RÉPLICA A LA PONENCIA "MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO PARA EL ESTUDIO DEL LÍMITE"

Answer to "Theoretical and methodological framework for the study of the limit"

Myriam Codes

Universidad Pontificia de Salamanca

Resumen

La lectura de la ponencia del Dr. Claros ha inspirado dos ideas principales sobre las que reflexionar. Por un lado, la caracterización de pensamiento matemático avanzado frente a pensamiento matemático elemental que propone. Por otro, el doble papel del aula en las investigaciones en didáctica del Análisis Matemático: como elemento clave por ser el ambiente tradicional donde se desarrolla la enseñanza y el aprendizaje escolar, y como receptora de los resultados de las investigaciones. Con este doble papel como telón de fondo, se proponen dos líneas de debate sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático en contextos de aula: la investigación en el aula y la investigación para el aula.

Palabras clave: *Análisis Matemático, pensamiento matemático avanzado, investigación en el aula y para el aula.*

Abstract

Reading Dr. Claros lecture suggests two ideas to think about. On one hand, the characterization of advanced mathematical thinking versus elementary mathematical thinking proposed. On the other hand, the dual role of the classroom in the research about didactics mathematical analysis: as a key element of the traditional context where teaching and learning are developed, and as a place where research results may be applied. With this dual role as background, two discussing ideas related to didactics on classrooms contexts research are proposed: classroom research and classroom oriented research.

Keywords: M*athematical Analysis, advanced mathematical thinking, classroom research and classroom oriented research.*

INTRODUCCIÓN

El Análisis Matemático ya ha sido protagonista de los seminarios de la SEIEM en años anteriores: en el segundo simposio (Pamplona, 1998) Lacasta disertó sobre el papel de los gráficos cartesianos en el estudio de las funciones; el siguiente año en Valladolid, Azcárate, Camacho y Sierra hicieron un recorrido sobre las investigaciones en didáctica del Análisis Matemático; un año más tarde en Almería, Contreras planteó la enseñanza del Análisis Matemático en el bachillerato y primer curso de universidad desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. En el 2003 González y Sierra nos presentaron el método de investigación histórico en la didáctica del Análisis Matemático a través de un ejemplo con el concepto de límite en manuales, y en 2005 la profesora Azcárate dirigió un seminario sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático en el que Moreno, Font y Camacho abordaron tres nuevos aspectos: concepciones de profesores universitarios, una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada y el uso de herramientas de cálculo simbólico en la enseñanza y el aprendizaje, respectivamente. Hace tres años en Ciudad Real, en otro seminario dirigido por la profesora Moreno sobre la investigación en didáctica de las matemáticas por niveles educativos, Camacho nos ofreció una revisión sobre las

Codes, M. (2014). Réplica a la ponencia "Marco teórico y metodológico para el estudio del límite". En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 33-40). Salamanca: SEIEM.

investigaciones que se habían realizado en los últimos 20 años, en España y a nivel internacional, en didáctica de las matemáticas en el bachillerato y primeros cursos de universidad; gran parte de los trabajos en estos niveles educativos tratan sobre conceptos del Análisis Matemático.

En el seno del Grupo de Investigación en Didáctica del Análisis Matemático (GIDAM) de la SEIEM, se han abordado los principales conceptos propios de este área de conocimiento (límite, infinito, series y sucesiones, función, derivada, integral) desde distintos modelos teóricos (APOS, enfoque ontosemiótico), empleando múltiples metodologías, técnicas e instrumentos de recogida de datos (cualitativa, interpretativa; análisis de manuales, entrevistas estructuradas, cuestionarios, videograbaciones en el aula) y focalizando el objeto de estudio en los distintos protagonistas de la enseñanza y el aprendizaje (profesores, alumnos, currículo, libros de texto). Aunque el principal escenario donde se llevan a cabo la enseñanza y el aprendizaje sobre los que investigamos es el aula, este contexto pocas veces está presente en nuestras investigaciones.

