MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO PARA EL ESTUDIO DEL LÍMITE

Theoretical and methodological framework for the study of the limit

Francisco Javier Claros[a], María Teresa Sánchez[b], Moisés Coriat[c]

[a]Universidad Complutense de Madrid, [b]Universidad de Málaga, [c]Universidad de Granada

Resumen

Nuestras investigaciones dan cabida, con los mismos métodos, a diferentes nociones del límite, como límite finito de una sucesión o límite finito de una función en un punto. Consideramos tres elementos relacionados: fenomenología, sistemas de representación y pensamiento matemático avanzado. En la primera parte lo explicamos y presentamos ideas de otros marcos teóricos. Hemos usado las mismas herramientas metodológicas para descubrir y estudiar los fenómenos organizados por tres casos de límite finito y para reconocer esos fenómenos en libros de texto. Además, hemos desarrollado instrumentos para mostrar los fenómenos que emplean alumnos y profesores. En la segunda parte describimos los métodos usados para extraer información de libros de texto y alumnos.

Palabras clave: *marco teórico, límite, fenómenos, libros de texto y alumnos.*

Abstract

Our research covers, with the same methods, several notions of limits, as the finite limit of a sequence or the finite limit of a function in a point. We consider three related elements: phenomenology, representation systems, and advanced mathematical thinking. In the first part we explain this and we also present ideas from other theoretical frameworks. We have been using the same methodological tools to uncover and study phenomena organized by three cases of finite limit and to recognize these phenomena in textbooks. Besides this we have developed tools to show those phenomena used by students and teachers. In the second part we describe the methods used to extract information from textbooks and students.

Keywords: *theoretical framework, limit, phenomena, textbooks and students*

PRIMERA PARTE: MARCOS TEÓRICOS

Diferentes perspectivas

Nuestra investigación se apoya en la fenomenología, los sistemas de representación y el pensamiento matemático avanzado. Hablamos de fenomenología en el sentido de Freudenthal (1983); establecemos fenómenos que son organizados por una definición de límite de una sucesión y de una función; de momento trabajamos el límite finito. La descripción detallada de estos fenómenos no puede hacerse sin usar algún sistema de representación y usamos esta expresión en el sentido de Janvier (1987). Nuestro estudio del límite delimita, de un modo que somos capaces de precisar, entre pensamiento matemático elemental (PME) y pensamiento matemático avanzado (PMA), en las caracterizaciones que describen Claros (2010) y Sánchez (2012).

Los detalles de todo lo anterior pueden verse en Claros, Sánchez y Coriat (2006) y Claros, Sánchez y Coriat (2013)

En estas investigaciones, además, se tienen en cuenta aportaciones y opiniones de los usuarios de la comunidad educativa sin entrar aún en la interacción educativa. El desarrollo de actividades para los alumnos y de orientaciones para los profesores también está entre nuestros objetivos; hasta el

Claros, J., Sánchez, M. T., Coriat, M. (2014). Marco teórico y metodológico para el estudio del límite. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 19-32). Salamanca: SEIEM.

momento, la parte principal de nuestra investigación corresponde, esencialmente, a la fenomenología del análisis y no a la fenomenología didáctica de éste[1]

En la enseñanza-aprendizaje del análisis se vienen usando, hasta donde conocemos, el PMA, únicamente (Plaza, Ruiz y Rico, 2012) o la teoría APOS (Aldana y González Astudillo, 2010; Vargas, González Astudillo y Llinares, 2011; Badillo y Azcárate, 2011). De la amplia documentación mencionamos a Tall (1991), para la primera, y, sobre la segunda, el libro de Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktac, Roa, Triguero y Weller (2014), que seguiremos para referirnos a dicha teoría en la breve reseña que sigue. Sobre PMA véase más abajo.

El acrónimo APOS designa: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas. Se presenta como teoría constructivista basada en trabajos de Piaget e introducida por Dubinsky en 1984. La teoría APOS pone el foco en los modelos que describirían la mente de un individuo cuando está intentando aprender conceptos matemáticos y en el uso de estos modelos para diseñar materiales para la instrucción o evaluar el éxito de un concepto o los errores en dicho concepto. Además, se ocupa de describir la construcción de estructuras mentales apelando a términos como interiorización, encapsulación, coordinación, inversión y desencapsulación y tematización. Estos términos van asentándose tras discusiones de los principales desarrolladores de la teoría. También se discutió la idea de transformar a Esquema un Objeto, el cual podría actuar como otro Esquema (estas ideas fueron citadas por Dubinsky a principios de los años ochenta). Por otra parte, las diferencias entre Esquema y concepto imagen fueron ilustradas por Vinner (1991) y Dreyfus (1990)

La descomposición genética constituirá un posible punto de conexión con nuestra investigación cuando ésta la orientemos definitivamente hacia la enseñanza-aprendizaje.

De hecho, este camino lo hemos iniciado a través de una secuencia didáctica sobre la enseñanza del límite finito de una sucesión (libro homenaje a Alfonso Ortiz, pendiente de publicación) que comparamos con la descomposición genética en 6 pasos propuesta por Cottrill (1996), ver tabla 1.

