Aprendizaje de la demostración matemática en enseñanza secundaria

Angel Gutiérrez
Profesor Universidad de Valencia
Departamento de Didáctica de la Matemática
Valencia, España
angel.gutierrez@uv.es

1. Introducción

1.1. Apuntes de historia de las matemáticas.

En la cultura mediterránea clásica, que incluye a Egipto, Grecia y el Imperio Romano entre otros pueblos, los primeros conocimientos que podemos considerar como matemáticos consistían en procedimientos algorítmicos para resolver problemas aritméticos y geométricos concretos que se planteaban en diferentes contextos de la vida de estos pueblos. Por ejemplo, en el terreno de la geometría, en Egipto cada año había que volver a marcar los límites de los campos de cultivo después de la crecida del Nilo. Un procedimiento que usaban para trazar líneas perpendiculares consistía en usar cuerdas cerradas con nudos que, al tensarlas, formaban triángulos rectángulos (figura 1). Se trata de casos particulares del que posteriormente se denominó teorema de Pitágoras.

Figura 1: Herramienta de los agrimensores egipcios.

Algunos papiros encontrados, como el papiro de Rhind y el de Moscú (figura 2), nos muestran otros conocimientos matemáticos de los egipcios, en todo caso ligados a necesidades comerciales, religiosas, etc.

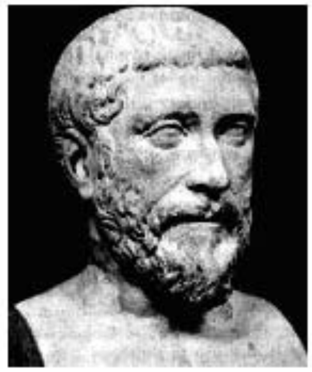
Figura 2: Fragmento del papiro de Moscú

Por otra parte, en Grecia se empezó a crear un cuerpo de conocimientos, propios y ajenos, formados por propiedades geométricas descubiertas por métodos manipulativos o mediante dibujos exactos. Los sabios de esa época llegaban a convencerse de la veracidad de una propiedad por medio de experimentos de dibujo y medición.

Tales de Mileto fue el primer matemático de la cultura mediterránea que justificó la veracidad de las propiedades descubiertas utilizando argumentos lógicos.

Tales de Mileto (aprox. 640 - 545 a.c.)

En la misma época vivió Pitágoras, que ha conseguido llevarse la fama de un teorema que, como veíamos antes, ya era conocido en la cultura mediterránea, aunque no como teorema demostrado sino como regla práctica.

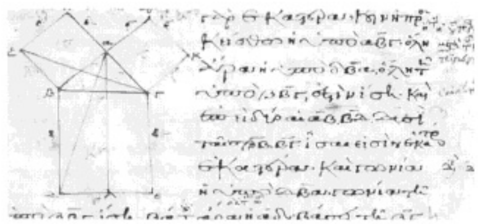


Pitágoras (aprox. 580 - 500 a.c.)

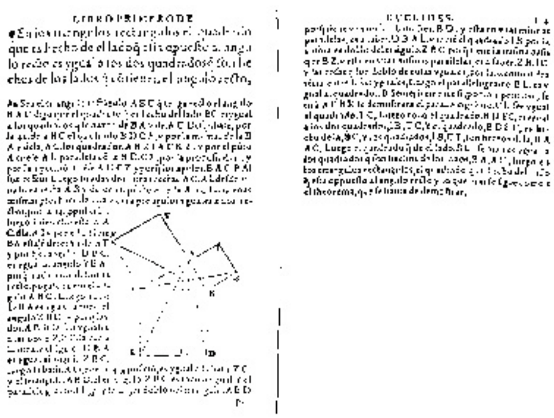
Por su parte, Euclides fue el primer matemático que recopiló los conocimientos geométricos de su tiempo y los estructuró a partir de un sistema axiomático, de forma que todos los teoremas se demuestran derivándolos mediante las reglas de la lógica de axiomas, definiciones y teoremas ya demostrados.