Normalmente se accede al aula para recoger información a través de un cuestionario en el que no queda registro de las interacciones que se producen en el aula, las cuales tienen un papel decisivo en la construcción del conocimiento, tanto por las interacciones entre iguales como por las que se producen entre el profesor y los alumno (Planas, 2006). Para recoger esta información es necesario el empleo de las grabaciones de video cuyo contenido facilita el análisis de la manifestación externa del pensamiento de los alumnos a partir de gestos, habla y acciones (Planas, 2006; Powell, Francisco y Maher, 2003).

Si el acceso al aula para pasar cuestionarios resulta complicado por la obtención de los permisos del centro y la disposición del profesor para realizar este tipo de actividades, pretender grabar en la clase para obtener información sobre cómo se produce la enseñanza y el aprendizaje en un ambiente natural, puede resultar imposible. En general, la búsqueda, coordinación e implicación del profesorado o de los centros es una labor compleja: “Es muy difícil controlar a la perfección estas variables, básicamente, porque la realidad la impone el profesorado que está dispuesto a participar, el cual está integrado en un centro determinado y con unos alumnos concretos que condicionan la experiencia. Hay aspectos que pueden controlarse, pero no todos.” (Bruno, 2002). Una vez en el aula, la recogida de datos tiene que lidiar con los imprevistos del día a día que repercuten en la validez de los datos: que un alumno de la muestra no acuda a clase, que por un error en la reserva de un aula no se pueda utilizar un aula de ordenadores, o que se pierda un episodio interesante porque el profesor se sienta presionado por cumplir un programa o llegue la hora de que entre otro profesor en el aula.

La afirmación anterior sobre la poca presencia del aula en nuestras investigaciones no pretende ser una crítica. Las dificultades asociadas a la obtención de datos justifican sobradamente que nuestras preguntas de investigación no se planteen para ser respondidas con una incursión en el aula. Sin embargo, a pesar de que en muchas investigaciones el aula no está presente explícitamente, en la mayoría de ellas se arrojan resultados aplicables a la misma (en relación a la figura del profesor, del currículo o del alumno). Este es el caso de las investigaciones que nos presenta el profesor Claros, si bien no se han llevado a cabo en el aula, cumplirá con su aplicabilidad a la misma cuando completen el objetivo de “desarrollo de actividades para los alumnos y orientaciones para los profesores” basados en los resultados que nos ha presentado.

SOBRE LA PONENCIA DEL PROFESOR CLAROS

El profesor Claros nos ha expuesto un resumen de las tesis que han defendido él mismo y la Dra. Mª Teresa Sánchez en las que comparten la base sobre la que se asientan, lo que él llama los “tres pilares” (fenomenología, sistemas de representación y pensamiento matemático avanzado). El matiz que diferencia ambas investigaciones es el objeto matemático sobre el que trabajan: el límite finito de una sucesión y sucesión de Cauchy, en el caso de Claros (Claros, 2010) y el límite finito de una función en un punto, en el caso de Sánchez (Sánchez, 2012).

Claros comienza su discurso marcando la necesidad de encontrar un marco teórico que aglutine las investigaciones que se lleva a cabo en área del Análisis Matemático, más concretamente en relación al concepto de límite, y una metodología de investigación con la que se puedan abarcar tanto las investigaciones que estudian distintos ámbitos de la didáctica como son el profesor, los alumnos o los libros de texto, como las investigaciones que tratan distintos conceptos propios del Análisis Matemático. En la comunicación describe el marco teórico y la metodología que han empleado en las tesis y que continúan empleando extendiendo el objeto de estudio al límite infinito de una función en el infinito.

