ADOPTANDO DIFERENTES PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN SOBRE EL CONCEPTO DE DERIVADA

Different perspectives research about derivative concept

Gloria Sánchez-Matamoros

Universidad de Sevilla

Resumen

En este trabajo se aborda una trayectoria de investigaciones considerando el concepto de derivada. En primer lugar, se presentan investigaciones sobre el desarrollo de la comprensión del concepto y, posteriormente, investigaciones centradas en el aprendizaje de estudiantes para profesor de matemáticas de lo que se considera conocimiento adecuado para la enseñanza de dicho concepto. Esto conlleva, en cierto modo cierta transferencia del conocimiento en el sentido de que dichas investigaciones aportan información para el diseño de módulos de formación, permitiendo realizar investigaciones en el contexto de aula sobre el aprendizaje de los futuros profesores.

Palabras claves: *derivada, desarrollo de la comprensión, formación de profesores, competencia docente, mirar profesionalmente.*

Abstract

In this paper various investigations on the concept of derivative is addressed. Research about the development of understanding of the concept are presented first, and later research focused on learning of mathematics prospective teachers what is considered proper knowledge to learning and teaching that concept. This leads, in a way, transfer of knowledge in the sense that these investigations provide information for the design of training modules, and allows conduct research in the classroom context.

Key words: *derivative, development of understanding, prospective teacher training, teaching competence, professional noticing*.

INTRODUCCIÓN

El desarrollo de las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos del cálculo diferencial e integral y mi experiencia como profesora de Educación Secundaria, me han permitido comprobar la enorme dificultad de la enseñanza y el aprendizaje de estos conceptos y, en particular, del concepto de Derivada. Artigue (1995) indica a que aunque se puede enseñar a los estudiantes a realizar, de manera más o menos mecánica, algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, los estudiantes tienen dificultades en comprender de manera satisfactoria este concepto. Mi trabajo como investigadora relacionada con el concepto de derivada tiene dos etapas:

- Una primera etapa centrada en describir la comprensión de la idea de derivada, y
- Una segunda centrada en el aprendizaje de los estudiantes para profesor de lo que empezábamos a considerar como conocimiento pertinente para la enseñanza-aprendizaje de la derivada generado por las investigaciones. Esta segunda etapa se apoya en la información generada en las investigaciones realizadas en la primera etapa y conlleva aspectos de transferencia del conocimiento al aportar información para el diseño de módulos de formación y al mismo tiempo permite desarrollar investigaciones en el contexto de aula mediante el desarrollo de experimentos de enseñanza.

Sánchez-Matamoros, G. (2014). Adoptando diferentes perspectivas de investigación sobre el concepto de derivada. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 41-53). Salamanca: SEIEM.

INVESTIGANDO LA COMPRENSIÓN DE LA DERIVADA

La comprensión del concepto de derivada es complicada debido a las diferentes perspectivas que puede adoptar dicho concepto: como pendiente de la tangente a la curva, desde un punto de vista gráfico, y como límite del cociente incremental, desde una perspectiva analítica. Además se plantea la necesidad de integrar su carácter puntual (derivada en un punto) y global (e.g. el análisis del comportamiento de las funciones en intervalos) y las relaciones entre la derivada en un punto y la función derivada, y las relaciones entre f' y f''

Una primera aproximación al análisis de la comprensión de la derivada adoptó una perspectiva cognitiva. El foco de atención era caracterizar niveles de desarrollo de la comprensión del concepto considerando diferentes elementos que intervienen tanto desde el punto de vista de la cognición (mecanismos de construcción del conocimiento, formas de conocer, esquema) como de la propia naturaleza del concepto (aproximación al límite, modos de representación, el carácter local o global,…). Aquí se entiende el esquema como una manera de comprender un concepto que implica considerar de forma coherente las relaciones entre los diferentes elementos matemáticos que lo constituyen (Sánchez-Matamoros, García & Llinares, 2013). El uso de estos elementos en la resolución de problemas evidencia la estructura matemática construida por los resolutores. Para interpretar la manera en la que los estudiantes resolvían los problemas en los que intervenía el concepto de derivada se usó una perspectiva piagetiana sobre el desarrollo de un esquema utilizando los niveles Intra, Inter y Trans (García, Llinares &Sánchez-Matamoros, 2011; Sánchez-Matamoros, García & Llinares, 2006).

En estas primeras investigaciones usamos cuestionarios y entrevistas para recoger la información. Las diferentes *demandas de los problemas* usados tenían como objetivo proporcionar diferentes oportunidades para recoger información que nos permitiera caracterizar el desarrollo del esquema de derivada. La entrevista, por su parte, tenía como objetivo obtener justificaciones de las resoluciones de los problemas. Las entrevistas permitieron ampliar la información sobre cómo los estudiantes establecen relaciones entre los elementos, las cuales fundamentaron las inferencias sobre el desarrollo del esquema de derivada, y generaron indicadores de la transición entre los niveles (Sánchez-Matamoros, 2004). Asumir que resolver un problema en un cuestionario y justificar las decisiones tomadas al responder a un entrevistador son actividades cognitivas diferentes nos ha proporcionado datos de naturaleza distinta en relación a la consciencia que los estudiantes tenían de los elementos del concepto que usaban y de cómo los relacionaban.