Euclides (aprox. 365 - 300 a.c.)

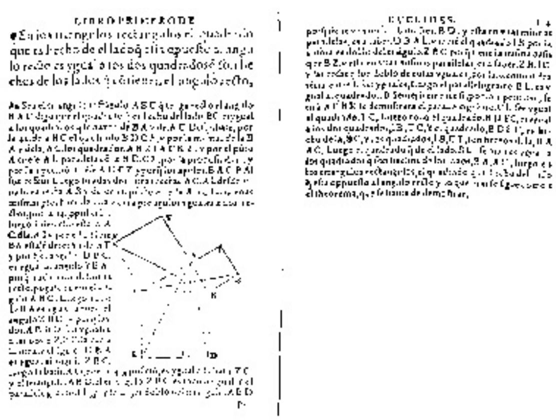
Fue tal el éxito de los “Elementos” de Euclides que durante más de 2200 años han sido el libro de texto con el que se ha enseñado a demostrar a los estudiantes de matemáticas. De hecho, buena parte de la geometría escolar actual sigue estando vinculada, de forma más o menos directa según los países, a los “Elementos”. El estilo de presentación ha cambiado a lo largo del tiempo, pero no el contenido ni la forma, como se aprecia en la figura 3.



Siglo XII



Año 1576



Año 2004

Figura 3: Los Elementos de Euclides (Libro I, proposición 47) en diversas épocas

Debemos esperar hasta finales del siglo XIX para encontrar un cambio significativo en la estructura de las matemáticas aceptada por los matemáticos profesionales. Durante el siglo XIX habían surgido varias “geometrías no euclídeas” al cuestionar la validez del “axioma de las paralelas”. Alrededor del año 1900, Hilbert lidera un movimiento de matemáticos que, para resolver este problema en el sistema axiomático de los “Elementos”, que afectaba a los fundamentos de las matemáticas, definen una nueva estructura de las matemáticas basada en unas reglas de demostración y en un sistema de axiomas que cumplieran los criterios de la lógica moderna, en particular los referentes a la necesidad de consistencia y completitud del sistema axiomático.

Hilbert (1862 - 1943 d.c.)

No obstante, pronto se vio que la perfección de la estructura matemática creada por Hilbert no es completa, pues Gödel demostró en 1931 el “teorema de incompletitud”, que afirma que ningún sistema axiomático suficientemente amplio como para incluir la aritmética elemental puede ser consistente. En otras palabras, hay afirmaciones de las que es posible demostrar que son al mismo tiempo verdaderas y falsas.

Gödel (1906 - 1978 d.c.)

En todo caso, algo en lo que están de acuerdo todos los matemáticos desde Tales de Mileto hasta la actualidad es en que la demostración es el criterio válido para confirmar la veracidad de un teorema. Pero este acuerdo es sólo de principios, pues a lo largo de la historia ha ido cambiando el concepto de "demostración" e, incluso en la actualidad, hay un vivo debate en el seno de la comunidad matemática internacional sobre qué es demostrar y qué tipos de procedimientos son demostraciones y cuáles no lo son.

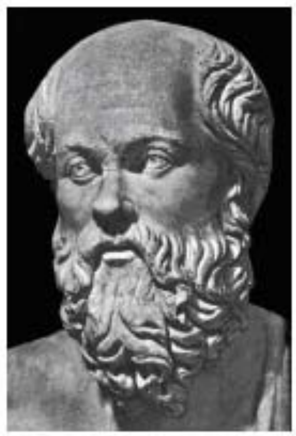
1.2. Apuntes de historia de la didáctica de las matemáticas

La didáctica de las matemáticas (o educación matemática), entendida como la disciplina que se ocupa de todos aquellos factores que tienen que ver con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es un campo científico reciente, que empieza a estructurarse y organizarse a mediados del siglo XX, después de la Segunda Guerra Mundial. No obstante, podemos encontrar trazas de didáctica de las matemáticas desde la más remota antigüedad, allí donde ha habido alguien preocupado por cómo enseñar matemáticas de la mejor manera posible o por entender cómo y por qué se producen los progresos y las dificultades de los estudiantes de matemáticas.

