

# CONOCIMIENTO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL PARA EL GRADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: INICIO DE UNA LÍNEA DE INVESTIGACIÓN

## Fundamental mathematical knowledge to access a teacher training degree: starting a research agenda

Ángela Castro, Elena Mengual, Montserrat Prat, Lluís Albarracín, Núria Gorgorió  
Universidad Autónoma de Barcelona

### Resumen

En esta comunicación establecemos el concepto de Conocimiento Matemático Fundamental (CMF) como aquel conocimiento disciplinar en matemáticas necesario para seguir con aprovechamiento las materias de Matemáticas y de Didáctica de las Matemáticas del Grado en Educación Primaria. Relacionamos esta primera definición de CMF con las teorías que describen el conocimiento del profesor en relación a la enseñanza de las matemáticas; revisamos algunas de las propuestas de evaluación presentes en la literatura; y finalmente proponemos distintos estudios que podrían permitir establecer una concreción del CMF.

**Palabras clave:** *Conocimiento matemático fundamental, Formación inicial de maestros, PAP*

### Abstract

*In this paper we establish the concept of Fundamental Mathematical Knowledge (FMK) as the disciplinary knowledge in mathematics necessary for keeping up with the subjects of Mathematics and Didactics of Mathematics in Teacher Education Programs. We relate this first definition of FMK with theories describing teacher knowledge regarding the teaching of mathematics; we review some of the proposals present in the literature for its assessment; and finally, we propose a research agenda that could help to establish a specification of FMK.*

**Keywords:** *Fundamental Mathematical Knowledge, Initial Teacher Education, PAP*

### INTRODUCCIÓN

En estos últimos meses, la prensa se ha hecho eco de la decisión tomada en Cataluña por los responsables del acceso a la Universidad que establece una Prueba de Aptitud Personal (PAP) para el acceso a los Grados de Educación Primaria (GEP) y Educación Infantil (GEI). Además de los requisitos vigentes hasta ahora, a los alumnos que quieran iniciar sus estudios el curso 2014-15 se les exigirá que la media aritmética de las notas de Lengua Castellana y Lengua Catalana de las pruebas comunes en la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU) sea superior a cinco<sup>1</sup>. La Comunidad Autónoma de Madrid parece que sigue los pasos de Cataluña. En ambas comunidades están teniendo lugar reuniones de trabajo entre los responsables de educación, de universidades y de los centros que ofrecen los GEP y GEI para retomar el debate de la formación inicial de los maestros. La necesidad y oportunidad del requisito de unas pruebas PAP para el acceso a dichos grados y las características y contenidos de estas pruebas es también tema de preocupación en el marco de la Comisión Permanente de Decanos y Directores de Centros con Títulos de Magisterio y Educación.

En este debate de las PAP se incluyen, además de los conocimientos de lengua, los conocimientos de matemáticas, entre otros. La posición en relación a las matemáticas no se ha concretado para el curso 2014-15 puesto que no hay una prueba de matemáticas común en las PAU. Establecer una

Castro, A., Mengual, E., Prat, M., Albarracín, L., Gorgorió, N. (2014). Conocimiento matemático fundamental para el grado de educación primaria: inicio de una línea de investigación. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 227-236). Salamanca: SEIEM.

nota mínima de matemáticas relacionada con las PAU como requisito de acceso complementario resulta inapropiado no sólo para los candidatos provenientes de CFGS sino también para los procedentes de Bachillerato, dado que ni tan siquiera puede asegurarse que los estudiantes que acceden a los GEP y GEI a través de las PAU hayan tenido que enfrentarse a una prueba de matemáticas. A partir de este punto se está empezando a barajar la posibilidad de establecer una prueba específica de matemáticas en las PAP del GEP y del GEI.

Frente a esta situación, como profesionales implicados en la formación en matemáticas y en didáctica de las matemáticas de los futuros maestros, consideramos esencial poder incidir en la toma de decisiones. Es imprescindible establecer las bases para una cultura de mejora de la formación de los maestros basada en conocimiento experto y evidencias empíricas. Las discusiones acerca de cuál es el conocimiento matemático imprescindible para iniciar el GEP, la forma y el momento en que éste debe ser evaluado y las implicaciones de esta evaluación no deberían tener lugar al margen de los profesionales de los departamentos de didáctica de las matemáticas.