En relación al marco teórico, nos presenta los tres pilares sobre los que se apoyan sus investigaciones: la fenomenología del concepto de límite finito (de sucesión y de función en un punto) y de sucesión de Cauchy, los sistemas de representación y el pensamiento matemático avanzado. Del análisis fenomenológico deriva los dos fenómenos que han encontrado para los tres casos, lo que denominan fenómenos de aproximación intuitiva (a.s.i; a.s.i.c.; A.D.I) y fenómenos de retroalimentación o de ida y vuelta (i.v.s; i.v.s.c; I.V.F) y liga estos fenómenos con el pilar del pensamiento matemático avanzado. Los fenómenos de aproximación están relacionados con la intuición; requieren procesos cognitivos que se engloban en lo que se conoce como pensamiento matemático elemental. Los fenómenos de retroalimentación pertenecen a un ámbito formal y su cognición requiere un pensamiento matemático avanzado. En cuanto a los sistemas de representación, distinguen dos formas en las que aparece el límite en la enseñanza, como ejemplo o en una definición, que se combinan con los cuatro registros que consideran convenientes para representar el límite: verbal, gráfico, simbólico y tabular o numérico. Para llevar a cabo este trabajo han empleado una combinación de métodos según el foco de atención: análisis de libros de texto, cuestionario para alumnos o profesores y entrevistas semiestructuradas a profesores.

Pensamiento Matemático Elemental vs Pensamiento Matemático Avanzado

La investigación en Didáctica del Análisis Matemático deriva del grupo de trabajo que se creó en 1985 en el seno del congreso Psychology of Mathematics Education, cuya principal preocupación fue estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en niveles de enseñanza superior (bachillerato y primeros cursos de universidad) (Azcárate, 1998; Azcárate y Camacho, 2003). Existe un consenso en la dificultad para determinar la línea divisoria de los modos de pensamiento “elemental” y “avanzado”, pero a pesar de que el paso de un modo elemental de trabajar con los conceptos matemáticos a otro avanzado o superior no se da en forma de salto, sino como una transición en la que la actividad matemática requiere cada vez modos de pensamiento más sofisticados, distintos investigadores continúan buscando una caracterización entre ambos modos de pensamiento que contribuya a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje (Selden y Selden, 2005).

Existe un consenso tácito con Dreyfus (1990) en que no se puede distinguir el pensamiento matemático elemental (PME) del pensamiento matemático avanzado (PMA) porque se pongan en juego procesos mentales como “analizar, categoriza, conjeturar, definir, formalizar, generalizar, probar o sintetizar”, ya que cuando un niño pequeño realiza tareas matemáticas sencillas desde un punto de vista matemático también pone en juego alguno de estos procesos, incluido la abstracción; sin embargo, es cierto que las matemáticas asociadas a conceptos matemáticos más complejos requieren con más vehemencia de estos procesos mentales (p. 114).

Debemos diferenciar entre dos acepciones del adjetivo “advanced” relacionadas con el objeto al cual adjetiva: el concepto matemático con el que se trabaja o el tipo de pensamiento que un individuo pone en juego cuando realiza tareas matemáticas. En el primer caso, el adjetivo hace referencia a la complejidad del concepto que se considera “no básico” porque se basa en otros sin cuya comprensión no se puede abordar; en el segundo, el adjetivo caracteriza la demanda de procesos mentales como abstraer y demostrar que normalmente se llevan a cabo en los últimos cursos de secundaria y en la universidad. Ambos están forzosamente relacionados porque un concepto elemental desde el punto de vista matemático, normalmente requerirá un modo de pensamiento más sencillo que otro cuya complejidad precise poner en juego no solo la comprensión de otros conceptos relacionados con él, sino otras habilidades cognitivas más complicadas (Dreyfus, 1990; Selden y Selden, 2005).

De las distintas caracterizaciones que se han propuesto sobre el PMA (Edwards, Dubinsky y McDonald, 2005; Harel y Sowder, 2005; Rasmussen, Zandieh, King y Teppo, 2005; Robert y Schwarzenberger, 1991; Tall, 1991), Claros y su equipo se apoyan en la postura de Edwards, y otros (2005) y Rasmussen, y otros (2005) que consideran que la distinción entre PME y PMA no debe centrarse en el contenido sino “en la naturaleza de la actividad matemática en la que participa el alumno” (Rasmussen, y otros, 2005). En este sentido, a pesar de que el concepto de límite se ha considerado tradicionalmente propio del PMA (Cornu, 1991, Dreyfus, 1991), Claros y su equipo proponen centrar la atención en el tipo de fenómenos que describen (a.s.i, i.v.s,…) para decidir si la actividad que lleva a cabo el alumno en relación al concepto de límite se considera dentro del PME o del PMA. Siendo así, los fenómenos a.s.i/A.D.I que se desarrollan en lo que llaman un ámbito intuitivo (para el caso de la sucesión se evalúan términos de la sucesión para valores de n cada vez mayores y se comprueba que se obtienen valores que están cerca de un valor fijo, el límite) son propios del PME mientras que los que se desarrollan en el ámbito formal pertenecen al PMA.