Así, en una de las obras más conocidas de Platón, sus "Diálogos", podemos leer un diálogo idealizado entre Menón y Sócrates sobre la esencia del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Platón (aprox. 427 - 347 a.c.)

La parte más conocida de este diálogo es aquélla en la que Sócrates explica a Menón su concepción del aprendizaje de las matemáticas y se la muestra con la ayuda de un esclavo de Menón al que va enseñando, mediante un dibujo hecho en la arena y sus preguntas y comentarios, a construir un cuadrado con área doble de la de otro cuadrado dado. La esencia del pensamiento de Sócrates respecto del aprendizaje de las matemáticas sigue en vigor en la actualidad como metodología de enseñanza, el "método socrático".



Sócrates (aprox. 470 - 399 a.c.)

Menón:	Consiento en ello, Sócrates. Pero ¿te limitarás a decir simplemente que nosotros nada aprendemos, y que lo que se llama aprender no es otra cosa que recordar? ¿Podrías enseñarme cómo se verifica esto?
. . . . . .	
Sócrates:	Dime, joven: ¿sabes que esto es un cuadrado?
Esclavo:	Sí.
. . . . . .	
Sócrates:	Si este lado fuese de dos pies y este otro también de dos pies, ¿cuántos pies tendría el todo? Considéralo antes de esta manera. Si este lado fuese de dos pies y este de un pie sólo, ¿no es cierto que el espacio tendría una vez dos pies?
Esclavo:	Sí, Sócrates.
Sócrates:	Pero como este otro lado es igualmente de dos pies, ¿no tendrá el espacio dos veces dos?

Esclavo:	Sí.
Sócrates:	¿Luego el espacio tiene dos veces dos pies?
Esclavo:	Sí.
Sócrates:	¿Cuántos son dos veces dos pies? Dímelo después de haberlos contado.
Esclavo:	Cuatro, Sócrates.
Sócrates:	¿No podría formarse un espacio doble que éste y del todo, semejante, teniendo como él todas sus líneas iguales?
Esclavo:	Sí.
Sócrates:	¿Cuántos pies tendría?
Esclavo:	Ocho.
Sócrates:	Vamos, procura decirme cuál es la longitud de cada línea de este otro cuadrado. Las de éste son de dos pies. ¿De cuánto serían las del cuadro doble?
Esclavo:	Es evidente, Sócrates, que serán dobles.
Sócrates:	Ya ves, Menón, que yo no le enseño nada de todo esto y que no hago más que interrogarle. Él imagina ahora saber cuál es la línea con que debe formarse el espacio de ocho pies. ¿No te parece así?
Menón:	Sí.
Sócrates:	¿Lo sabe?
Menón:	No, seguramente.

En este fragmento del diálogo, Sócrates guía al esclavo hacia la solución del problema, de manera que, probablemente de forma consciente, le hace llegar a la solución incorrecta de suponer que si el área del cuadrado se duplica, también la longitud de sus lados se ha duplicado. Este error, derivado de no entender la multilinealidad de las medidas de longitud, área y volumen, sigue estando presente en las clases de matemáticas de todo el mundo. Una vez que Sócrates le ha mostrado a Menón que el esclavo no sabe la respuesta correcta, el diálogo sigue con una sucesión de preguntas mediante las cuales guía al esclavo a darse cuenta de que su anterior respuesta es errónea y a "recordar" la solución correcta del problema.