Los resultados de esta investigación nos indicaron que el desarrollo del esquema de derivada:

- está vinculado a coordinar los elementos del concepto durante la resolución de problemas y
- que los modos de representación influyen a la hora de establecer las relaciones. En este contexto, la "síntesis" de la información gráfica y analítica es considerada una característica del nivel de desarrollo de la comprensión de la derivada. Por la idea de "síntesis" se entiende el proceso por el que a partir de algo que se conoce, realizando operaciones con/sobre ello se llega a la conclusión y a la comprensión de algo que no se conocía. La "síntesis" de la información gráfica y analítica fue considerada una característica de la manera en la que los estudiantes reflexionaban sobre las transformaciones realizadas con los elementos para construir nuevas relaciones y estructuras (nivel Trans de desarrollo del esquema de derivada).

Los resultados obtenidos se han integrado en lo obtenido en las investigaciones realizadas en los últimos años a nivel nacional e internacional, algunas de ellas centradas en el conocimiento del profesor sobre la derivada (Badillo, Azcarate & Font, 2011; Pino-Fan, Godino, Castro & Font, 2012), y otras centradas en la comprensión sobre dicho concepto por parte del estudiante (Asiala, Cottrill, Dubinsky & Schwingendorf, 1997; Baker, Cooley & Trigueros, 2000; Cooley, Trigueros &

Baker, 2007; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; Habre & Abboud, 2006; Salazar, Díaz & Ballen, 2009; Sánchez-Matamoros, García & Llinares, 2008). Los resultados de estas investigaciones indican que el desarrollo de la comprensión del concepto de derivada pone de manifiesto una construcción progresiva del esquema y que los modos de representación influyen en la constitución de los mecanismos de transición de un nivel al siguiente. En particular, los estudiantes situados en el nivel Trans de desarrollo del esquema de derivada y que eran capaces de trasladar las relaciones entre f y f' al par de funciones (f', f'') fue interpretado como que habían tematizado el esquema de derivada. Este resultado parece indicar que hay diferentes estructuras subyacentes en la construcción de un esquema debido a la consciencia con la que los estudiantes usan las relaciones entre una función y su derivada (García et al., 2011).

INVESTIGANDO LA COMPETENCIA DOCENTE "MIRAR PROFESIONALMENTE" LAS EVIDENCIAS DE COMPRENSIÓN DE LA DERIVADA

Los resultados de las investigaciones que aportan información sobre la manera en la que los estudiantes comprenden el concepto de derivada se considera un conocimiento necesario para que el profesor pueda tomar decisiones informadas en su enseñanza y para el desarrollo del currículo. De manera particular en el contexto de la formación de profesores este hecho ha generado una línea de investigación centrada en determinar cómo los futuros profesores aprenden este conocimiento y cómo aprenden a usarlo en las situaciones de enseñanza. Es decir, el trabajo de formación de profesores de Matemáticas de Educación Secundaria ha generado un nuevo foco de investigación centrado en el aula. En particular, cómo los futuros profesores desarrollan una mirada profesional (professional noticing) relativa a la manera en la que reconocen evidencias de la comprensión matemática en los estudiantes. En los últimos años se ha subrayado la importancia de esta competencia docente (Mason, 2002; Sherin, Jacobs & Philipp, 2010; van Es & Sherin, 2002), ya que permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza- aprendizaje de una manera que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas.

En las investigaciones desarrolladas en nuestro grupo, se han generado dos focos de atención. Por una parte caracterizar lo que podemos considerar la competencia docente "mirar profesionalmente" y su papel en la toma de decisiones instruccionales, y en segundo lugar intentar caracterizar grados de desarrollo de esta competencia docente en el ámbito específico de la derivada de una función (Sánchez-Matamoros, Fernández, Valls, García & Llinares, 2012; Sánchez-Matamoros, Fernández & Llinares, 2014). Una característica de esta línea de investigación es el uso de los resultados de las investigaciones previas sobre el desarrollo de la comprensión de la derivada para diseñar las tareas profesionales. Estas tareas profesionales adoptan una doble perspectiva, por un lado como actividades para el aprendizaje del futuro profesor, y por otro como instrumentos de recogida de datos en la investigación centrada en los experimentos de enseñanza. Las actividades que simulan las tareas profesionales en el programa de formación se diseñan a partir de los resultados de investigaciones previas (Asiala et al., 1997; Baker et al., 2000; Ferrini-Mundy & Graham, 1994; García et al., 2011; Habre & Abboud 2006; Zandieth, 2000), centradas en el desarrollo de la comprensión de la función derivada. Los resultados de dichas investigaciones han permitido describir una trayectoria de aprendizaje del concepto de derivada (Sánchez-Matamoros et al., 2014)

Esta trayectoria de aprendizaje de la derivada (Figura 1) ha sido tenida en cuenta para el diseño de las tareas profesionales propuestas a los estudiantes para profesor (EPP). Una de las tareas profesionales del profesor es identificar evidencias de la comprensión de las ideas matemáticas en las respuestas de sus alumnos a los problemas propuestos. Pensando en ello, una de las actividades propuestas en el programa de formación se apoyaba en esta idea. Para ello consideramos:

(i) Tres problemas sobre derivada

(ii) Las respuestas de varios alumnos de Bachillerato a estos problemas, y

(iii) Tres preguntas para el futuro profesor de matemáticas dirigidas a ver cómo reconocía evidencias de la comprensión de los estudiantes del concepto de derivada.