Algunos estudios que usan la teoría APOS parecen relacionados con la fenomenología en el sentido de Freudenthal, aunque los autores correspondientes se refieren a categorías. Un ejemplo es el estudio de Dubinsky sobre la composición de funciones reseñado por Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktac, Roa, Triguero y Weller (2014) del libro “APOS Theory” (p. 23). Si f=goh, Dubinsky explica con detalle las diferencias de actuación relacionadas con la búsqueda de una de estas tres funciones, dadas las otras dos; el autor describe y puntualiza sobre las diferentes actuaciones. Sin contradecir su estudio, pensamos que tales actuaciones diferentes se explican también considerando que la definición de composición de funciones pone en juego fenómenos diferentes según que dirijamos nuestro interés a la determinación de f, de g o de h, conocidas las otras dos, pues se refiere a acciones matemáticas, no a acciones individuales.

Tabla 1: Comparación Cottril (1996) y Claros, Sánchez y Coriat (pendiente de publicación).

Descomposición genética[2] de Cottrill	Secuencia propuesta[3]
Paso 1. La acción de evaluar la función en varios puntos, cada vez más próximos a “a”. Paso 2. Interiorización de la acción del paso 1 a un único proceso en el cual f(x) se aproxima a L cuando x se aproxima a “a”.	Fenómenos de aproximación intuitiva Fenómeno a.s.i.c.[4]
Paso 3. Encapsulación del proceso del paso 2. El límite se convierte en un objeto en el cual las acciones pueden ser aplicadas.	Fenómenos de aproximación intuitiva Fenómeno a.s.i.

Paso 4. Reconstrucción del proceso del paso 2 en términos de intervalos e inecuaciones. Paso 5. Aplicación de un esquema de cuantificación que conecte el proceso descrito en 4 con la definición formal	Fenómenos de retroalimentación Fenómeno i.v.s.
Paso 6. Aplicación de la definición épsilon-delta	Aplicación de la definición épsilon-delta

Si se me permite la especulación, un conocedor de la teoría APOS ciertamente encontrará también préstamos a la fenomenología didáctica de las interacciones asociadas a las Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas.

Por ello aventuramos la necesidad de estudiar transferencias mutuas entre las fenomenologías mencionadas por Freudenthal y la teoría APOS. Ésta aporta nuevas organizaciones de los pasos a seguir en la enseñanza de un concepto, los cuales están graduados en orden de dificultad.

Nuestro enfoque propugna que, en la enseñanza del límite se consideren los fenómenos organizados por las respectivas definiciones, fenómenos que no habían sido tenidos en cuenta en las propuestas didácticas correspondientes. Esta es quizás nuestra concreta y original aportación: la introducción de fenómenos relevantes para la enseñanza del límite. Estos fenómenos son organizados por la definición y deben estar por tanto en los pasos para usar correctamente dicha definición, así como en el estudio de los errores que se observen.

Resaltamos la conveniencia de que se realicen estudios comparativos para delimitar correctamente los mutuos préstamos que se vengan dando entre nuestra investigación fenomenológica y la teoría APOS.

Fenomenología. Fenómenos organizados por una definición de límite

Presento aquí el marco teórico de nuestras investigaciones.

Freudenthal (1983) analizó los contenidos matemáticos con ayuda de un método que llamó *fenomenología*, porque parte de la contraposición establecida entre "fenómeno" y "noúmeno". Un análisis fenomenológico de un concepto u objeto matemático es una descripción de su relación o relaciones con aquello para lo que es medio de organización.

Los conceptos matemáticos no caen fuera del campo de nuestra experiencia, ni están en un mundo distinto del mundo de los fenómenos que organizan. Un concepto matemático que es el medio de organización de un fenómeno (o más de uno), pasa a formar parte de un campo de fenómenos que son organizados por otro nuevo concepto matemático.

Hemos usado la fenomenología para describir los fenómenos organizados por la definición de límite finito de una sucesión, la definición de sucesión de Cauchy y la definición de límite finito de una función. Los fenómenos observados y organizados por las definiciones correspondientes se clasifican en fenómenos de aproximación intuitiva y de retroalimentación.

En el texto de las definiciones de límite que hemos estudiado encontramos dos ámbitos, uno intuitivo y otro formal y en cada ámbito hallamos un fenómeno, como explicamos a continuación siguiendo a Claros, Sánchez y Coriat (2006, 2007, 2009a, 2009b, 2013) y las tesis doctorales de Claros (2010) y Sánchez (2012). Ver Figura 1.

