SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN EL AMBIENTE COMPUTACIONAL SUMINISTRADO POR LA TI-92

Jose Luis Lupiáñez Gómez
CINVESTAV del IPN. México.

Introducción

Las primeras aplicaciones de las calculadoras se limitaban básicamente a operar con números, y por lo general su utilidad carecía de otra trascendencia. Ya entre 1974 y 1975, se abrieron nuevas puertas que posibilitaban acciones hasta entonces insospechadas con la aparición de las calculadoras científicas, que permitían realizar actividades que usualmente estaban limitadas al papel y al lápiz. Pero fue a mediados de los ochenta cuando llegó al revolución con la aparición de las calculadoras graficadoras.

Actualmente, algunas de ellas permiten establecer redes bi-direccionales entre distintas representaciones de objetos y relaciones matemáticas, que permiten manipularlas activamente, y suministran extraordinarias herramientas de trabajo en educación matemática. Las tradicionales representaciones analíticas se han visto ampliamente complementadas con los sistemas de representación ofrecidos por estas tecnologías, y en el caso particular de la TI-92, estas posibilidades resultan francamente enriquecidas.

En este trabajo, se analiza el papel de esta calculadora como herramienta de mediación en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes, y se ejemplifican algunas de las ventajas que ofrece el uso de la TI-92 en el aula de matemáticas, como son la posibilidad de afrontar un problema de cálculo de diferentes formas bajo el entorno DERIVE de la calculadora, aprovechando las conexiones entre representaciones analíticas, gráficas y tabulares; la ejecutabilidad de las representaciones computacionales de CABRI, y la capacidad para indagar en técnicas propias de resolución de problemas por parte de los estudiantes.

Sobre las Representaciones

El papel de las representaciones dentro del marco de la educación matemática tiene una importancia muy relevante. El NCTM dentro del borrador de sus Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del 2000 (NCTM, 1998), señala que:

"*Los programas de instrucción matemática, deberían enfatizar las representaciones matemáticas para fomentar la comprensión de las matemáticas de forma que todos los estudiantes:*

- *Creen y usen representaciones para organizar, memorizar y comunicar ideas matemáticas.*
- *Desarrollen un repertorio de representaciones matemáticas que puedan usarse de forma útil, flexible y apropiada.*
- *Usen representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.* "

Pero junto a la importancia que cobran los sistemas representacionales en educación matemática, aparece una idea que es, cuando menos, paradójica: es muy importante, y complicado, no confundir el objeto matemático con ninguna de sus representaciones, pero al mismo tiempo, es obvio que no puede hablarse de ese objeto sin emplear de algún modo una o varias de esas representaciones.

Esta cualidad, distingue a los objetos matemáticos de cualesquiera otros. En la enseñanza de la biología, por ejemplo, un dibujo en la pizarra de un árbol, es una representación icónica de árboles reales, mientras que en matemáticas, el dibujo de un triángulo pintado en la pizarra, es la representación de una idea abstracta (Damerow, 1996).

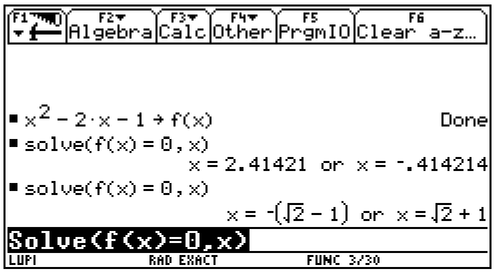
Las representaciones están basadas en una importante función de la mente que Piaget bautizó como *función simbólica*. Ésta, es la habilidad para concebir algo y representarlo; objetos reales actuando como símbolos pueden representar ideas abstractas. Y es la abstracción un proceso constructivo esencial para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, lo cual constituye una diferencia significativa entre esta disciplina y otras como la física o la química, por ejemplo.