Esta caracterización parece otorgarle a la intuición un papel decisivo para distinguir el PMA del PME, cuando para Tall (1995) es precisamente la intuición un elemento facilitador del “pensamiento creativo y la investigación” propios de los “matemáticos profesionales y sus alumnos” que alcanzan niveles superiores de PMA. Cabría entonces preguntarse si realmente la actividad matemática que se desarrolla en el ámbito intuitivo es la característica del PME frente al PMA, para los casos de límite finito de sucesión y de función en un punto o, por el contrario, la intuición de lo que ocurrirá cuando el proceso iterativo consistente en evaluar términos de la sucesión continua un número de veces lo suficientemente grande, es un rasgo de pensamiento avanzado. Siguiendo el paralelismo que propone Claros con la teoría APOS, lo que él declara como conjetura acerca de una propiedad de la sucesión (o función), es decir, la intuición del candidato al límite, para Brown, McDonald y Weller (2008) se corresponde con una concepción proceso de proceso iterativo infinito que va más allá del pensamiento matemático elemental. Dado que no queda claro el papel de la intuición como característica de un modo de pensamiento elemental, quizá haya que preguntarse si realmente se puede considerar que interviene la intuición en la acción de comprobar el resultado de evaluar una función en varios puntos (según el caso sucesivos valores de n o sucesivos valores de x cercanos a un valor fijo); esto parece más bien un acto descriptivo que intuitivo, lo cual encaja con la caracterización de Tall (1991): “el paso de la matemática elemental al pensamiento matemático avanzado involucra una transición: de la descripción a la definición, del convencimiento a la demostración lógica basada en las definiciones” (p. 20).

INVESTIGACIÓN EN EL AULA VERSUS INVESTIGACIÓN PARA EL AULA: LA TRANSFERENCIA DE LOS RESULTADOS.

El título del seminario (Investigación en Didáctica del Análisis en contextos de aula) sugiere algún comentario en el que esté presente el aula, bien por su papel en las preguntas de investigación, bien por su papel en los resultados más o menos aplicables de las investigaciones.

En el primer caso me refiero al aula como elemento imprescindible en la investigación porque sea este el ambiente en el que se desarrolle la actividad o se observe el objeto que van a ser investigados. Se ha comentado las dificultades operativas que supone acceder a un aula para recoger información, y la trascendencia que tiene esta limitación en las preguntas de investigación que se pueden responder accediendo al trabajo del aula.

En el segundo caso, el aula es el escenario al que directa o indirectamente se vierten los resultados de las investigaciones. En relación al aula de secundaria obligatoria, Font (2011) distinguió ocho preguntas o necesidades del sistema educativo, representado en su persona como profesor de secundaria, a las que en mayor o menor medida dan respuesta algunas investigaciones cuyos resultados se han presentado en comunicaciones y ponencias presentadas a los Simposios SEIEM entre 1998 y 2010. No ocurre lo mismo en secundaria no obligatoria (bachillerato) y nivel universitario en los que, según Camacho (2011), los resultados de las investigaciones llevadas a cabo en el seno de la SEIEM no son lo suficientemente visibles en la práctica del aula. Para solventarlo, propone que los avances derivados de las investigaciones se plasmen en la práctica de la enseñanza a partir de la elaboración de materiales curriculares.