En los siguientes apartados de esta presentación establecemos una primera definición de Conocimiento Matemático Fundamental (CMF) para el GEP; presentamos algunas evidencias empíricas que justifican la necesidad de que se produzca un debate acerca del conocimiento matemático de los estudiantes que acceden a los grados de magisterio; relacionamos esta primera definición de CMF con las teorías que describen el conocimiento del profesor en relación a la enseñanza de las matemáticas; revisamos algunas de las propuestas de evaluación presentes en la literatura; y, finalmente, proponemos distintas investigaciones que podrían permitir establecer una concreción del CMF.

### **CONOCIMIENTO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL: PRIMERA APROXIMACIÓN**

El TEDS-M (Teacher Education Study in Mathematics) de la IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement), liderado por la Michigan State University, es un estudio comparativo sobre la formación inicial de los docentes de matemática de primaria y secundaria obligatoria. Surge de la constatación de diferencias y deficiencias en el conocimiento matemático de los escolares de distintos países proporcionados por estudios internacionales como el TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study). Se apoya en el supuesto de que un factor importante para explicar estas diferencias es la diversidad de aproximaciones a la formación inicial del profesorado de matemáticas en los países participantes en el estudio. Dicho estudio pone de manifiesto que las características individuales de los escolares son la causa más clara de su rendimiento en matemáticas. Sin embargo, entre las características externas al alumno que influyen en su rendimiento escolar en matemáticas encontramos el conocimiento del profesor como factor que tendría una mayor influencia que el contexto social o el tiempo dedicado a la enseñanza de las matemáticas (Rico, Gómez y Cañadas, 2014).

Hasta hace poco, los estudios internacionales que comparaban la organización de los programas de formación de maestros evidenciaban grandes diferencias entre el énfasis que éstos ponían en el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento pedagógico del contenido (Döhrmann, Kaiser y Blömeke, 2012). Goos (2013) establece que existe una correlación entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido. Baumert y sus colaboradores (Baumert et al., 2010) constatan que el conocimiento pedagógico del contenido es una influencia decisiva tanto en la calidad de la instrucción como en la mejora de la calidad del aprendizaje de los escolares. Señalan también que para poder desarrollar conocimiento pedagógico del contenido es necesario un conocimiento sólido del contenido matemático. En esta línea, Lacasa y Rodríguez (2013) señalan que existe una correlación sustantiva entre el nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de magisterio en España y su nivel de conocimientos de didáctica de las matemáticas y que la causalidad se mueve de los conocimientos de matemáticas a los conocimientos sobre su didáctica.

Al establecer una primera definición de CMF, partimos del supuesto de que el conocimiento disciplinar en matemáticas de los estudiantes del GEP constituye la base sobre la cual deberán construir durante su formación conocimiento para la enseñanza de las matemáticas (Aballe, 2000). En este sentido, el conocimiento disciplinar inicial constituye el fundamento o los cimientos para poder desarrollar las competencias que le permitirán iniciarse en la enseñanza de las matemáticas en Primaria. Por ello definimos, *a priori*, el CMF para el GEP como aquel conocimiento en matemáticas necesario para seguir con aprovechamiento las materias de matemáticas y de didáctica de las matemáticas del GEP, tomando en cuenta los requerimientos de la práctica profesional y las competencias matemáticas propias de Primaria. El CMF es el conocimiento disciplinar que los docentes de matemáticas y de didáctica de las matemáticas del GEP tomamos como punto de partida para que los estudiantes puedan desarrollar durante su formación las diferentes dimensiones del conocimiento para la enseñanza a través de los cursos de matemáticas, de didáctica de las matemáticas y de las prácticas que forman parte de su formación universitaria.

Hasta la fecha, no existe un acuerdo explícito acerca de cuál debería ser este conocimiento disciplinar de partida, ni tenemos instrumentos compartidos para establecer hasta qué punto los estudiantes que inician el GEP poseen este conocimiento. Tampoco hemos desarrollado un consenso sobre cómo actuar a partir de las evidencias que podamos obtener acerca de la distancia entre el conocimiento matemático de los alumnos y el CMF. De alguna forma, esperamos que nuestros estudiantes hayan desarrollado el CMF a lo largo de los cursos de matemáticas que han seguido en la etapa obligatoria y postobligatoria previa a su formación universitaria. Sin embargo, el conocimiento disciplinar en matemáticas de los estudiantes que inician su formación como maestros, construido durante su propia escolarización, incluso en los casos más satisfactorios, es insuficiente para enseñar matemáticas en Primaria (Stephens, 2003). Por otra parte, a menudo damos por supuesto que dominan algunos conceptos sobre los que hay un acuerdo tácito de que resultan imprescindibles. Sin embargo, las diferentes vías de acceso al GEP impiden que podamos tomar este supuesto como una certeza, algo que resulta evidente en nuestra práctica docente.