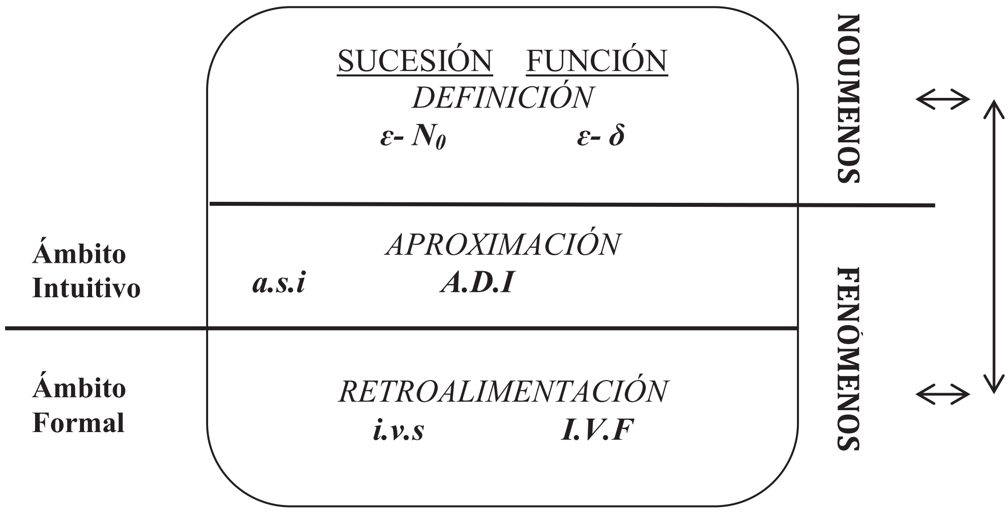


Figura 1. Fenómenos y ámbitos

- **El ámbito intuitivo**

Cuando se declara el límite como número real, la definición suele comenzar así: “decimos que L es el límite de la sucesión" (respectivamente: función). Al considerar una sucesión (por ejemplo 1/n) o una función (por ejemplo f(x) = 1/x), si queremos aplicar la definición lo primero que necesitamos es un candidato a límite. Si digo que el límite de la sucesión anterior es 2 o que el límite de la función anterior en x_0=1 es 1, estoy conjeturando.

Con un fenómeno del ámbito intuitivo afirmamos algo sobre una propiedad de la sucesión o de la función pero no lo demostramos; simplemente, avanzamos en el conocimiento de esa sucesión o función.

En el caso de la sucesión, el fenómeno lo llamamos “aproximación simple intuitiva” (a.s.i): analizando términos de orden cada vez mayor, somos capaces de proponer un candidato a límite.

En el caso de la función en un punto, el fenómeno lo llamamos “aproximación doble intuitiva” (A.D.I). Cuando la variable independiente se acerca de cualquier modo a un valor pre-fijado, conjeturamos que los correspondientes valores de la función se acercan a un valor que es el candidato a límite de la función en ese valor pre-fijado. La intuición de la continuidad de la recta explica que haya diferentes maneras de acercar los valores de la variable independiente a un valor pre-fijado y esto da los modos de acercamiento que han sido estudiados en Sánchez (2012, pp. 108-110)

No siempre declaramos el límite, como ocurre en la definición de sucesión de Cauchy. En este caso, el fenómeno correspondiente al ámbito intuitivo lo llamamos “aproximación simple intuitiva de Cauchy” (a.s.i.c); analizamos parejas de términos de órdenes cada vez mayores y conjeturamos que la diferencia de valores de esos términos se va a anular. Conviene observar que, en la definición de sucesión de Cauchy, el ámbito intuitivo no está explícito, sin embargo surge al decidir que se va a estudiar esto. Por lo general, se comienza observando que los términos de la sucesión se aproximan entre sí.

Los estudios preliminares del límite finito de una función en el infinito no son aún concluyentes, pero exigen considerar varios modos de alejamiento de la variable independiente en el marco de un eje numérico cuya continuidad se intuye (véase las consideraciones de Sánchez (2012) sobre la intuición de la continuidad).

- **El ámbito formal**

El fenómeno correspondiente permite validar la conjetura elaborada en el otro ámbito. Hemos utilizado el término “proceso” para referirnos a cada una de las etapas sucesivas del fenómeno, al que llamamos, genéricamente, retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones (i.v.s), en sucesiones de Cauchy (i.v.s.c) o en funciones (I.V.F).

Cuando se declara el límite, la “ida” remite al proceso de construcción arbitraria de un entorno del límite y al hallazgo de un natural (en sucesiones) o de un entorno de x_0 (en funciones), mientras que la “vuelta” garantiza que a partir de ese natural o en el entorno de x_0 todos los valores de la sucesión o de la función están incluidos en el entorno del límite que construimos arbitrariamente.

Cuando no se declara el límite (como ocurre en la sucesión de Cauchy), un primer proceso determina el valor de N fijado un épsilon y el segundo proceso verifica que para los valores mayores que este N, se cumple que las diferencias entre los términos de la sucesión son menores que el épsilon fijado. Éste último proceso podría explicarse afirmando que los valores que toman las diferencias entre los términos de la sucesión, a partir de un N determinado, permanecen en un entorno de centro 0 y radio épsilon (prefijado).

No se deben confundir estos pares de procesos, que son de carácter matemático, con los de la teoría APOS, que son de carácter personal.

Además de las definiciones de límite finito de una sucesión, límite finito de una función en un punto y sucesión de Cauchy, hemos trabajado la caracterización por sucesiones del límite finito de una función en un punto. Actualmente estamos estudiando también fenómenos organizados por la definición de límite finito de una función en el infinito.

- **Definiciones estudiadas**

Hemos estudiado los fenómenos organizados por varias definiciones de límite finito, como se resume en la tabla siguiente.