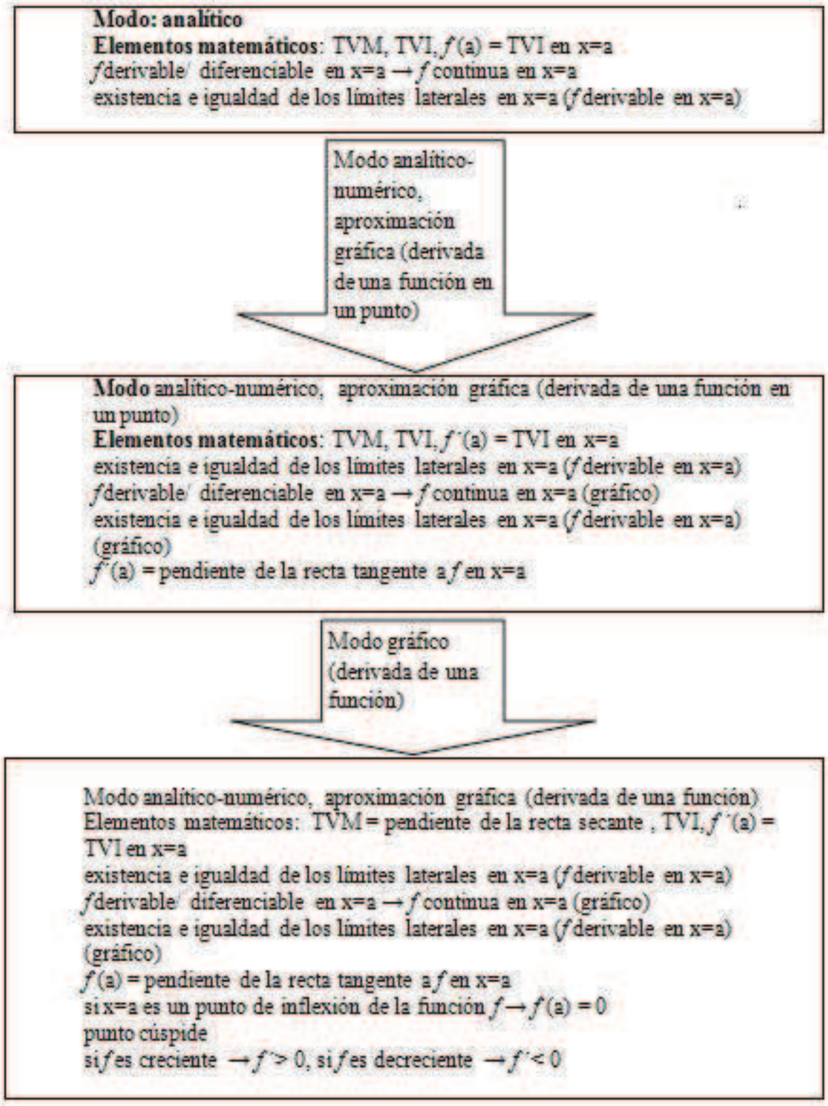


Figura 1. Trayectoria de aprendizaje hipotética del concepto de derivada generada a partir de las síntesis de las investigaciones previas.

(i) Los problemas muestran diferentes elementos matemáticos del concepto de derivada de una función en diferentes modos de representación. En la figura 2 se recoge tres de los problemas usados, los elementos matemáticos que lo configuran y los modos de representación considerados.

(ii) Las respuestas de los estudiantes a estos problemas fueron seleccionadas teniendo en cuenta los niveles de comprensión del concepto de derivada:

- Nivel INTRA: El estudiante usa elementos de la derivada de una función en un punto en algunos de los modos de representación y no es capaz de relacionarlos cuando resuelve los problemas.
- Nivel INTER: El estudiante usa elementos de la derivada de una función en un punto en algunos de los modos de representación y es capaz de relacionarlos cuando resuelve los problemas.

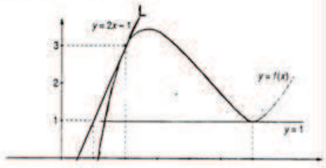
<table>
<tr>
<td>Problema 1
Comprueba que la tasa de variación media de $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ en el intervalo [1, 2] es la pendiente de la recta que pasa por los puntos P(1, f(1)) y Q(2, f(2)). ¿Qué sucede con la tasa de variación instantánea de f(x) en el punto (1, f(1))?</td>
<td>Problema 2
Suponer que la línea L es tangente a la gráfica de la función f en el punto (2,3) como aparece en la figura. Encontrar f(2) y f '(2).

</td>
<td>Problema 3
De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:
<table>
<tr><td>x</td><td>0.9</td><td>0.99</td><td>0.999</td><td>0.9999</td><td>0.99999</td><td>1</td><td>1.00001</td><td>1.0001</td><td>1.001</td><td>1.01</td><td>1.1</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>-2.1</td><td>-2.01</td><td>-2.001</td><td>-2.0001</td><td>-2.00001</td><td>-2</td><td>-2.00002</td><td>-2.0002</td><td>-2.002</td><td>-2.02</td><td>-2.2</td></tr>
</table>
<table>
<tr><td>x</td><td>1.9</td><td>1.99</td><td>1.999</td><td>1.9999</td><td>1.99999</td><td>2</td><td>2.00001</td><td>2.0001</td><td>2.001</td><td>2.01</td><td>2.1</td></tr>
<tr><td>f(x)</td><td>3.61</td><td>3.9601</td><td>3.996001</td><td>3.99960001</td><td>3.9996</td><td>4</td><td>4.00004</td><td>4.00040001</td><td>4.004001</td><td>4.0401</td><td>4.41</td></tr>
</table>
a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en x=2.
b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que f(x) es derivable en x =1?</td>
</tr>
<tr><td>Elementos</td><td>Elementos</td><td>Elementos</td></tr>
<tr>
<td>M1.1 Tasa de variación media en el intervalo [a, b]
M1.2. Relación de la TVM con la pendiente de la secante
M1.3. Tasa de variación instantánea
M1.4. Relación de la TVI con la derivada en x=a.
M1.5. Relación de la TVI con la pendiente de la tangente (entrevista)</td>
<td>M2.Interpretación geométrica de la derivada en un punto: la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva en el punto</td>
<td>M3.1. Aproximación – Calidad de la aproximación
M3.2. Existencia e igualdad de los límites laterales del cociente incremental para que la función sea derivable en x = a (aproximación numérica a través de las tablas de valores)</td>
</tr>
</table>

Figura 2. Elementos matemáticos en la resolución de los problemas usados (Sánchez-Matamoros et al., 2012)

- Nivel TRANS: El estudiante usa todos los elementos de la derivada de una función en un punto tanto en modo analítico como gráfico y en su aproximación numérica relacionándolos cuando resuelve los problemas.