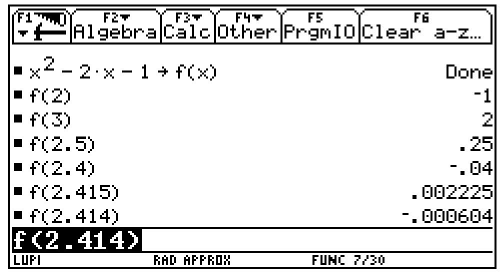
Una clasificación inicial de representaciones puede ser dividirlas en *externas* e *internas*. Las primeras abarcan todas aquellas representaciones que son susceptibles de ser percibidas por los sentidos, mientras que las internas, son imágenes mentales que el sujeto tiene de los objetos y relaciones que forman parte de su conocimiento. Pero ambos dominios, desde un punto de vista genético, no pueden verse como aislados entre sí, pues existen fuertes relaciones entre ellos: las representaciones externas son el medio por el cual los individuos exteriorizan sus imágenes y sus representaciones mentales, las cuales a su vez, se desarrollan según un proceso de interiorización de las representaciones externas (Duval, 1993).

Representaciones en Ambientes Computacionales

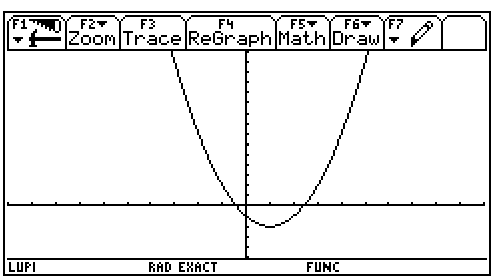
Trabajando en un ambiente computacional, se tiene acceso no sólo a un gran número de representaciones numéricas y gráficas, sino que además se facilita el traslado de unas a otras. Por ejemplo, si estudiamos la búsqueda de los ceros de una función de segundo grado, con la ayuda de la calculadora TI-92, esta es una tarea que puede afrontarse de varias formas.

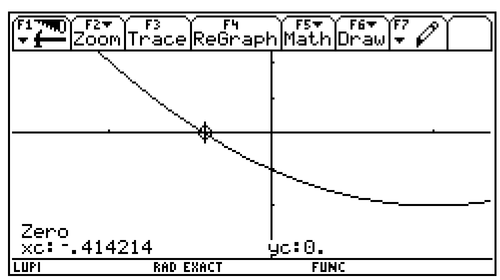
La más inmediata, es usar el comando SOLVE, que nos otorga la raíz de la ecuación correspondiente en fracciones de segundo, si bien, no es el modo más provechoso desde el punto de vista didáctico. Otra opción que permite el poder de cálculo de la máquina, es la aproximación numérica a partir de la definición de la función. En ambos casos, las acciones se realizan desde la pantalla HOME de la TI-92.



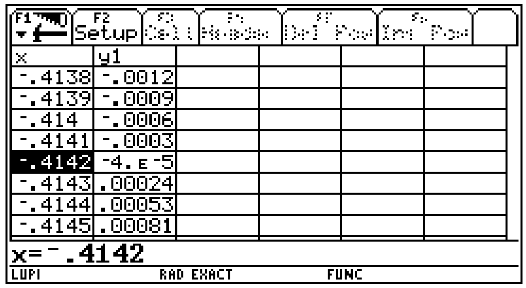


Posibilidades más interesantes nos las brinda la representación gráfica de la función, a partir de la cual podemos ir aproximando la raíz usando los comandos ZOOM y TRACE. Con el primero vamos ampliando la zona de la parábola que más nos interesa, y el segundo va recorriendo la traza de la función indicando el valor de abcisa y ordenada por el que está pasando. Desde la pantalla de graficación, también es ejecutable un comando llamado ZERO, que nos da el corte con el eje con sólo indicarle el intervalo en el que se produce un cambio de signo.





Otra importante cualidad de la TI-92 es la representación tabular; con la orden TABLE, se nos muestra la tabla de valores de la función, que por defecto, va generando las imágenes de los números enteros. Pero dado que podemos elegir el punto de inicio de esa tabla, y la variación con la que deseamos que vaya evaluando, es sencillo ir aproximando los ceros de la función con la precisión que deseemos, como queda