Tabla 2. Definiciones, ámbitos y fenómenos

Definición	Fenómenos	
	Ámbito intuitivo	Ámbito formal
*Sea x_n una sucesión en R, decimos que x_n converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos lim x_n= x) si para cada $\varepsilon>0$, existe un número natural N tal que si n > N se cumple que $\|x_n-x\| <\varepsilon$ (*Spivak, 1991, p. 615.)	a.s.i	i.v.s
Una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy si para $\varepsilon>0$ existe un número natural N tal que, para todo m y n, si m,n>N, entonces $\|a_n-a_m\| <\varepsilon$. *(Esta condición se escribe generalmente lim $_{m,n\to\infty}$ $\|a_n - a_m\|=0$).* (Spivak, 1991, p. 624.)	a.s.i.c	i.v.s.c
La función f tiende hacia el límite L en a significa: para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < \|x-a\| < \delta$, entonces $\|f(x)-L\| < \varepsilon$. Spivak (1991, p. 118).	ADI	IVF

En el caso de las sucesiones se manejaron seis definiciones más. En cinco de ellas observamos el fenómeno a.s.i y el fenómeno i.v.s. En la otra definición (sucesión de Cauchy) observamos el fenómeno a.s.i.c y el fenómeno i.v.s.c. Más detalles sobre los fenómenos organizados por estas definiciones se dan en Claros (2010, pp.186-188).

En el caso de las funciones se manejaron también otras cinco definiciones más. En todas ellas, excepto en la llamada "caracterización por sucesiones" se observaron el fenómeno ADI y el fenómeno IVF. Más detalles sobre los fenómenos organizados por estas definiciones se dan en Sánchez (2012, pp. 125-128).

- **Equivalencia fenomenológica entre definiciones**

Al encontrar fenómenos diferentes en definiciones matemáticamente equivalentes, durante estos años de trabajo hemos llegado a preguntarnos acerca de la equivalencia fenomenológica de las definiciones. Hemos obtenido dos resultados: hay equivalencia fenomenológica ente la definición de límite finito de una sucesión y la definición de sucesión de Cauchy, por una parte (Claros, Sánchez y Coriat, 2013) y también la hay entre la definición de límite finito de una función en un punto y la caracterización del límite de una función por sucesiones (Sánchez, 2012). Hemos establecido, mediante dos criterios, cuándo dos definiciones matemáticamente equivalentes son fenomenológicamente equivalentes.

Criterio 1. Dos fenómenos son equivalentes fenomenológicamente si corresponden al mismo contexto (intuitivo o formal) y la verificación de un fenómeno va irremediablemente unida a la verificación del otro y viceversa.

Si los fenómenos son equivalentes y las definiciones son matemáticamente equivalentes, manejamos el siguiente criterio.

Criterio 2. Dos definiciones son equivalentes fenomenológicamente si los fenómenos organizados por cada una de ellas son fenomenológicamente equivalentes.

Detalles de cómo se llega a la equivalencia fenomenológica pueden verse en Claros (2010), Sánchez (2012) y Claros, Sánchez y Coriat (2013).

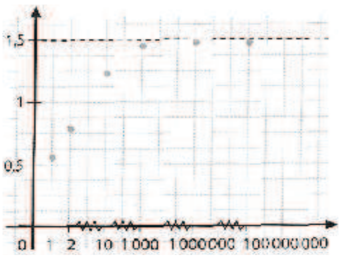
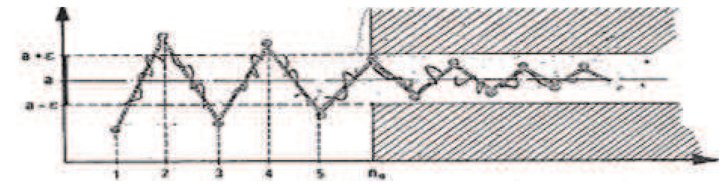
Sistemas de representación y fenómenos

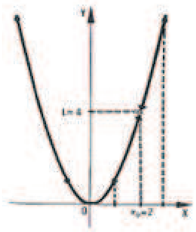
Blázquez y Ortega (2001): (1) Consideran los sistemas de representación verbal, numérico, gráfico y algebraico. (2) Anotan dificultades que entraña la asociación del término límite con su significado en el lenguaje habitual. (3) Presentan el límite finito como aproximación óptima sin reducir el límite a una simple aproximación. Con esta definición de límite la representación privilegiada es numérica (tabular).

Cualquier definición de límite debe expresarse usando alguna representación de las ideas. En la enseñanza, no siempre se comienza por la representación simbólica. En Claros, Sánchez y Coriat (2006) y en Claros (2010) hemos expresado la conveniencia de considerar todos los sistemas de representación (verbal, gráfico, simbólico y tabular o numérico) en la enseñanza del límite. Con ayuda de los sistemas de representación, se expresan y observan los fenómenos organizados por una definición de límite. En la enseñanza, el límite no siempre es definido, también es ejemplificado; por eso consideramos lo que hemos llamado "formato ejemplo" y "formato definición". Se deduce fácilmente que para cada fenómeno hay, en principio 8 posibilidades (4 representaciones y 2 formatos). La tabla 3 muestra algunas de ellas, tomadas de Claros (2010) o Sánchez (2012).

Tabla 3. Ejemplos de fenómenos observados en libros de texto.