En nuestro centro hemos iniciado un estudio con el fin de determinar la distancia entre el conocimiento matemático de los alumnos cuando ingresan al GEP y el conocimiento que tomamos como punto de partida en las asignaturas de Didáctica de las Matemáticas. Basándonos en el currículum de Primaria, hemos elaborado una prueba que recoge los conocimientos que esperaríamos que nuestros alumnos tuviesen y que damos por supuestos en nuestra docencia. Para validarla, la hemos administrado a los alumnos de tercero de GEP justo después de finalizar la última de las asignaturas obligatorias de didáctica de las matemáticas. Los resultados muestran diferentes niveles de conocimiento matemático y evidencian carencias graves en aspectos que no son tratados en el grado por considerarse contenido que ya debería ser dominado. No es propósito de esta comunicación entrar en detalles del estudio desarrollado. Sin embargo, a continuación mostramos uno de los errores cometidos por uno de los alumnos con el propósito de desgranar el significado que atribuimos al CMF.

La multiplicación que se muestra en la Fig. 1es la respuesta de un alumno de tercer curso del GEP resolviendo una pregunta en la que se pide el cálculo de la superficie de un círculo de radio 6 cm. Observamos un error grave en el uso de la coma decimal; el alumno trata este símbolo como si “separara completamente” la parte entera de la parte decimal, mostrando así desconocimiento del sistema de numeración y de la notación decimal. Si queremos tratar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la multiplicación, entonces el conocimiento del sistema de numeración decimal y de la notación decimal resultan básicos; desde este punto de vista serían parte del CMF. Es claro que el tipo de error detectado en este caso y confirmado en el estudio TEDS-M (Senk et al., 2012) no es deseable en nuestros estudiantes. Los estudiantes de magisterio que evidencian carencias en destrezas y conceptos matemáticos elementales, normalmente dados por sabidos al iniciar su formación, tendrán dificultades para enseñar temas próximos (Aballe, 2000).

Handwritten mathematical work on grid paper. The work shows the calculation of the area of a square with side length 3.14. The equation  $3,14 \times 36 = 108,504$  is written. To the right, two vertical multiplication problems are shown:  $14 \times 36 = 504$  and  $36 \times 3 = 108$ .

Fig. 1. Multiplicación de un estudiante de 3° del GEP

## CONOCIMIENTO DEL PROFESOR Y CONOCIMIENTO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL

En este apartado, hacemos una revisión de las teorías del conocimiento del profesor que se presentan con mayor frecuencia en la literatura, con la finalidad de situar en ellas el CMF, considerándolo como el primer paso para que el estudiante del GEP pueda enfrentarse a su formación e iniciar el desarrollo su conocimiento profesional.

### Shulman, Fennema y Franke

Al analizar la literatura relacionada con el conocimiento del profesor, es inevitable comenzar por Shulman (1986) quien hace una revisión de investigaciones anteriores sobre el conocimiento del profesor y de las diferentes pruebas que los futuros docentes tenían que superar. En dichas investigaciones, basadas en la simplificación de las complejidades de la enseñanza, Shulman sostiene que los investigadores ignoran un aspecto central: la materia a enseñar. En este sentido, denomina conocimiento del contenido a la cantidad y organización del conocimiento de la materia en la mente del profesor. Sugiere considerar este conocimiento organizado en tres categorías: conocimiento de la materia, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento del currículo.

Más adelante, Shulman (1987) sostiene que existe una base de conocimientos para la enseñanza subyacentes a la comprensión del profesor, necesarios para promover la comprensión de los estudiantes. Organiza estos conocimientos en un sistema de categorías que incluye, como mínimo: conocimiento del contenido; conocimiento pedagógico general; conocimiento del currículo; conocimiento pedagógico del contenido; conocimiento de los estudiantes y sus características; conocimiento de los contextos educativos; y conocimiento de los fines propósitos y valores educativos y sus fundamentos filosóficos e históricos. En relación con el conocimiento del contenido, afirma que el profesor debería comprender críticamente el conjunto de ideas que va a enseñar. Sin esta comprensión de la materia el profesor no podrá transformar las ideas para que puedan ser entendidas por sus estudiantes. En esta transformación entra en juego el conocimiento pedagógico del contenido, entendido como la amalgama entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico general.