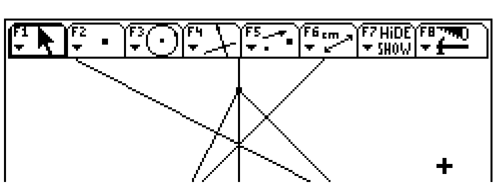


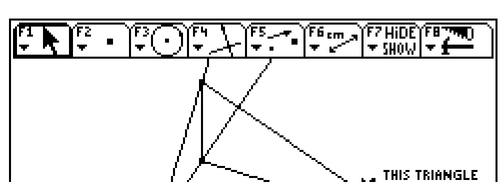
x	y1
-.4138	-.0012
-.4139	-.0009
-.414	-.0006
-.4141	-.0003
-.4142	-4.E-5
-.4143	.00024
-.4144	.00053
-.4145	.00081

De manera somera, se han descrito cinco formas diferentes de abordar con la calculadora un problema que, por tradición, se resolvía sólo usando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado.

Por otra parte, podemos hablar de la calculadora como instrumento de mediación en la formación y estructuración del conocimiento matemático del estudiante, en el momento en que le permite manipular los objetos matemáticos de una forma que no es imaginable sin la ayuda de estas tecnologías. Cuando un estudiante introduce una representación analítica de un objeto matemático en la máquina, ésta le devuelve una representación visual del objeto, que es *ejecutable*, por lo que esta respuesta puede verse como el objeto matemático en sí.

Para ejemplificar este hecho, se puede emplear el paquete geométrico CABRI que trae incorporada la TI-92. Si dentro de este programa representamos un triángulo, y trazamos sus alturas prolongándolas como rectas, observamos que se cortan en un punto. Pero no se trata de que hemos representado *un* triángulo, sino *cualquier* triángulo, pues podemos variarlo de forma, posición, medidas, etc., y se sigue viendo como las rectas señaladas antes, a pesar de variar, continúan cortándose en un punto.





Esto viene a destacar la idea de representaciones ejecutables que brindan estas herramientas, en contraposición a las representaciones estáticas tradicionales, con las que resulta cuando menos imposible visualizar ciertas propiedades de objetos matemáticos.

Estas tecnologías, alteran por tanto la naturaleza del conocimiento matemático, su estructura, la forma de construirlo e incluso la manera de legitimarlo (Moreno y Rojano, 1998). Como se ha señalado antes, las ideas y conceptos abstractos de las matemáticas se convierten en reales con el uso de la calculadora, en el sentido de que se pueden manipular, transformar, en definitiva *intervenir matemáticamente* en ellos.

Toda acción humana, y todo conocimiento están mediados por un instrumento, ya sea material ó simbólico; la calculadora media en la construcción del conocimiento matemático y otorga significado a sus objetos y relaciones al proporcionar a los estudiantes diversas representaciones con las que pueden interactuar.

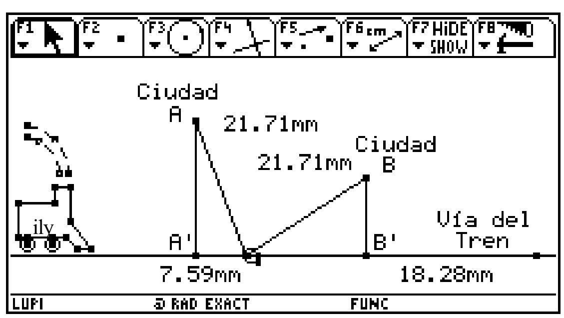
Pero el valor de esta tecnología en la escuela es aún mayor. Los estudiantes pueden explorar los objetos virtuales que las máquinas ofrecen, y contrastar la información recibida con sus propias concepciones, facilitando así el aprendizaje de los conceptos que estén estudiando. Estas actividades suministran al estudiante la posibilidad de construir su propio significado matemático de los objetos, y afrontar la resolución de una tarea de acuerdo a sus creencias, sin necesidad de suscribirse al método habitual o estándar.