Ejemplo 1. Fenómeno a.s.i en el sistema de representación gráfico y formato ejemplo.	Ejemplo 2: Fenómeno i.v.s. en sistema de representación gráfico y formato definición

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>

Se observa gráficamente cómo los términos de la sucesión, a partir de un cierto lugar, quedan dentro del intervalo centrado en el límite; se usa el sistema de representación gráfico y se presenta como una definición. Obsérvese cómo el autor "tacha" la gráfica continua para dar a entender una secuencia discreta</td>
</tr>
<tr>
<td>Ejemplo 3: Fenómeno ADI en sistema de representación gráfico y formato ejemplo
</td>
<td>Ejemplo 4: Fenómeno IVF en sistema de representación simbólico y formato definición

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{tal que}$$

$$\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Fuentes: Bescos y Pena, 2002, p. 90; Vizmanos, Anzola y Primo, 1981, p. 159; Vizmanos, Anzola y Primo, 1981, p. 159; Primo, 1987, p. 217.</td>
</tr>
</table>

Pensamiento matemático avanzado y fenómenos

En 1985, en el seno del PME, se creó un grupo de trabajo (Dreyfus, 1990; Tall, 1991) que se denominó “pensamiento matemático avanzado”. Reorientaron la problemática del aprendizaje en términos de procesos cognitivos; las investigaciones abordaron tópicos que por su naturaleza y complejidad se situarían dentro de la llamada “matemática escolar superior” (límite, derivada, entre otros). Creemos que hay bastante acuerdo en considerar que los procesos de abstracción y de generalización juegan un papel clave en el pensamiento matemático avanzado.

Tall (1985; 1991) afirma que el paso del Pensamiento Matemático Elemental (PME) al Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) implica una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva. Esta reconstrucción implica pasar, por un lado, de “describir” a “definir” y, por otro, de “convencer” a “demostrar”. Esta transición la sitúa en la franja de los 16-20 años y corresponde, aproximadamente, en España, a los dos cursos del Bachillerato y a los dos primeros años de Universidad.

Tall (1991) señala que el concepto de límite se sitúa dentro del PMA por los procesos cognitivos que son necesarios para su manejo. También lo sitúa ahí Cornu (1991), pues los considera pieza fundamental en la teoría de las aproximaciones, continuidad, derivabilidad e integración. Edwards, Dubinsky y McDonald (2005) indican, sin embargo, que el límite estará situado en el pensamiento matemático elemental o avanzado dependiendo del trabajo que se realice con él. Si solamente se trabaja cálculo de límites, no se requiere el pensamiento matemático avanzado para realizar esta operación.

En Claros, Sánchez y Coriat (2006) hemos propuesto un criterio para discriminar entre PME y PMA basado en los fenómenos descritos para las sucesiones con límite (a.s.i e i.v.s) y las funciones con límite finito en un punto (ADI e IVF). La tabla 4 resume las relaciones entre los fenómenos organizados por una definición de límite, el PME y el PMA.

Tabla 4. Fenómenos, pensamiento matemático elemental y avanzado.

FENÓMENOS	PME		PMA	
	Sucesiones	Funciones	Sucesiones	Funciones
De aproximación intuitiva	Se usa a.s.i	Se usa ADI	Se usa a.s.i	Se usa ADI
De retroalimentación	No se usa i.v.s	No se usa IVF	Se usa i.v.s	Se usa IVF

SEGUNDA PARTE: CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

Algunas de las metodologías usadas en las investigaciones llevadas a cabo en el grupo de Didáctica del Análisis Matemático, a partir de 2010 y hasta donde conocemos, se concretan en la Tabla 5. Aunque no somos metodólogos, incluimos nuestros trabajos en la última fila para indicar la adecuación de los métodos usados a los métodos preconizados por diferentes autores.

Estudio de libros de texto de secundaria

Paralelamente al estudio de los fenómenos investigamos el empleo que los autores de libros de texto hacían de ellos cuando tenían que presentar el límite de una sucesión o el límite finito de una función en un punto. Por este motivo se realizó un estudio con una muestra de 30 libros de texto en el caso de las sucesiones y 28 en el caso de las funciones. Para la organización de toda la información tuvimos en cuenta cinco periodos temporales, tres de los cuales ya habían sido establecidos por Sierra, González y López (1999). A estos tres periodos les añadimos dos periodos más, el 1º y el 5º, con el fin de clasificar todos los libros que habíamos conseguido.

Tabla 5. Algunas metodologías de investigación usadas en el grupo de Didáctica del Análisis Matemático

	LT	ES	CT	CG	AL	PR
Aldana y González Astudillo, 2010	X	X			X	
Codes, González Astudillo, Monterrubio y Delgado, 2011	X					
Badillo y Azcárate, 2011		X	X			X
Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2012			X		X	
Arce y Ortega, 2013		X		X	X	
Camacho, Moreno, Azcárate y González Astudillo, 2013		X		X	X	X
Conejo y Ortega, 2013	X					
Pons, Vals y Llinares, 2013		X	X		X	
Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Castro, 2013		X	X		X	
Claros , 2010	X		X		X	
Sánchez, 2012	X	X		X		X

LT=Libros de texto. ES= Entrevistas semiestructuradas. CT= Cuestionarios. CG= Cuadernos/Grabaciones. AL= Alumnos. PR= Profesores

- Periodo 1930 y 1939. Desde los años anteriores a la Guerra Civil Española hasta la terminación de ésta.

- Periodo 1940 - 1966. Desde el final de la Guerra Civil Española hasta los primeros textos piloto para la introducción de la matemática moderna.

- Periodo 1967 - 1974. Desde la llamada "matemática moderna" hasta la promulgación del bachillerato unificado y polivalente (B.U.P)

- Periodo 1975 - 1994. Desde el B.U.P hasta el inicio de las modalidades de bachillerato establecidas en la LOGSE.