La Figura 3 muestra parte de una de las actividades diseñadas

(iii)Las preguntas para el futuro profesor de matemáticas dirigidas a ver cómo reconocía evidencias de la comprensión de los estudiantes del concepto de derivada tenían el siguiente formato

- *Describe cómo ha resuelto el estudiante X cada problema, indicando los elementos del concepto de derivada utilizados y si el procedimiento usado es adecuado y por qué.*
- *A partir de las descripciones de cómo el estudiante ha realizado los tres problemas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el estudiante X comprende el concepto de derivada?*
- *Considerando la comprensión de derivada del estudiante X mostrada en la resolución de los problemas, si fueras su profesor, ¿qué harías para mejorar esta comprensión?*

Desde la perspectiva del uso de esta tarea profesional como instrumento de recogida de datos, los resultados de esta investigación han permitido empezar a caracterizar descriptores de diferentes grados de desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los estudiantes en el ámbito de la derivada de una función en un punto (Tabla 1). Estos resultados indican que existe cierta relación entre cómo los futuros profesores identifican los elementos matemáticos y los modos de representación en las respuestas de los estudiantes y la manera en la que interpretan estas respuestas como evidencia de la comprensión de los estudiantes.

La importancia de esta caracterización de la competencia docente "mirar profesionalmente" las evidencias de la comprensión de la idea de derivada es que la interpretación generada por los estudiantes para profesor está relacionada con las acciones de enseñanza que proponen para ayudar a estos estudiantes a mejorar su comprensión. Una primera caracterización de este tipo de acciones de enseñanza ha sido descrita en Sánchez-Matamoros et al. (2012) mostrando la relación entre los objetivos de aprendizaje y las características de las tareas curriculares:

- **Sin acción**. No aporta ninguna acción significativa.
- **Acción procedimental**. Acciones centradas en los procedimientos.
- **Acción conceptual sin relaciones**. Acciones centradas en los significados de los elementos matemáticos pero sin establecer relaciones entre los distintos elementos matemáticos y/o modos de representación.
- **Acción conceptual con relaciones**. Acciones centradas en los significados de los elementos matemáticos estableciendo relaciones entre los distintos elementos matemáticos y/o modos de representación.
- **Acción de tematización.** Acciones centradas en que el estudiante sea capaz de pasar de la acción implícita a la utilización consciente, es decir, a la conceptualización de la derivada de una función en un punto.

En este caso, cuando los futuros profesores diferencian algunas características de la comprensión de los estudiantes, proponen acciones de enseñanza centradas en significados (acciones conceptuales o acciones de tematización). En este sentido, se han empezado a generar relaciones entre el nivel de desarrollo de la competencia docente "mirada profesional" de los EPP y las acciones de enseñanza que se proponen (Sánchez-Matamoros et al., 2012).

Estudiante 2 Iniciales nombre y apellidos

Problema 3

De una cierta función f conocemos algunos valores dados en la siguiente tabla:

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	1	1.00001	1.0001	1.001	1.01	1.1
f(x)	-2.1	-2.01	-2.001	-2.0001	-2.00001	-2	-2.00002	-2.0002	-2.002	-2.02	-2.2

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	2	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1
f(x)	3.61	3.9601	3.996001	3.99960001	3.99996	4	4.00004	4.00040001	4.004001	4.0401	4.41

a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en x=2.

b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que f(x) es derivable en x =1?

Estudiante 2

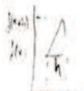
Respuesta al problema		Entrevista
PROCESO DE RESOLUCIÓN (especifica todos los pasos que llevan a la resolución de la tarea) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$  $\frac{4-3'99996}{2-1'99999} = \frac{0'00004}{0'00001} = 4$ $\frac{4'00004-4}{2'00001-2} = \frac{0'00004}{0'00001} = 4$ $\frac{-2+2'00001}{1-0'99999} = \frac{0'00001}{0'00001} = 1$ $\frac{1'00001-1}{-2'00002+2} = \frac{0'00001}{-0'00002} = -0'5$	**RAZONA LA RESPUESTA** El valor de la derivada de f en x=2 es 4	*E2: aplicando la definición de derivada, encontré que en x =2 la aproximación es 4* *I: ¿y en x =1?* *E2: me dio 1 por un lado y por el otro –0,5* *I: y entonces, ¿es derivable?* *E2: en x =2 coinciden. En x =1 no coinciden, entonces no será derivable*

Figura 3. Respuesta de un estudiante a uno de los problemas

Estos resultados indican que aunque los EPP podían tener una formación matemática adecuada para este contenido matemático, resulta difícil para algunos de ellos describir las resoluciones de los estudiantes de bachillerato usando los elementos matemáticos del concepto y reconocer las características de su comprensión. Esta dificultad puso de manifiesto cierta falta de reconocimiento de los elementos matemáticos que intervenían en la resolución de los problemas realizados por los estudiantes y su papel en determinar su comprensión. Esta reflexión pone de relieve el hecho de que tener un cierto nivel de conocimiento del contenido matemático no implica el ser capaz de hablar de cómo ese contenido aparece en la resolución de un problema realizada por un estudiante de bachillerato, y generar información sobre su comprensión.