Una muestra de esto es la siguiente experiencia. Durante un curso para futuros docentes de matemáticas de Secundaria (Bedoya, 1998) en el que se estudiaba el valor didáctico de la TI-92, el profesor planteó el siguiente problema:

"*Dos ciudades A y B están a 25 Km. y 860 metros de distancia en línea recta. Al mismo tiempo, A dista, también en trayectoria rectilínea, 20 Km. 340 metros de una vía* *de tren, mientras que B está a 11 Km. 720 metros de dicha vía. Los alcaldes de A y B van a construir una estación de ferrocarril en la vía, pero cada uno quiere que esté lo más cerca posible de su ciudad. ¿Dónde habría que construir la estación para satisfacerlos a ambos?"*

El profesor recordó que este problema normalmente se resolvía con técnicas de optimización, que obviamente precisaban de nociones de derivabilidad, o bien mediante cálculo vectorial, pero que con la calculadora, si representábamos gráficamente la función distancia, podíamos hallar la solución calculando el mínimo de esa función a partir de su gráfica, con lo que no se precisaban conocimientos específicos de derivación ni de geometría.

Pero no sólo eso; se consiguió llegar a reducir el problema a un cambio de escala, y con las posibilidades de representación y ejecutabilidad del programa CABRI de la calculadora, la cuestión quedaba zanjada de una forma eficiente. Un paso importante en esta estrategia era que se había conseguido descontextualizar la situación, permitiendo así emplear técnicas que en principio ni se habían considerado.



Los procesos de descontextualización son una aspiración en educación matemática; persiguen que un conocimiento adquirido pueda salir de su contexto, y emplearse en otras acciones. A pesar de que no es posible descontextualizar totalmente un conocimiento, lo que se pretende es que se relacionen entre sí, y puedan aplicarse en diferentes situaciones.

El Papel del Profesor

Sin duda, el eje primordial en torno al cual gira la utilidad y practicidad de las calculadoras es el estudiante, pero ineludiblemente es el docente el que guía su aprendizaje. Un paso relevante en la formación del profesor, es que sea consciente de su propia concepción de las matemáticas, y que debe aceptar que sus alumnos tendrán las suyas propias, para trabajar a partir de ellas, modelarlas, formalizarlas, y no desecharlas, imponiendo sus propias creencias. Y la tecnología es una herramienta útil para explorar las formas de pensamiento de los alumnos.

A través del trabajo que los estudiantes realizan con el apoyo de las calculadoras, el profesor puede acercarse a su forma de pensamiento, sus creencias, sus carencias y sus dificultades. Con esta información, el educador matemático puede alterar o cambiar alguna característica de sus métodos de enseñanza, haciendo así de su labor, una actividad autorreguladora, plausible de ser alterada, y no un patrón de trabajo inamovible que no se adapte a las necesidades de sus alumnos.

Ahora bien, no se puede esperar que tantas y tan complejas tareas puedan ponerse en práctica de forma espontánea, sin adecuar previamente la formación didáctica del profesor y realizar importantes ajustes en el currículum. Cualquier cambio en el sistema educativo pasa por el educador en relación a sus conocimientos, a su metodología, y a sus métodos de evaluación, y por eso debe estar muy en consideración la formación que reciba; aunque como último eslabón del proceso de enseñanza, el docente debe tomar conciencia propia de la necesidad de cambio.

Jose Luis Lupiáñez Gómez
Departamento de Matemática Educativa

CINVESTAV del IPN, México.

Referencias

- BALACHEFF N., KAPUT, J. (1996) **Computer-Based Learning Environments in Mathematics** en BISHOP, A. et al. (eds.) (1996) **International Handbook of Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- BEDOYA, E. (1998) **Calculadoras Gráficas y Enseñanza de las Funciones en Secundaria**. Curso impartido a través de la Universidad de Granada

- DAMEROW, P. (1996) **Abstraction and Representation**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- DUVAL, R. (1993) **Sémiosis et Noésis**. Conférence A.P.M.E.P.I.R.E.M.

- FEY, J., HIRSCH, C. (Ed.) (1992) **Calculators in Mathematics Education**. Reston (Virginia): NCTM.

- MORENO, L. (1998) **History of Calculus and Technology. The Construction of Mathematical Meaning**. CIAEM 50, Neuchâtel.

- MORENO, L., ROJANO, T. (1998) **Las Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas y Ciencias** en *Avance y Perspectiva,* Vol 17, Mayo-Junio 1998.

- NCTM (1998) **Principles and Standards in School Mathematics: Discussion Draft**. Reston (Virginia): NCTM.

- RICO, L. (Coord.) (1997) **La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria**. Barcelona: Horsori.