- Periodo 1995 - 2005. Desde el bachillerato LOGSE hasta la LOCE (2004) y la LOE (2005).

El método de estudio de los libros de texto fue el mismo para las funciones con límite finito en un punto y las sucesiones con límite. El guión estructurado utilizado persiguió los siguientes objetivos: (a) dar información que permita recuperar cada documento; (b) transmitir de manera comprensible nuestro método de trabajo; (c) permitir la posibilidad de retroceder a lo largo del proceso seguido; (d) establecer el contexto de un comentario o una crítica del investigador o investigadora; y (e) hacer posible una replicación de nuestro estudio.

Para lograr esos objetivos, estructuramos el análisis mediante cuatro criterios: *ficha, secuenciación, fenómenos y resúmenes*.

A su vez, cada criterio se organizaba en subcriterios, que pueden consultarse en el capítulo 4 de Claros (2010), y el capítulo 4 también de Sánchez, (2012) o Claros, Sánchez y Coriat (pendiente de publicación). Aquí presento, como resumen, los resultados agregados por fenómeno y período, sin tener en cuenta las representaciones usadas para presentar cada fenómeno. Ver Tabla 6.

Los resultados obtenidos muestran bastante similitud entre el fenómeno a.s.i y el fenómeno ADI. Desde 1930 a 1974 se usan pocos fenómenos de aproximación intuitiva tanto a.s.i como ADI. A partir de esta fecha su uso en los libros de texto es muy frecuente, y distinguimos dos periodos: un primer periodo que abarca de 1975 a 1994 en el que prevalece el fenómeno a.s.i respecto al fenómeno ADI y un segundo periodo de 1995 a 2005 en el que se invierten los resultados, prevaleciendo el fenómeno ADI al fenómeno a.s.i.

Tabla 6. Fenómenos en libros de texto: datos agregados.

	1930-1939	1940-1966	1967-1974	1975-1994	1995-2005	Recuento
a.s.i	1	0	1	41	38	81
ADI	3	3	1	36	45	88
i.v.s	7	8	8	72	10	107
IVF	4	16	8	48	9	85

Los fenómenos i.v.s e IVF están presentes en todos los periodos considerados en mayor o menos medida. El mayor uso por los autores de dichos fenómenos corresponde al periodo 1975-1994. A partir de ese momento se van extinguiendo en los libros de texto.

Si analizamos de manera conjunta los fenómenos de aproximación intuitiva y los fenómenos de retroalimentación podemos concluir lo siguiente. Hasta el periodo 1975-1994 (incluido dicho periodo) prevalecen los fenómenos de retroalimentación a los de aproximación intuitiva. A partir de dicho periodo observamos un cambio de tendencia que acaba con el uso masivo de los fenómenos de aproximación intuitiva en detrimento de los fenómenos de retroalimentación.

Aunque en este apartado no hemos hecho referencia a los sistemas de representación (verbal, gráfico, simbólico y tabular) y a los formatos (ejemplo y definición) hay que reconocer que no hemos encontrado las ocho posibilidades indicadas anteriormente.

En el caso de las sucesiones no hemos encontrado el fenómeno de aproximación simple intuitiva en el sistema de representación simbólico (ni ejemplo ni definición). Tampoco hemos encontrado dicho fenómeno en el sistema de representación tabular (formato definición) ni en el sistema de representación gráfico (formato definición). Respecto al fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones, no lo hemos encontrado en el sistema de representación tabular (formato definición).

En el caso de las funciones no hemos encontrado el fenómeno de aproximación doble intuitiva en el sistema de representación tabular (formato definición). Tampoco encontramos dicho fenómeno en el sistema de representación simbólico (formato ejemplo). Respecto al fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en funciones, no se observa en el sistema de representación tabular (ambos formatos).

Queda pendiente la explicación de estas ausencias. Ignoramos si se debe a nuestra elección de la muestra o a rechazos espontáneamente colectivos de los autores.

Cuestionario (sucesiones)

Una vez que observamos los fenómenos a.s.i e i.v.s en los libros de texto, nos preguntamos si dichos fenómenos se observarían en las respuestas de los alumnos a un cuestionario sobre el límite finito de una sucesión. Para ello iniciamos la construcción de un cuestionario que se llevó a cabo en tres etapas

Primera etapa. Elaboración de un Cuestionario Inicial y revisión por expertos: profesores de institutos.

Segunda etapa. En ella se siguieron varios pasos:

- Se analizaron las sugerencias de los expertos y se enunciaron las primeras categorías de respuestas.
- Se elaboró un Cuestionario Piloto y se administró dicha prueba en un grupo de ensayo.
- Se estudiaron las respuestas de los alumnos y se tomaron decisiones sobre el instrumento.

Tercera etapa. Se redactó de manera definitiva el instrumento, que constó de un cuestionario (Anexo) y unas categorías de análisis para corregir y clasificar las respuestas obtenidas (véase Tabla 7). Presentamos resultados relativos a esta etapa.

El cuestionario se administró en tres Institutos de Enseñanza Secundaria de Madrid. Participaron 143 alumnos (64 hombres y 79 mujeres) cuyas edades oscilaron entre 16 y 20 años.