Tabla 1. Identificar elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes e interpretar la comprensión de los estudiantes (Sánchez-Matamoros et al., 2012)

		Identificar elementos matemáticos y modos de representación		
		Nivel bajo	Nivel medio	Nivel alto
Interpretar la comprensión de los estudiantes (ser capaz de identificar los diferentes niveles de comprensión de los estudiantes)	No reconocen diferentes niveles de la comprensión	EPP no identifican elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes y no reconocen diferentes niveles de la comprensión de los estudiantes.	EPP no identifican todos elementos matemáticos a través de las respuestas de los tres estudiantes y no reconocen diferentes niveles de la comprensión de los estudiantes.	EPP identifican los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes pero no reconocen diferentes niveles de la comprensión de los estudiantes.
	Reconocen dos niveles de comprensión		EPP no identifican todos elementos matemáticos a través de las respuestas de los tres estudiantes y los interpretan reconociendo sólo dos niveles de comprensión.	EPP identifican todos elementos matemáticos a través de las respuestas de los tres estudiantes y los interpretan reconociendo sólo dos niveles de comprensión.
	Reconocen tres niveles de comprensión			EPP identifican todos elementos matemáticos a través de las respuestas de los estudiantes e interpretan los diferentes niveles de comprensión de los tres estudiantes.

Un aspecto característico de la competencia docente “mirar profesionalmente” es el ser capaz de relacionar evidencias específicas a perspectivas más amplias sobre el aprendizaje (Sherin et al., 2010). En los resultados obtenidos, este aspecto se pone de manifiesto a través de las interpretaciones generadas por los EPP sobre la comprensión de la función derivada en un punto de los estudiantes de bachillerato y su vinculación a las actividades que proponían (decisiones de acción). Estos resultados indican que este aspecto es más difícil de conseguir. En el caso particular de futuros profesores de matemáticas que no han recibido instrucción específica sobre la comprensión de la derivada de los estudiantes de Bachillerato, estos resultados ponen de manifiesto la especificidad del conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas, que no deriva necesariamente del conocimiento de matemáticas. Es decir, este tipo de investigación lo que aporta son evidencias sobre el hecho de que el conocimiento de matemáticas es necesario pero no suficiente para ser profesor de matemáticas, ya que se necesita conocimiento especifico sobre cómo los conceptos matemáticos (y en particular el concepto de derivada) llegan a ser comprendidos (Sánchez-Matamoros et al., 2012).

INVESTIGACIÓN SOBRE EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DOCENTE "MIRAR PROFESIONALMENTE" EN EL CONTEXTO DE UN PROGRAMA DE FORMACIÓN

Un segundo foco de atención en las investigaciones desarrolladas sobre la competencia docente ha sido determinar rasgos de su desarrollo vinculado a contextos de formación de profesores específicos (Sánchez-Matamoros, Fernández, Llinares & Valls, 2013; Sánchez-Matamoros et al., 2014). Este foco de atención pone de relieve la relación entre los experimentos de enseñanza y la investigación en el aula (Llinares, 2014-a). En concreto, nuestra pregunta de investigación es:

> ¿En qué medida los estudiantes para profesor de matemáticas identifican e interpretan la comprensión de los estudiantes de Bachillerato después de participar en un entorno de aprendizaje diseñado ad hoc?

Estas investigaciones se apoyan en el diseño de situaciones de enseñanza dirigidas a apoyar el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" (Fortuny & Rodríguez, 2012; Llinares, 2012). Un ejemplo de diseño de estas situaciones de enseñanza, que vinculan propuestas de innovación docente con la investigación sobre cómo los futuros profesores aprenden en el caso de la derivada, se describe a continuación.

En nuestro diseño de enseñanza, en la primera y última sesión, los estudiantes realizaron tareas que tenían como objetivo obtener información sobre su capacidad de reconocer evidencias de la comprensión de los estudiantes de bachillerato cuando observaban las resoluciones de problemas realizadas por dichos estudiantes. Estas tareas tenían la misma estructura que las tareas usadas en los cuestionarios descritos en la sección anterior. Las otras cinco sesiones tenían como objetivo presentar información relativa a la demanda cognitiva de las tareas y sobre las características de la comprensión del concepto de derivada en estudiantes de bachillerato. En cada una de estas sesiones los EPP con el apoyo de información teórica resolvían en parejas tareas centradas en identificar los elementos matemáticos del concepto de derivada y la demanda cognitiva de diferentes problemas e identificar características de la comprensión de la derivada. Al final de cada sesión había una discusión en gran grupo donde se debatía sobre la tarea realizada (Figura 4).