González (2007) añade otro frente al que deben derivar los resultados de las investigaciones, señalando la formación de profesores como uno de los objetivos de las agendas de investigación. En este campo merece la pena destacar el trabajo pionero que recientemente están llevando a cabo investigadores de la Universidad de Sevilla y de Alicante en el que se han utilizado los resultados obtenidos en la investigación de Sánchez-Matamoros (2004) en relación a la comprensión de los estudiantes del concepto de derivada, para diseñar módulos de enseñanza orientados a la formación de profesores de secundaria; sobre esta investigación versa la aportación de la profesora Sánchez-Matamoros a este seminario. También Font (2011, p. 166) señala la utilidad de un constructo del enfoque ontosemiótico para el diseño de un ciclo formativo en el máster de Profesor de Secundaria de Matemáticas de la Universidad de Barcelona.

Por el momento, parece que el punto fuerte de la transferencia de los resultados de las investigaciones en didáctica del Análisis Matemático a la sociedad se está produciendo en las aulas universitarias con un perfil de alumno que no es el que mayoritariamente ocupa nuestras investigaciones (alumnos de secundaria o primeros cursos de universidad), sino el del futuro profesor de secundaria. Teniendo en cuenta que los investigadores que han llevado a cabo esta transferencia están de algún modo vinculados a los cursos de formación del profesorado, cabe preguntarse cuál es el alcance de la capacidad de acceso al aula por parte de los investigadores.

UN EJEMPLO DE INVESTIGACIÓN EN EL AULA Y PARA EL AULA

El trabajo que realicé para obtener el título de doctor por la Universidad de Salamanca (Codes, 2010) tuvo su origen en mi inquietud como profesora por los problemas de comprensión que año tras año observaba en mis alumnos. La relativa facilidad que tuve para grabar en vídeo tanto el trabajo de mis alumnos como el mío propio en las sesiones habituales de clase, fue uno de los motivos por los cuales los datos de la investigación se obtuvieron íntegramente del aula. Sin entrar en detalles de la investigación que no vienen al caso en este seminario, comentaré brevemente algunos aspectos que considero relevantes en relación a la investigación en el aula.

El uso del adjetivo “relativa” para referirme a la oportunidad que se me brindó para acceder al aula porque en su momento no hubo trabas institucionales, quiere destacar que la dificultad de investigar en el aula no se debe solo al tema de los permisos y la buena disposición del profesor que abre las puertas de su clase a la cámara, sino a otras cuestiones anejas que directa o indirectamente repercuten en los resultados. Sin pretender una lista exhaustiva, enumero algunas de ellas:

- Para que los datos den cuenta de la realidad del aula, es necesario que los protagonistas se sientan cómodos y actúen con naturalidad. Para ello, además de contar con la participación voluntaria de los alumnos, comenzamos a grabar unos días antes del comienzo de las clases que requería la investigación. Así, además de solventar algunos problemas técnicos, se normalizó la presencia de las cámaras en el aula.
- En una clase habitual priman los intereses docentes frente a los de la investigación, de modo que hay situaciones en las que se pueden perder datos, por ejemplo, por la hora de

finalización de la clase: si ocurre un episodio interesante cinco minutos antes de que finalice la clase, probablemente no dé tiempo a que concluya antes de tener que dejar de grabar, bien porque otro profesor entre en el aula o porque el alumno o el profesor tengan que acudir a otra clase.

- Es primordial disponer de herramientas adecuadas para realizar y almacenar las grabaciones del aula y el soporte técnico que requiere el uso de las mismas. En nuestro caso fuimos pioneros en recoger información del trabajo del alumno con el ordenador utilizando un software que graba lo que acontece en la pantalla con independencia de la herramienta que se esté utilizando para la resolver la tarea (Codes, Sierra y Raboso, 2007).
- Hay que asumir los contratiempos del día a día, como la ausencia de un determinado alumno a clase o la disponibilidad de un aula. Estas situaciones reflejan una realidad de la enseñanza que no siempre está visible.

En relación a la transferencia de los resultados de la investigación, las actividades que diseñé han seguido formando parte del material que empleo en mis clases y me apoyo continuamente en el análisis teórico que realicé en la investigación para que mi discurso ayude a que mis alumnos establezcan conexiones entre los elementos matemáticos pertinentes. Además, el visionado de las grabaciones me ha descubierto la relevancia que tienen los aspectos socioculturales en los procesos de construcción del conocimiento. Esta transferencia emergerá en futuros trabajos.