Sin embargo, el modelo propuesto por Shulman (1986, 1987) no reconoce las interacciones entre las diferentes categorías del conocimiento. Ante esta situación, Fennema y Franke (1992) señalan que el conocimiento de la enseñanza tiene una naturaleza dinámica e interactiva. Estos autores defienden que el conocimiento del profesor no es monolítico, es un sistema de funcionamiento de gran tamaño e integrado donde cada parte es difícil de aislar. Además sostienen que no es posible separar las creencias del conocimiento del profesor. Petrou y Goulding (2011) indican que existe un paralelismo entre el conocimiento de las matemáticas propuesto por Fennema y Franke (1992) y la definición del conocimiento del contenido propuesto por Shulman (1986, 1987). Los profesores no sólo necesitan conocer los procedimientos, sino también entender los conceptos que subyacen a estos procedimientos. Para Fennema y Franke (1992) el conocimiento de las matemáticas comprende el conocimiento de los conceptos, procedimientos, los procesos de resolución de

problemas, los conceptos subyacentes a los procedimientos, las interrelaciones de estos conceptos y la forma en que conceptos y procedimientos entran en juego en la resolución de problemas.

Desde este punto de vista, el CMF sería una parte del conocimiento del contenido de Shulman o del conocimiento de las matemáticas de Fennema y Franke, pero no podemos esperar que equivalga a su totalidad. Entendemos que a nuestros estudiantes, al inicio de su formación, únicamente podemos exigirles que conozcan algunos de los aspectos básicos de las matemáticas elementales sin esperar que hayan elaborado un tejido completo de relaciones entre conceptos, procedimientos y estructuras. En el proceso de concreción del CMF deberá establecerse cuáles son estos aspectos básicos para que los estudiantes del GEP puedan avanzar hacia una comprensión más profunda de las matemáticas que deberán enseñar.

### **Rowland y colaboradores**

Rowland, Huckstep y Thwaites (2003) proponen un marco para la identificación y discusión del conocimiento del contenido matemático que los docentes evidencian en la práctica. Este marco definido como “cuarteto de conocimiento” tiene como base la distinción propuesta por Shulman (1986) y establece las formas en que el conocimiento de la materia y el conocimiento pedagógico del contenido entra en juego el aula (Petrou y Goulding, 2011). De esta forma la propuesta de Rowland y sus colaboradores se sitúa en la conceptualización de Shulman (1986), pero responde a Fennema y Franke (1992) en tanto que da respuesta a cómo las diferentes formas del conocimiento del profesor están integradas y entran en juego en el aula, respaldando su idea de que el conocimiento es dinámico.

El “cuarteto de conocimiento” está constituido por cuatro componentes: fundación, transformación, conexión y contingencia (Rowland, 2005; 2007; Rowland, Turner, Thwaites, 2012). La fundación comprende las creencias, el conocimiento proposicional de las matemáticas y de la pedagogía adquirido durante su proceso de formación que puede inferirse de las decisiones y acciones de aula. Involucra aspectos como el uso de la terminología matemática, el conocimiento explícito de la matemática, la identificación de los errores y la base teórica de las matemáticas, entre otros.

Desde esta perspectiva, podríamos considerar el CMF como parte del componente fundación, en tanto que el CMF incluiría el conocimiento de la base teórica y el dominio de la terminología matemática exigibles a nuestros estudiantes como fruto de su proceso escolar, dejando para su formación como maestros los aspectos relativos a conocimiento del alumno o la identificación de los errores, entre otros. Una vez más, formará parte del proceso de concreción del CMF establecer cuáles son estos conocimientos y terminología mínimos exigibles para que los estudiantes puedan desarrollar durante su formación el conocimiento proposicional necesario para enseñar matemáticas en Primaria.

### **Ball y colaboradores**

A partir de las categorías propuestas por Shulman (1986), Ball, Thames y Phelps (2008) presentan una teoría del conocimiento del profesor basada en la práctica, donde establecen lo que denominan conocimiento para la enseñanza de las matemáticas tomando como ejes principales el conocimiento de la materia y el conocimiento pedagógico del contenido. Desarrollan el concepto del conocimiento de la materia organizándolo en 3 subdominios: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento del horizonte matemático.