Tabla 7. Categorías de respuestas de los alumnos

Categorías	Descripción
C0	Calcula correctamente el límite de la sucesión presentada y emplea la justificación dada por el alumno ficticio
C1	Calcula correctamente el límite de la sucesión presentada y emplea algún fenómeno en sus justificaciones Categoría C1.1. Emplea el fenómeno de aproximación simple intuitiva (a.s.i), representación gráfica y formato ejemplo. Categoría C1.2. Emplea el fenómeno de aproximación simple intuitiva (a.s.i), representación tabular y formato ejemplo. Categoría C1.3. Emplea el fenómeno de aproximación simple intuitiva (a.s.i), representación verbal y formato ejemplo. Categoría C1.4 Emplea el fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta (i.v.s) , representación verbal y formato ejemplo.
C2	Calcula correctamente el límite de la sucesión presentada, pero no emplea

	ningún fenómeno en sus justificaciones Categoría C2.1 Justifica su respuesta de alguna manera, sin emplear ningún fenómeno. Categoría C2.2 No justifica su respuesta.
C3	No calcula correctamente el límite. C 3.1 Usa una idea de infinito potencial. C 3.2 No usa una idea de infinito potencial. [5]
C4	Plantea la necesidad de conocer más valores de la sucesión
C5	No sabe / No contesta

Algunos resultados obtenidos después de administrar el cuestionario:

- El fenómeno de aproximación simple intuitiva en el sistema de representación verbal y en el formato ejemplo fue la respuesta más frecuente a las preguntas 1, 2 y 3a. La respuesta más frecuente a la pregunta 3b fue "no sabe/no contesta".
- En las preguntas 1, 2, 3a se usó en los enunciados el fenómeno de aproximación simple intuitiva. Parece ser que este hecho tiene una influencia notable en el porcentaje de respuestas correctas que toma valores relativamente altos, oscilando entre el 75% y el 85%.
- En la pregunta 3b se usó en su enunciado el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones en el sistema de representación verbal y en el formato ejemplo. En dicha pregunta el porcentaje de respuestas correctas es aproximadamente del 50% lo que muestra las dificultades de los alumnos para responder de manera adecuada cuando se emplea un fenómeno en el ámbito formal.
- Si tenemos en cuenta el periodo 1995-2005 que es el periodo correspondiente a la fecha de publicación de los libros que manejaron los alumnos objeto del estudio podemos observar ciertas similitudes entre el estudio de libros de texto y el estudio de las respuestas de los alumnos. De hecho el fenómeno de aproximación simple intuitiva fue el más frecuente tanto en los libros de texto del periodo considerado como en las respuestas de los alumnos. Por otro lado el fenómeno de retroalimentación cuyo uso es poco frecuente en los libros de texto muestra su equivalente en las respuestas de los alumnos, siendo la frecuencia de este último hecho aún menor.

BREVE MIRADA AL FUTURO

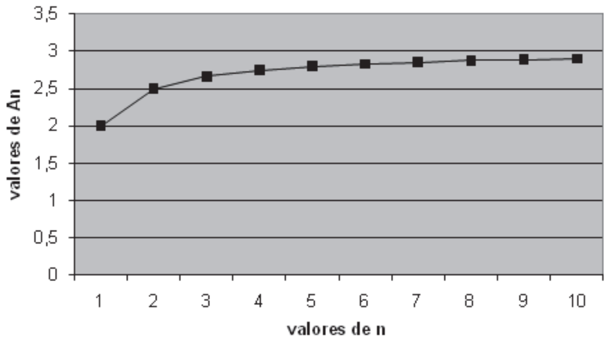
De todo lo que he expuesto me gustaría reseñar algunas cuestiones pendientes para el medio o largo plazo: (i) Cerrar el estudio de la función con límite finito en el infinito. (ii) Unificar los estudios sobre el límite finito para describir mejor este concepto. (iii) Iniciar los estudios sobre el límite infinito. (iv) Ampliar la muestra de libros de texto para incluir más libros españoles y libros en inglés o francés. (v) Aplicar el instrumento diseñado para alumnos a una muestra representativa. (vi) Desarrollar un instrumento basado en Cuestionarios para ampliar significativamente la muestra de profesores entrevistados y sacar conclusiones relevantes sobre el uso de fenómenos en la enseñanza del límite. (vii) Desarrollar actividades de aula integrando eficientemente en ellas los fenómenos estudiados. (viii) Estudiar conexiones con otros enfoques de la enseñanza y aprendizaje del límite.

Se trata de unas expectativas cuya ambición reconozco y para cuyo desarrollo invito a integrarse a aquellos jóvenes y no tan jóvenes que se sientan interesados por el tema.

ANEXO: CUESTIONARIO

1) Se representa gráficamente una sucesión An. El profesor pregunta a la clase: ¿Tiene límite la sucesión? Un alumno responde: "El límite es 3 porque a medida que n crece los valores de la

sucesión se van acercando cada vez más a 3". ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.



2) Dada la siguiente sucesión:

n	1	2	10	1000	1000000	1000000000	....
a_n	0,571428	0,7	1,24	1,496758	1,49999675	1,49999999	....

El profesor pregunta a la clase: ¿Tiene límite la sucesión a_n? Un alumno responde: "El límite es 1,5 porque a medida que avanzo en la sucesión los valores de a_n se aproximan más a 1,5". ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.