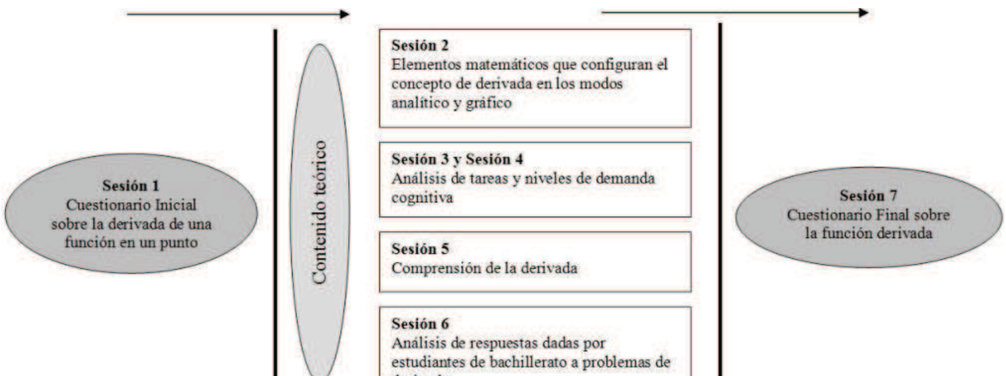
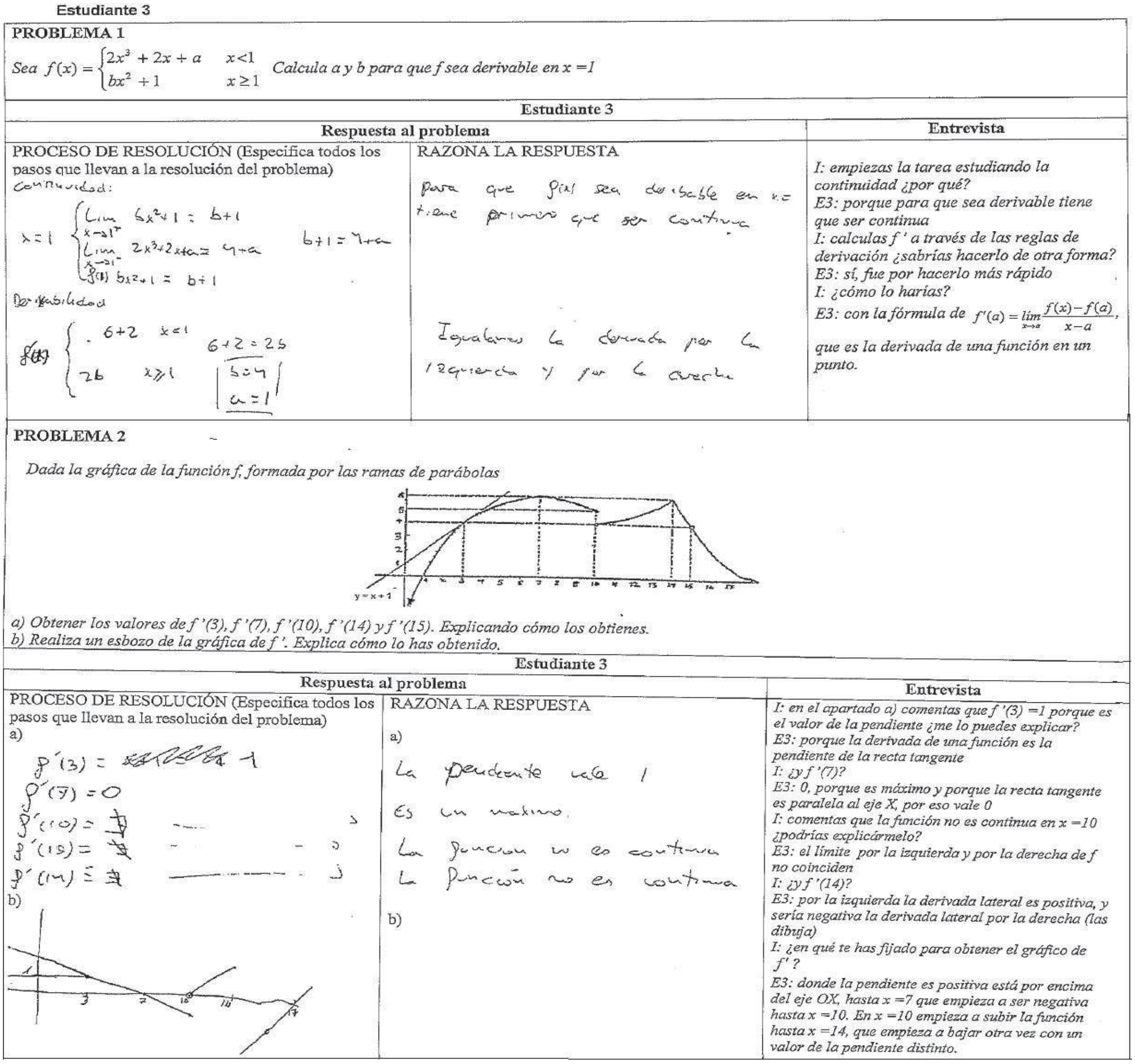


Figura 4. Esquema del diseño del módulo de derivada (Sánchez-Matamoros et al., 2013)

Las actividades iniciales y finales consistían en las respuestas de estudiantes de Bachillerato (16-18 años) a problemas de derivada en un punto, acompañadas de un extracto de entrevista en las que los estudiantes explicaban cómo los habían resuelto y las tres mismas preguntas de la sección anterior. Las respuestas de los estudiantes reflejaban diferentes aspectos de la comprensión sobre la derivada proporcionados por investigaciones previas en relación al desarrollo de la comprensión de la derivada (Figura 5).



Estudiante 3

PROBLEMA 1

Sea $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x + a & x<1 \\ bx^2 + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ *Calcula a y b para que f sea derivable en x =1*

Estudiante 3

Respuesta al problema		Entrevista
PROCESO DE RESOLUCIÓN (Especifica todos los pasos que llevan a la resolución del problema)	RAZONA LA RESPUESTA	*I: empiezas la tarea estudiando la continuidad ¿por qué?* *E3: porque para que sea derivable tiene que ser continua* *I: calculas f ' a través de las reglas de derivación ¿sabrías hacerlo de otra forma?* *E3: sí, fue por hacerlo más rápido* *I: ¿cómo lo harías?* *E3: con la fórmula de* $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, *que es la derivada de una función en un punto.*
Continuidad: ... Derivabilidad: ...	Para que f(x) sea derivable en x = tiene primero que ser continua. Igualamos la derivada por la izquierda y por la derecha	

PROBLEMA 2

Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas

a) Obtener los valores de f '(3), f '(7), f '(10), f '(14) y f '(15). Explicando cómo los obtienes.
b) Realiza un esbozo de la gráfica de f '. Explica cómo lo has obtenido.