El conocimiento común del contenido es aquel conocimiento que todo adulto instruido en matemáticas debería tener y que se utiliza en una amplia variedad de entornos, es decir, no exclusivo de la enseñanza (Ball, Hill y Bass, 2005). El conocimiento especializado del contenido requiere una comprensión y un razonamiento matemático que son propios del profesor. Definen el conocimiento del horizonte matemático como el conocimiento de las matemáticas que van a

aprender sus alumnos a lo largo de sus estudios. Fennema y Franke (1992) también recogen la necesidad de que el maestro conozca las matemáticas que sus alumnos continuarán aprendiendo.

Dado que nuestros estudiantes han superado satisfactoriamente los requisitos de acceso a la universidad y por tanto las etapas previas de escolarización, tiene sentido esperar que cuando acceden al GEP sean adultos instruidos en matemáticas. Desde este punto de vista, podemos considerar que el CMF es parte del conocimiento común. Asimismo, el CMF sería punto de partida para el desarrollo del conocimiento del horizonte, puesto que su formación debería haberles permitido abordar no sólo las relaciones entre los conceptos propios de las matemáticas de Primaria, sino también conocimientos más avanzados. De nuevo, formará parte del proceso de concreción del CMF establecer cuáles son los aspectos del conocimiento común y del conocimiento del horizonte exigibles a nuestros estudiantes.

### **Grupo SIDM, Universidad de Huelva**

Montes, Contreras y Carrillo (2013), señalan que las asignaciones del conocimiento para la enseñanza de las matemáticas propuestas por Ball, Thames y Phelps (2008) generan problemas de indefinición en los subdominios, pues puede darse el caso de que el conocimiento que demuestre un profesor posea distintas naturalezas. Estos autores señalan que el grupo SIDM (Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas) de la UHU ha propuesto un modelo sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas que proporciona un refinamiento del modelo de Ball y colaboradores. Dicho modelo, denominado “Modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas” (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), se basa en la idea de que la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas proviene de su práctica. Considera la distinción propuesta por Ball y sus colaboradores entre el conocimiento de la materia que denominan conocimiento matemático, y el conocimiento pedagógico del contenido como elementos esenciales del conocimiento especializado del profesor. El primero incluiría el conocimiento de los temas, de la estructura matemática y de la práctica matemática, mientras que el conocimiento pedagógico del contenido incluiría el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas. Subyacentes a ambos tipos de conocimiento se encontrarían las creencias relativas a las matemáticas y a su enseñanza y aprendizaje.

El modelo del SIDM hace referencia a elementos asociados e identificados desde la práctica de profesores expertos. En las materias de matemáticas y su didáctica del GEP el estudiante debe construir las bases para poder abordar su práctica profesional futura con una formación sólida para poder ser crítico y reflexivo en el proceso de construcción de su conocimiento profesional. Desde nuestro punto de vista, sin un CMF inicial sólido que reúna determinadas condiciones, resulta difícil que el alumno pueda construir los cimientos para desarrollar a través de su formación y su futura práctica un conocimiento especializado satisfactorio.

### **CONOCIMIENTO DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO Y CONOCIMIENTO MATEMÁTICO FUNDAMENTAL**

En el apartado anterior hemos introducido únicamente algunas de las numerosas investigaciones que se están desarrollando en busca de modelos para describir y caracterizar el conocimiento del docente en relación la enseñanza de las matemáticas. Dichos estudios se centran en el conocimiento necesario para la enseñanza como práctica y algunos de ellos generan propuestas que conciernen a la formación del profesorado. Sin embargo, al intentar relacionar el CMF con dichas teorías, vemos que resultan inadecuadas para nuestro propósito –describir la naturaleza del conocimiento que los estudiantes para maestro necesitan para iniciar su formación– dado que están asociadas al conocimiento en la práctica profesional.

A nivel general, al interés por describir el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas le ha seguido el interés por evaluar dicho conocimiento y, en particular, por evaluar el conocimiento de los estudiantes para maestro (Norton, 2012; Ryan y McCrae, 2005; Senk et al., 2012; Valshaw, 2012). A pesar de que presentan distintas aproximaciones, estos estudios comparten conclusiones al afirmar que el conocimiento matemático de los estudiantes para maestro, incluso al final de su formación, es insuficiente. En este sentido, Ryan y McCrae (2005) señalan que los futuros maestros cometen errores en aspectos clave para la docencia relacionados con el valor posicional de la notación decimal, la conversión de unidades de medida, las fracciones y cálculos con fracciones, entre otros. Por su parte, el estudio TEDS-M concluye que los futuros maestros tienen dificultades para utilizar las fracciones en problemas de enunciado verbal, para reconocer ejemplos de números racionales e irracionales o para determinar el área y el perímetro de figuras planas sencillas (Senk et al., 2012). Sin embargo, ninguno de estos estudios aborda la caracterización y evaluación del conocimiento matemático con que los estudiantes acceden a su formación inicial como maestros.