En cuanto a los datos obtenidos, una gran parte no se utilizaron en la tesis pero han dado su fruto en investigaciones posteriores (Codes, Delgado, González y Monterrubio, 2013; Delgado, González, Monterrubio y Codes, 2013).

CUESTIONES PARA EL DEBATE

Propongo dos líneas de debate sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático en contextos de aula.

En relación a la investigación para el aula, ¿cómo podemos, desde nuestra posición de profesores e investigadores, facilitar la transferencia de los resultados de nuestras investigaciones en didáctica del Análisis Matemático al aula?, ¿es un hándicap el que algunos investigadores en este área desarrollen principalmente su labor docente en cursos en los que no se trabajan temas de Análisis Matemático?, ¿o simplemente es que no sabemos vender nuestros productos?

Cuando miramos qué pasa con el Análisis Matemático dentro del aula, focalizando en cualquiera de los protagonistas: profesor, alumno o currículo, ¿a qué se enfrenta el investigador cuando decide recoger datos del trabajo que se lleva a cabo en el ambiente tradicional del aula lejos de un ambiente de laboratorio (creado de forma artificial)?, ¿qué preguntas de investigación promueve el aula?, ¿hay marcos teóricos que se acomoden mejor que otros para obtener resultados útiles?, ¿se pueden obviar los enfoques socioculturales cuando cruzamos la puerta del aula para entrar en ella?

Referencias

Azcárate, C. (1998). Acerca de los procesos del pensamiento matemático avanzado. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 1*(2), 235-240.

Azcárate, C., Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 135-149.

Brown, A., McDonald, M., Weller, K. (2008). Step by step: iterative processes and actual infinity. *Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Issues in Mathematics Education, 5*, 117-144.

Camacho, M. 2011. Investigación en didáctica de las matemáticas en el Bachillerato y primeros cursos de Universidad. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 195-223). Bilbao: SEIEM.

Codes, M. 2010. *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca. http://gredos.usal.es/jspui/bitstream/10366/76452/1/DDMCE_CodesValcarceM_ComprensionConceptos EntornoComputacional.pdf

Codes, M., Delgado, M. L., González, M. T., Monterrubio, M. C. (2013) Comprensión del concepto de serie numérica a través del modelo de Pirie y Kieren. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(3), 135-154.

Codes, M., Sierra, M., Raboso, M. (2007). Innovación en la recogida de datos para una investigación de carácter cualitativo. Un ejemplo con alumnos universitarios en un entorno computacional. En M. Camacho, P. Flores, y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 261-271). San Cristóbal de La Laguna: SEIEM.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Delgado, M. L., González, M. T., Monterrubio, M. C., Codes, M. (2013). El mecanismo *collecting* para la comprensión del concepto de serie numérica. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 245-252). Bilbao: SEIEM.

Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113-134). Cambridge: Cambridge University Press.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.25-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Edwards, B. S., Dubinsky, E. y McDonald, M. (2005). Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 15-25

Font, V. (2011). Investigación en didáctica de las matemáticas en la educación secundaria obligatoria. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 165-194). Bilbao: SEIEM

González, M. T. (2007). Réplica a la ponencia “el papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros” de la profesora Mar Moreno. En M. Camacho, P. Flores, y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 405-414). San Cristóbal de La Laguna: SEIEM.

Harel, G., Sowder, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 27-50

Planas, N. (2006). Modelo de análisis de videos para el estudio de procesos de construcción de conocimiento matemático. *Educación Matemática, 18*(1), 37-72.

Powell, A. B., Francisco, J., Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners’mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Mathematical behavior, 22*, 405-435.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 51-73.

Robert, A., Schwarzenberger, R. (1991). Research in teaching and learning mathematics at an advanced level. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 127-139). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sánchez, M. T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza*. Granada: UGR.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer año de la Universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto)*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla. España. Publicado en 2010 por Edición Digital @ tres, S.L.L.

Selden, A., Selden, J. (2005). Perspectives on advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 1-13.

Tall, D. (1991). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. En L. Meira y D. Carrahar (Eds.), *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 61-75.