Estudiante 3

Respuesta al problema		Entrevista
PROCESO DE RESOLUCIÓN (Especifica todos los pasos que llevan a la resolución del problema) a) f´(3) = 1; f´(7) = 0 ... b)	RAZONA LA RESPUESTA a) La pendiente vale 1. Es un máximo. La función no es continua. La función no es continua. b)	*I: en el apartado a) comentas que f '(3) =1 porque es el valor de la pendiente ¿me lo puedes explicar?* *E3: porque la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente* *I: ¿y f '(7)?* *E3: 0, porque es máximo y porque la recta tangente es paralela al eje X, por eso vale 0* *I: comentas que la función no es continua en x =10 ¿podrías explicármelo?* *E3: el límite por la izquierda y por la derecha de f no coinciden* *I: ¿y f '(14)?* *E3: por la izquierda la derivada lateral es positiva, y sería negativa la derivada lateral por la derecha (las dibuja)* *I: ¿en qué te has fijado para obtener el gráfico de f' ?* *E3: donde la pendiente es positiva está por encima del eje OX, hasta x =7 que empieza a ser negativa hasta x =10. En x =10 empieza a subir la función hasta x =14, que empieza a bajar otra vez con un valor de la pendiente distinto.*

Figura 5. Parte de la actividad final en el modulo de formación: Respuestas de un estudiante de Bachillerato a dos problemas

Después del módulo, los estudiantes para profesor se apoyaron en mayor medida en los elementos matemáticos que habían identificado para interpretar la comprensión de los estudiantes. Este hecho parece sugerir que el desarrollo de esta competencia docente está vinculado a los elementos matemáticos de la noción de derivada que los estudiantes para profesor son capaces de considerar al describir, identificar e interpretar evidencias de la comprensión de la derivada en las respuestas de los estudiantes. Es decir, a centrar la mirada sobre aspectos que puedan mostrar información relevante de la manera de proceder de los estudiantes de Bachillerato. La capacidad de mirar con más detalle las respuestas de los estudiantes y de reconocer lo que es relevante diferenciándolo de lo que es irrelevante para el aprendizaje se convierte en indicadores de esta competencia. En particular esta mejora en la competencia docente está vinculada a la manera en la que los estudiantes para profesor identificaban como relevante para interpretar la comprensión en la manera en la que los estudiantes de Bachillerato usaban las siguientes relaciones en la resolución de los problemas:

- La relación entre el límite del cociente incremental y el significado de la derivada como pendiente de la recta tangente
- La relación entre la derivabilidad de la función y su continuidad, y
- La manera en la que se usaba la información obtenida desde la función o la función derivada alrededor de los puntos de inflexión y el punto cúspide (entendido como la manera de interpretar el comportamiento de la función derivada para inferir información sobre el comportamiento de la función).

En la sección anterior, comentábamos la especificidad del conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas, y que no deriva necesariamente del conocimiento de matemáticas. Este hecho se evidencia al caracterizar los grados de desarrollo. En este sentido, el diseño de situaciones de enseñanza específicas permitió a los futuros profesores de matemáticas identificar e interpretar aspectos de la enseñanza de las matemáticas (en el concepto de derivada) para explicar el aprendizaje matemático de los estudiantes (mirada profesional). Los procesos de identificar e interpretar desarrollados por los EPP permitieron realizar suposiciones más detalladas acerca de la comprensión de los estudiantes y darse cuenta de diferentes signos de la comprensión del concepto de derivada.

DISCUSIÓN

En este trabajo hemos caracterizado una trayectoria de investigación que tiene como foco central de atención el concepto de derivada. Esta trayectoria se inicia con las investigaciones centradas en el desarrollo de la comprensión de dicho concepto y, ha continuado con el diseño de experimentos de enseñanza y realizando investigación en las aulas de los programas de formación de profesores centrándose en el aprendizaje de estudiantes para profesor de matemáticas de lo que consideramos conocimiento adecuado para la enseñanza del concepto de derivada. Esto conlleva, en cierto modo, una manera de entender la transferencia del conocimiento en el sentido de que dichas investigaciones aportan información para el diseño de módulos de formación, además de permitir realizar investigaciones en el contexto de aula (Llinares, 2014-b).

La primera etapa de las investigaciones estuvo centrada en caracterizar diferentes niveles de desarrollo de la comprensión del concepto de derivada considerando diferentes elementos tanto desde el punto de vista de la cognición, como de la propia naturaleza del concepto. Los resultados obtenidos en esta primera etapa nos han permitido hacer un diseño de tareas profesionales, centradas en el aprendizaje de los estudiantes para profesor, para ser usadas en los programas de formación.

Con las diferentes tareas diseñadas se creaban situaciones profesionales en las que los estudiantes para profesor podían comparar las respuestas de un estudiante a diferentes problemas con características diferentes en cuanto a la propia naturaleza del concepto (aproximación al límite, modos de representación, el carácter local o global) y , por el otro, podrían comparar las respuestas dadas a cada problema por distintos estudiantes que mostraban diferentes desarrollo de la comprensión de la derivada (mecanismos de construcción del conocimiento, triada). Estas tareas nos han permitido ayudar a los futuros profesores a desarrollar la competencia docente de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de sus estudiantes y a observar cómo los futuros profesores eran capaces de identificar e interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes.