La evaluación del conocimiento disciplinar en matemáticas al inicio de la formación de maestros constituye una tradición académica en algunas universidades de países anglosajones como Nueva Zelanda, Australia, Gran Bretaña o Estados Unidos, ya sea como condición para el acceso o con finalidades diagnósticas y formativas. Sin embargo, las investigaciones que describen el conocimiento matemático de los estudiantes al inicio de su formación son escasas, con lo cual la evaluación de dicho conocimiento es un reto para sus formadores (Linsell y Anakin, 2012).

El conocimiento que los estudiantes traen consigo a sus programas de formación está posiblemente caracterizado por la memorización y la resolución de problemas bien definidos (Fennema y Franke, 1992; Linsell y Anakin, 2013). En general, la literatura presenta a los estudiantes con un conocimiento matemático incompleto, pero la teoría y los métodos para caracterizar estas carencias están poco consolidados. Tampoco se han estudiado en profundidad las implicaciones que estas carencias tienen para su formación inicial, ni de qué forma determinadas estrategias formativas pueden ayudar a superarlas. La teoría desarrollada hasta el momento alrededor del conocimiento para la enseñanza de las matemáticas está estructurada a partir de marcos cognitivos y marcos orientados a la práctica. Según Linsell y Anakin (2013) presenta limitaciones para el análisis del conocimiento de los estudiantes cuando ingresan a las facultades, dado que establece sus proposiciones en términos de deficiencia en lugar de plantearse la evaluación de los conocimientos como un punto de partida para el trabajo a desarrollar durante la formación.

Linsell y Anakin (2012) proponen el concepto de conocimiento del fundamento del contenido para referirse al conocimiento del contenido matemático que los maestros en formación inicial traen consigo y que son capaces de demostrar al inicio de los programas. El conocimiento del fundamento del contenido incluye, enlazados de manera inseparable, conocimientos conceptuales y procedimentales. Las características de este conocimiento están relacionadas con la capacidad para modelizar, hacer y deshacer, razonar y confirmar, usar múltiples representaciones, generalizar, trabajar con números reales y conocer hechos básicos, entre otros aspectos. Estos autores consideran que el conocimiento del fundamento del contenido podría asociarse al conocimiento común del contenido propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008). Sin embargo, se cuestionan si este conocimiento es adecuado y suficiente para que el futuro maestro pueda construir y desarrollar el conocimiento necesario para una enseñanza eficiente.

Nuestra definición de CMF se aproxima a la que Anakin y Linsell (2012) proponen para el conocimiento del fundamento del contenido en tanto que se refiere esencialmente a los estudiantes que inician su formación como maestros. Sin embargo, se distingue de ella puesto que dichos autores se refieren al conocimiento que los estudiantes tienen al iniciar su formación y nosotros definimos CMF como el conocimiento deseable. De alguna forma, los estudios que mencionamos al inicio de este apartado evidencian que existe una distancia importante entre ambos tipos de conocimiento.

## PLANTEAMIENTO DE UNA NUEVA LINEA DE INVESTIGACION

Ma (1999), en una de las primeras propuestas que desarrollan las ideas de Shulman, establece la noción de conocimiento profundo de las matemáticas fundamentales. Con este concepto establece el carácter particular del conocimiento disciplinar en matemáticas como algo fundamental –tanto en el sentido de primario y elemental, como en el sentido de profundo, vasto y extenso. Este conocimiento incluiría los conceptos y sus interconexiones y la comprensión de la estructura conceptual, junto con las actitudes básicas de matemáticas.

De alguna forma, coincidimos con Ma (1999) en que las matemáticas elementales son matemáticas fundamentales, puesto que entendemos fundamental en el sentido de básico y, a la vez, como sinónimo de primario, en el sentido de primero, como conocimiento inicial para el aprendizaje de las matemáticas. Las matemáticas elementales serían la base y el principio de la construcción de conocimientos matemáticos más elaborados. Los cimientos pueden resultar invisibles desde la perspectiva de un aprendizaje matemático más avanzado, pero es lo que sostiene este aprendizaje y permite que los distintos conceptos matemáticos constituyan una estructura robusta.

