vehículos* del profesor no resultan tan pertinentes como otros para favorecer la construcción de *objetos dinámicos* de los estudiantes, cercanos al *Objeto Real* matemático. Además, los interpretantes de los estudiantes no evolucionan todos al mismo tiempo.

Objetos inmediatos del profesor	Objetos dinámicos didácticos del profesor
$\boldsymbol{oi_1}$ Procedimiento de construcción de punto *D* en interestancia dada y a una distancia específica de un punto que se tiene, en el que se usa un rayo.	
$\boldsymbol{oi_2}$ Denominación del objeto construido, notación y definición.	
$\boldsymbol{oi_3}$ Diferencia de garantías para interestancias *C-D-M* y *C-M-D*, si se usa recta o rayo.	
$\boldsymbol{oi_4}$ Justificación de colinealidad de *C, M, D* dado que *D* pertenece a la recta *CM*.	$\boldsymbol{odd_1}$ Respecto de la inclusión de una recta en la construcción del punto *D*, es necesario hacer explícito que la construcción permite afirmar la colinealidad de *C, D* y *M*.
$\boldsymbol{oi_5}$ Diferencia de las posibilidades de interestancia que puede tener un punto *D* cuando pertenece a una recta *CM* o un rayo *CM*.	$\boldsymbol{odd_2}$ Respecto de las posibilidades de interestancia es necesario diferenciar los casos en los que *D* pertenece a recta o a rayo.
$\boldsymbol{oi_6}$ Justificación, por definición de rayo, de que solo hay dos posibilidades de interestancia.	$\boldsymbol{odd_3}$ Sobre la inclusión de un rayo en la construcción del punto *D* hay que reconocer que son posibles solo dos interestancias.
$\boldsymbol{oi_7}$ Pertenencia de un punto de un rayo a solo uno de los conjuntos involucrados en la definición.	$\boldsymbol{odd_4}$ En relación a lo que significa que *D* esté en el rayo *CM,* se debe precisar: la unión de dos conjuntos que conforman el rayo; la relación entre unión de dos conjuntos y la disyunción de proposiciones; el significado de pertenencia a un conjunto.
$\boldsymbol{oi_8}$ Disyunción obtenida como consecuencia de la unión en la definición de rayo.	$\boldsymbol{odd_5}$ En relación a la unión en la definición de rayo *CM*, que un punto pertenezca a un rayo conduce a considerar las dos opciones que corresponden a la disyunción.
$\boldsymbol{oi_9}$ Posibilidades de punto *D* en segmento *CM*: *C-D-M,* {D}= {C} o {D}={M}.	$\boldsymbol{odd_6}$ Sobre el análisis de la pertenencia de *D* a un segmento *CM* : hay que considerar si *D* puede ser *C* o *M,* además de la posible interestancia *C-D-M.*
$\boldsymbol{oi_{10}}$ Cambios en garantías en la demostración de la conjetura correspondiente al problema de los cuatro puntos, si se usa recta o si se usa rayo.	$\boldsymbol{odd_7}$ En relación a las opciones de interestancia si se construye el punto *D* sobre un rayo o sobre una recta, hay que identificar que los casos de interestancia diferenciados se deben al uso de garantías diferentes.

Figura 2. Esquema de la mediación semiótica del profesor

Algunos de los *objetos inmediatos* y los *objetos dinámicos didácticos* más significativos del episodio se presentan en la Figura 2. El primer aspecto del *OR* en el que se enfoca el profesor es el procedimiento de construcción del punto *D* en el que algunos estudiantes usan un rayo (oi_1) (ver problema de los cuatro puntos). Ello conduce de manera casi natural a la necesidad de acordar una denominación, una notación y una definición (oi_2). El profesor introduce un tercer *oi* (oi_3) con una pregunta que pretende enfocar la diferencia en las garantías teóricas para justificar las posibles interestancias, según si se ha construido una recta o un rayo. Sin embargo, muy rápidamente se da cuenta de que su tratamiento sería prematuro y, en consecuencia, enfoca la atención en la justificación de la colinealidad de los puntos *C, D* y *M* (oi_4); parece percibir que los estudiantes no han notado esta implicación (odd_1). Además se enfoca en el número de interestancias que se pueden obtener si *D* se ubica en la recta *CM* o en el rayo *CM* (oi_5 y odd_2). A continuación, introduce otro *objeto inmediato* (oi_6) con el que pretende que los estudiantes capten que la inclusión del rayo en la construcción solo da lugar a dos posibilidades de interestancia, *C-M-D* o *C-D-M.* Probablemente piensa que los estudiantes no han caído en cuenta de esta consecuencia (odd_3). Una nueva intervención del profesor busca que los estudiantes relacionen la definición de rayo con la pertenencia del punto *D* a alguno de los conjuntos de una disyunción (oi_7) porque quizá supone que los estudiantes no han precisado que al haber definido rayo como la unión de dos conjuntos, el punto *D* puede pertenecer a alguno de los dos conjuntos (odd_4). Después, con el siguiente *objeto-inmediato* (oi_8) el profesor se centra en las implicaciones de la "o" en la interpretación de la definición de rayo; probablemente piensa que los estudiantes deben fijarse en la necesidad de considerar las dos opciones que genera la disyunción (odd_5). Luego, se analizan las posibilidades relacionadas con la ubicación de un punto *D* en el rayo (oi_9 y odd_6), para finalizar retomando el interés por los cambios en las garantías en la demostración del enunciado de la conjetura correspondiente al problema de los cuatro puntos, según si se usa una recta *CM* o un rayo *CM* (oi_{10}). El profesor interpreta que los estudiantes necesitan identificar que los dos casos de interestancia que surgen, cuando se construye el rayo *CM,* precisamente se deben a la unión que define rayo (odd_7).