Mason (2002) considera que el profesor debe ser consciente de cómo interpreta las situaciones de enseñanza y aprendizaje mediante la adopción de una visión estructurada de lo que es relevante para los objetivos de aprendizaje de sus estudiantes. En este sentido, el uso explícito de los elementos matemáticos por parte de los futuros profesores para analizar situaciones de enseñanza aprendizaje son evidencias del desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente". Además, la capacidad de mirar con más detalle las respuestas de los estudiantes y de reconocer lo que es relevante diferenciándolo de lo que es irrelevante para el aprendizaje se convierte en indicadores de esta competencia. La importancia de esta competencia docente viene dada porque diferencia a un profesor de matemáticas de alguien que no es profesor y viene caracterizada por el uso del conocimiento de matemáticas y de didáctica de la matemática en determinadas situaciones.

Los resultados de las investigaciones de esta segunda etapa, nos han proporcionado información para caracterizar niveles de desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente". Es decir, caracterizar el desarrollo de la capacidad de interpretar el aprendizaje matemático de los estudiantes en un dominio de contenido específico, la derivada. En la última etapa de las investigaciones sobre la competencia docente un objetivo ha sido determinar rasgos de su desarrollo vinculado a contextos de formación de profesores específicos lo que ha puesto de manifiesto la relación entre los experimentos de enseñanza y la investigación en el aula. La creación de módulos de enseñanza específico, con situaciones de enseñanza dirigidas a apoyar el desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" las evidencias de la comprensión del concepto de derivada en los estudiantes de bachillerato, ayudó a los futuros profesores a identificar e interpretar diferentes signos de la comprensión del concepto de derivada puestas de manifiesto por los estudiantes de bachillerato. Esta mejora en la competencia docente estuvo vinculada a la manera en la que los EPP identificaban como relevante cómo los estudiantes de bachillerato usaban determinadas relaciones en la resolución de los problemas. En concreto, las relaciones entre el límite del cociente incremental y el significado de la derivada como pendiente de la recta tangente, entre la derivabilidad y la continuidad de la función, y la manera en la que se usaba la información obtenida desde la función o la función derivada alrededor de los puntos de inflexión y el punto cúspide. De esta manera, hemos obtenido información para caracterizar niveles de desarrollo de la competencia "mirar profesionalmente" en el dominio de contenido de la derivada.

Aunque aquí sólo hemos mencionado los resultados obtenidos, el tipo de investigaciones llevadas cabo en esta segunda etapa, investigaciones de aula, nos permite considerar posibilidades muy variadas en cuanto a recogida de datos, pudiendo realizarse además, en distintos momentos del proceso de enseñanza aprendizaje y de distintas formas: cuestionarios individuales, tareas grupales, foros de discusión…, que pueden ayudar a generar nuevo conocimiento sobre cómo los estudiantes para profesor aprenden a usar el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas.

Reconocimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación. España.

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México D.C.: Grupo editorial Iberoamérica, 97-140.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. (1997). The development of students´ graphical understanding of the derivate. *Journal of Mathematical Behavior, 16*, 399-431.

Badillo, E., Azcarate, C. & Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ en profesores de Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(2), 191-206.

Baker, B., Cooley, L. & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *The Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 557–578.

Cooley, L., Trigueros, M. & Baker, B. (2007). Scheme thematization: A framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(4), 370‑392.

Ferrini-Mundy, J. & Graham, K. (1994). Research in calculus learning. Understanding limits, derivates and integrals. In J. Kaput & E. Dubinsky (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning, MAA notes 33* (pp. 31-45). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Fortuny, J.M. & Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *AIEM. Avances de Investigación en Educación matemática, nº 1,* 23-37.

García, M., Llinares, S. & Sánchez-matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*(5), 1023-1045

Habre, S. & Abboud, M. (2006). Student's conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*, 57-72.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, nº 2,* 53-70.

Llinares, S. (2014-a). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de matemáticas. *Educación Matemática, nº extraordinario XXV-aniversario*, 13-34

Llinares, S. (2014-b). De la investigación a la Innovación y la práctica en la enseñanza del Análisis Matemático. En Monográfico –Grupo DAM-SEIEM

Mason, J. (2002). Researching your own practice. The discipline of noticing. London: Routledge-Falmer.

Pino-Fan, L.R., Godino, J.D., Castro, W.F. & Font, V. (2012). Conocimiento didáctico-matemático de profesores en formación: Explorando el conocimiento especializado sobre la derivada. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 427 - 434). Jaén: SEIEM.

Salazar, Cl., Díaz, H. & Ballen, M.B. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto de derivada. *Tecné, Episteme y Didaxis, 26*, 62-82

Sánchez-Matamoros, G. (2004). Análisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer año de la Universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto). Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla. España. Publicado en 2010 por Edición Digital @ tres, S.L.L.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M. & Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 497 - 508). Jaén: SEIEM

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Llinares, S. & Valls, J. (2013). El desarrollo de la competencia de estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria en identificar la comprensión de la derivada en estudiantes de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 501-509). Bilbao: SEIEM

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2014) Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, DOI: 10.1007/s10763-014-9544-y

Sánchez-Matamoros, G., García, M. & Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada [The development of derivative schema]. *Enseñanza de las Ciencias, 24(*1), 85-98.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática [The understanding of derivative as an research topic in Mathematics Education]. *RELIME-Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. & Llinares, S. (2013). Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función. *BOLEMA, 27*(45), 281-302.

Sherin, M., Jacobs, V. & Philipp, R. (Ed) (2010). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes.* New York: Routledge.

Van Es, E. & Sherin, M. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education,* 10, 571-596.

Zandieth, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. In E. Dubinsky, A.H. Shoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV CBMS Issues in Mathematics Education* (*vol. 8, 103-127)*. Providence, USA: American Mathematical Society.