Al inicio de esta presentación, hemos definido CMF como el conocimiento disciplinar en matemáticas necesario para seguir con aprovechamiento las materias de matemáticas y de didáctica de las matemáticas, tomando en cuenta los requerimientos de la práctica profesional y las competencias matemáticas propias de la Educación Primaria. El CMF es el conocimiento disciplinar que los profesores tomamos como punto de partida para nuestra docencia. Este conocimiento fundamental debería sustentar el conocimiento para la enseñanza que el estudiante para maestro desarrollará a través de su formación en la facultad.

Independientemente de la posición teórica en la que nos situemos en relación a la descripción del conocimiento para la enseñanza de las matemáticas, tal como afirmábamos al inicio de esta presentación, no existe todavía un acuerdo explícito acerca de cuál debería ser este conocimiento disciplinar de partida, ni tenemos instrumentos compartidos para establecer hasta qué punto nuestros estudiantes poseen dicho conocimiento. Tampoco hay consenso sobre cómo actuar a partir de las evidencias que podamos obtener a partir de los instrumentos desarrollados. Por todo ello, parece claro que es necesario establecer una concreción del CMF y los elementos para evaluarlo.

La concreción del CMF puede abordarse desde distintas perspectivas complementarias. En la UAB hemos iniciado el proceso para establecer una caracterización del CMF desde la observación participante de las actividades que se desarrollan en las clases de didáctica de las matemáticas y desde el análisis del conocimiento disciplinar necesario para el uso del libro de texto de primaria como recurso docente. Asimismo, hemos iniciado una caracterización por criterio de expertos, en la que participan profesores de la UdG, la UVic y la URL. Nos planteamos, a partir de evidencias empíricas, establecer la viabilidad, pertinencia y adecuación de distintos instrumentos de evaluación del CMF que no sólo permitan obtener información sobre las capacidades de los alumnos, sino que puedan ser considerados como punto de partida para que el estudiante asuma la responsabilidad de implicarse en su propio proceso formativo para el desarrollo del CMF.

La investigación dirigida a la concreción del CFM debe tener en cuenta que el conocimiento disciplinar en matemáticas incluye elementos de carácter conceptual y procedimental, pero va más allá. No es un conjunto de elementos básicos, simple y bien definido, sino una combinación sofisticada y enactiva de concreciones y materializaciones de conceptos matemáticos, junto con el conocimiento de los procesos complejos a través de los cuales se construyen las matemáticas (Davis, 2011). El conocimiento disciplinar en matemáticas incluye conocimiento de carácter formal y explicitable, junto con conocimiento tácito. El conocimiento explicitable puede ser evaluado de distintas formas –cuestionarios escritos, observación, entrevistas– y puede desarrollarse a partir de la construcción reflexiva, tomando como punto de partida el diagnóstico del CMF. El conocimiento tácito, el que entra en juego en la práctica, no es directamente enseñable por ser conocimiento inerte



(Baumert et al. 2010). Sin embargo, puede activarse a partir de un repertorio complejo de actividades entre las cuales el análisis de la práctica (Linsell y Anakin, 2012, 213) y las actividades desarrolladas desde el prácticum del GEP.

Parece razonable asumir que la formación de maestros en la universidad no es suficiente por ella misma para dotar a los futuros docentes de las competencias y conocimientos necesarios para enseñar matemáticas. Estos conocimientos y competencias sólo pueden desarrollarse a través de años de reflexión sobre su propia práctica docente. Sin embargo, la investigación pone de manifiesto que, si tienen un diseño adecuado, los programas de formación pueden poner los cimientos para el desarrollo de conocimientos y competencias y para generar una actitud crítica hacia la propia práctica (Rowland y Ruthven, 2011; Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep, 2009).