3) La sucesión a_n cumple: su primer término vale 2.9, su segundo término vale 2.99, su tercer término vale 2.999, su cuarto término 2.9999, su quinto término 2.99999, su sexto término 2.999999, su séptimo término 2.9999999, su octavo término 2.99999999 y así sucesivamente.

a) Un alumno afirma: "Esta sucesión tiene límite 3, porque a medida que avanza n su valor va acercándose cada vez más a 3" ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.

b) Otro alumno afirma: "La sucesión tiene límite 3 porque la distancia entre los términos de la sucesión y 3, puede hacerse tan pequeña como se desee, a partir de un término convenientemente elegido" ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta de manera razonada.

Referencias

Aldana, E; González, M. T. (2010). Comprensión del concepto de Integral Definida, el caso de un alumno universitario. En González, M. J; González, M. T; Murillo, J (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de Investigación, XIII*

Arce y Ortega (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas en estudiantes de bachillerato. En Berciano, Gutierrez, Estepa y Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XVII*, 147-156.

Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktac, Roa, Trigueros y Weller (2014). Apos theory. A framework for research and curriculum development in Mathematics Education. New York. Springer.

Badillo y Azcárate (2011). Líneas de coherencia y redes sistémicas: una aproximación metodológica para el análisis de la comprensión de profesores de los macro objetos f´(a) y f´(x). En M. Marín Rodriguez y N. Climent Rodriguez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XIV*, 137-160.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Relime vol 4*. Nº3, 219-236.

Bescos, E y Pena, Z. (1998). *Matemáticas 1º Bachillerato. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud*. Madrid: Editorial Oxford Educación.

Camacho, Moreno, Azcárate y González (2013). La resolución de problemas y la tecnología en la formación y desarrollo profesional del profesor de matemáticas. En Estepa y Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XVI*, 105-120.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2006). Fenómenos que organizan el límite. En P. Bolea, M. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X*, 157-171.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite. *PNA, 1*(3), 125-137.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2009). Límite de una sucesión: respuestas de los alumnos de 1º y 2º de Bachillerato. *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación, Monografía XI*, 35-54.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2009). Sobre la equivalencia entre sucesiones con límite finito y sucesiones de Cauchy. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.) *Investigación en Educación Matemática, XIII*, 197-209.

Claros, F. J. (2010). *Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza*. Granada: UGR.

Claros, Sánchez y Coriat (2013). Sucesión convergente y sucesión de Cauchy: hacia una secuencia didáctica basada en la fenomenología. *Enseñanza de las ciencias, 113-131.*

Codes, González, Monterrubio y Delgado (2011). El análisis matemático a través de las situaciones reales presentes en los libros de texto de educación secundaria. En M. Moreno y N. Climent Rodriguez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XIV*, 173-186.

Conejo y Ortega (2013). La demostración matemática en los libros de texto de 2º de B.U.P y 1º de bachillerato de LGE, LOGSE y LOE. En Estepa y Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XVI*, 121-132.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorg, Thomas, C. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: begining with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167-192.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 113-133). Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press

Edwards, B. S., Dubinsky, E. y McDonald, M. (2005). Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 15-25.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Castro (2013).Variación de las concepciones individuales sobre el límite finito de una función en un punto. En Berciano, Gutierrez, Estepa y Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XVII*, 253-262.

Fernandez-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico (2012). Significados del concepto de límite finito de una función en un punto puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato. Analisis conceptual de términos clave. En M. Marín Rodriguez y N. Climent Rodriguez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XV*, 29-46.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Pons, Vals y Llinares (2013). Características de la tematización del esquema de límite de una función. En Berciano, Gutierrez, Estepa y Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XVII*, 449-458.

Primo, A. (1987). *Matemáticas C.O.U.* Madrid: S.M.

Sánchez, M.T (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza*. Granada: UGR.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999). Evolución histórica de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (C.O.U). *Enseñanza de las Ciencias, 17*(3), 463-476.

Spivak, M. (1991). *Calculus. Cálculo Infinitesimal.* Barcelona: Reverté.

Tall, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching*, 49-53.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Vargas, González y Llinares (2011). Atlas.ti como herramienta de análisis de la práctica docente: el caso de la función exponencial. En M. Moreno y N. Climent Rodriguez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XIV*, 187-200.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the theaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Vizmanos, José R., Anzola, M. y Primo Martínez A. (1981). *Funciones-2 Matemáticas 2º B.U.P. Teoría y Problemas*. Madrid: Editorial S.M.

---

[1] Ver Freudenthal (1983) o Claros (2010), pp. 81-82.

[2] Una descomposición genética es un hipotético modelo que describe la estructura mental y los mecanismos que un estudiante podría necesitar construir para aprender un específico concepto matemático (véase Arnon, Cottrill, Dubinsky, Oktac, Roa, Trigueros y Weller (2014))

[3] Solamente hemos elaborado una secuencia para sucesiones con límite finito. Posiblemente, las funciones exijan otra estructura.

[4] Sobre las abreviaturas a.s.i.c, a.s.i e i.v.s, véase el ámbito intuitivo y formal.

[5] Ejemplo: Si el alumno contesta que la sucesión 0,9, 0,99, 0,999... tiende a $0{,}99999\ldots=0{,}\hat{9}$, y no a 1, ha calculado incorrectamente el límite y maneja una idea de infinito potencial.)