CONCLUSIONES

Con este artículo hemos querido ilustrar el tipo de análisis que estamos realizando con la intención de identificar, en detalle, el proceso de construcción de significado de un objeto matemático, objetivo último de nuestra investigación. El marco teórico nos ha permitido ver el aprendizaje como un proceso de evolución de significados personales de los objetos geométricos hacia significados adoptados por la comunidad de discurso matemático de referencia. Tal evolución se hace evidente en los cambios en los *objetos dinámicos,* contenidos en los *signos-interpretantes* e inferidos de los *signos-vehículos* de los estudiantes. En esta ponencia, en particular, hemos podido puntualizar qué significa construir el significado del rayo, ligado al uso de su definición en una demostración. Análisis similares realizados con otros objetos matemáticos nos permiten entrever la utilidad del marco de referencia con fines investigativos y divulgativos.

El proceso de construcción de significado se logra a medida que se van construyendo *objetos inmediatos*, fruto de la interacción comunicativa con un experto. Por esto ligamos estrechamente tal evolución a la mediación semiótica del profesor y a la ruta didáctica que siguió en la mediación. Consideramos que la identificación de *objetos dinámicos didácticos* apunta a identificar acciones explícitas de mediación del profesor que asume el reto de contribuir a construir significado. La perspectiva semiótica sugerida por Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) se constituye en un marco de referencia útil para profundizar en la mediación puesto que brinda herramientas analíticas para identificar de qué manera el experto guía la evolución de significados matemáticos. No por ello es un reto complejo pues en ocasiones algunas respuestas de los estudiantes se pueden ver como eficaces con relación a una interpretación de una pregunta del profesor, pero no capturan el objeto inmediato que el profesor pretende que se identifique. Esto le impone al profesor un esfuerzo adicional por redireccionar la semiosis por otra vía, en busca de un resultado eficaz.

Referencias

Camargo, L., Castiblanco, C., Leguizamón, C. y Samper, C. (2003). *Espiral 2*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Norma.

Camargo, L., Samper, C., Perry, P. Molina, Ó. y Echeverry, A. (2009). Use of dragging as organizer for conjecture validation. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proc. 36rd Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 257-264). Thessaloniki, Greece: PME.

Cobb, P. y Whitenack, J. W. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom videorecordings and transcripts. *Educational Studies in Mathematics, 30*(3*),* 213-228.

Mariotti, M. A. (2012). ICT as opportunities for teaching-learning in a mathematics classroom: The semiotic potential of artefacts. En T. Y. Tso (Ed.), *Proc. 36th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 25-40). Taipei, Taiwan: PME

Molina, Ó., Samper, C., Perry, P. y Camargo, L. (2011). Actividad demostrativa: participar en la producción de un teorema. *Revista Integración, 29*(1), 73-96.

Muñoz-Catalán, M.C., Carrillo, J. y Climent, N. (2010). Modelo de análisis de interacciones en un contexto colaborativo de desarrollo profesional. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 451-462). Lleida, España: SEIEM.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, Ó. (en evaluación). *Teacher semiotic mediation and student meaning-making: A Peircean perspective.*

Robles, M.G., Del Castillo, A.G., Font, V. (2010). La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 523-532). Lleida, España: SEIEM.

Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. En *Pre-proceedings of the 12th ICME*. Bajado de http://www.icme12.org/data/ICME12_Pre-proceedings.zip

Salinas, J. (2010). El uso de la historia de las matemáticas para el aprendizaje de la geometría en alumnos del bachillerato. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 557-568). Lleida, España: SEIEM.

Samper, C. (2008). *Geometría*. Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Norma.

Samper, C., Camargo, L., Molina, Ó. y Perry, P. (2013). Instrumented activity and semiotic mediation: Two frames to describe the conjecture construction process as curricular organizer. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proc. 37th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 145-152). Kiel, Germany: PME.

Vygotsky, L. (1995). *Pensamiento y lenguaje.* Barcelona: Paidós.

---

[1] La investigación *Conjeturas y construcción de conocimiento en clase de geometría*, de la cual extraemos las ideas de la presente ponencia cuenta con el apoyo financiero de COLCIENCIAS y del CIUP, Universidad Pedagógica Nacional.

[2] Esta es la propuesta sugerida en Birkhoff, G. (1932). A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor. *Annals of Mathematics*, *33*(2), 329-345. Disponible en http://www.jstor.org/ stable/1968336.

[3] En el curso se diferencian rayo y semirrecta: el rayo incluye el extremo y la semirrecta no lo hace.

[4] Teorema de Localización de Puntos: Dado el rayo CT y un número real z, z > o, entonces existe un único punto X que pertenece al rayo *CT* tal que la distancia de *C* a *X* es igual a *z.*

[5] Definición de interestancia: El punto *B* está entre *A* y *C* si: i) *A*, *B* y *C* son colineales y ii) distancia de *A* a *B* más distancia de *B* a *C* es igual a distancia de *A* a *C* ($AB + BC = AC$). La notación es: *A-B-C*.

[6] Usamos la notación *CM* sin otra alusión para representar la distancia de *C* a *M.*

[7] Postulado recta-números reales: Dada una recta, existe una correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales tal que: (i) a cada punto de la recta le corresponde exactamente un número real; (ii) a cada número real le corresponde exactamente un punto de la recta.