## Referencias

- Aballe, M. (2000). Aproximación al nivel de conocimiento matemático básico de futuros maestros de primaria. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 25, 89- 107. Barcelona: Graó.
- Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Ball, D. L., Hill, H. C. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14–17, 20–22, 43–46.
- Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann U, Krauss S, Neubrand M. y Tsai Y. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, 47, 133–180.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Mathematics teacher specialized knowledge. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8<sup>th</sup> CERME*. Turkey.
- Davis, B. (2011) Mathematics teachers' subtle, complex disciplinary knowledge. *Science*, 332, 1506–1507.
- Döhrmann, M., Kaiser, B. y Blömeke, S. (2012). The conceptualisation of mathematics competencies in the international teacher education study TEDS-M. *ZDM*, 44, 325–340.
- Fennema, E., y Franke, L.M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). New York, NY: MacMillan.
- Goos, M. (2013). Knowledge for teaching secondary school mathematics: what counts? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(7), p. 1-13.
- Hodgen, J. (2011). Knowing and identity: A situated theory of mathematics knowledge in teaching. En T. Rowland y K. Ruthven (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 27-42). Londres: Springer.
- Lacasa, J.M. y Rodríguez, J.C. (2013). Diversidad de centros, conocimientos y actitudes hacia la enseñanza de las matemáticas de los futuros maestros en España. En IEA (ed.) *TEDS-M Informe español. Estudio Internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros*. Volumen II. Análisis secundario. (pp. 63-108). Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Linsell, C., y Anakin, M. (2012). Diagnostic Assessment of Pre-Service Teachers' Mathematical Content Knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development*, 14(2), 4–27.
- Linsell, C., y Anakin, M. (2013). Foundation Content Knowledge: What do pre-service teachers need to know? En V. Steinle, L. Ball y C. Bardini (Eds.), *Mathematics Education: Yesterday, today and tomorrow (Proceedings of the 36th annual conference of MERGA)* (pp. 442-449). Melbourne, VIC: MERGA.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- McDiarmid, G.W., Ball, D.L., y Anderson, C.W (1989). Why staying one chapter ahead doesn't really work: Subject-specific pedagogy. En M.C. Reynolds (ed.). *Knowledge base for the beginning teacher* (pp. 193-206). Oxford: Pergamon.

- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2012). *TEDS-M Estudio Internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros*. Madrid (España).
- Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.
- Norton, S. (2012). Prior study of mathematics as a predictor of pre-service teacher's success on tests of mathematics and pedagogical content knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development*, 14 (1), 2-26.
- Petrou, M., y Goulding, M. (2011). Conceptualising teachers' mathematical knowledge in teaching. En Rowland y Ruthven (coord.). *Mathematical knowledge in teaching*, (pp. 9-26). Londres: Springer.
- Rico, L., Gómez, P. y Cañadas, M. (2014). Formación Inicial en educación matemática de los maestros de primaria en España, 1991-2010. *Revista de Educación*, 363, 35-59.
- Rowland, T. and Turner, F. (2007) Developing and using the Knowledge Quartet: a framework for the observation of mathematics teaching. *The Mathematics Educator*, 10(1), pp. 107-124.
- Rowland, T. (2008). Researching teachers' mathematics disciplinary knowledge. En P. Sullivan and T. Wood (Eds.) *International handbook of mathematics teacher education, 1*: 273-298. Rotterdam: Sense
- Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2003). The Knowledge Quartet. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 23(3), 97-102.
- Rowland, T., Martyn, S., Barber, P., y Heal, C. (2000). Primary teacher trainees' mathematics subject knowledge and classroom performance. En Rowland y Morgan (Eds.). *Research in mathematics education Volume 2: Papers of the British Society for Research into Learning Mathematics* (pp. 3-18). London: British Society for Research into Learning Mathematics.
- Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching: Reflecting on practice with the knowledge quartet*. London: Sage.
- Rowland, T., y Ruthven, K. (Eds.). (2011). *Mathematical knowledge in teaching*. London: Springer.
- Ryan, J., y McCrae, B. (2005/6). Assessing pre-service teachers' mathematics subject knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development*, 7, 72-89.
- Senk, S., Tatto, M., Reckase, M., Rowley, G., Peck, R., y Bankov, K. (2012). Knowledge of future primary teachers for teaching mathematics: An international comparative study. *ZDM*, 44(3), 307-324.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.
- Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Stephens, M., (2003). Regulating the entry of teachers of mathematics into the profession: Challenges, new models, and glimpses into the future. En A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F.K.S. Leung (Eds.) *Second Handbook of Mathematics Education* (pp. 767-174). Dordrecht: Kluwer Academic Pub.
- Walshaw, M. (2012). Teacher knowledge as fundamental to effective teaching practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(3), 181-185.

---

<sup>1</sup> PAP. Educació Infantil i Primària.