Del mismo modo que hasta comienzos del siglo XX no se producen cambios en la concepción de la estructura axiomática de las matemáticas, tampoco hay cambios en la concepción de la enseñanza de la demostración. Dichos cambios se van produciendo poco a poco, a partir de los años 1960 y antes o después según los países o las tradiciones culturales, como reflejo de los nuevos puntos de vista de los matemáticos profesionales, y como aplicación de los resultados de la investigación en didáctica de las matemáticas que trata de encontrar maneras de facilitar a los estudiantes el aprendizaje de la demostración.

Así, observando libros de texto de diferentes épocas (figura 4), se nota que en las últimas décadas se ha pasado del estilo tradicional, totalmente formalista, a una diversidad de estilos de enseñanza, que se traducen en diferentes formas de presentar las demostraciones.

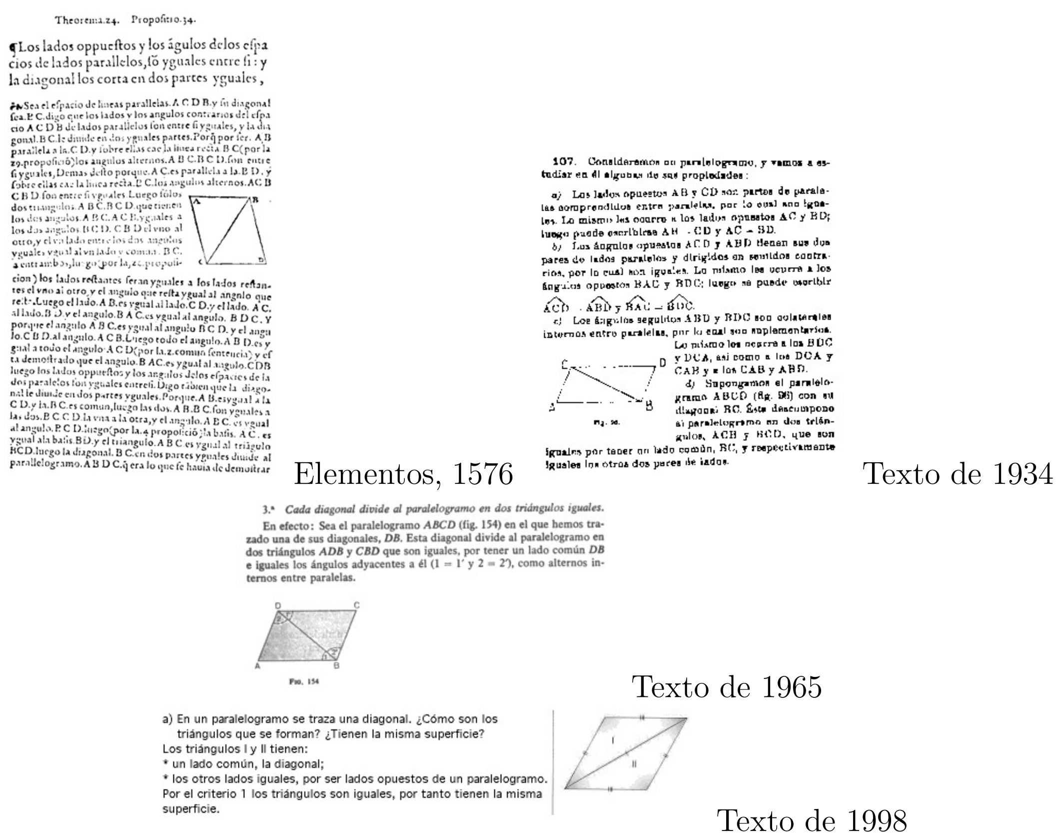


Figura 4: La propiedad de que “cada diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos congruentes” en libros de texto de diferentes épocas.

Podemos observar tres formas principales de presentar las demostraciones en los libros de texto escolares recientes:

La demostración “de dos columnas” (figura 5). Es típica de los países sajones, en particular de EE.UU. Se caracteriza por tener una estructura rígida que presenta la información en dos columnas: En la columna de la izquierda se escriben las afirmaciones o deducciones que conforman el desarrollo lógico de la demostración. En la columna de la derecha se escriben las justificaciones de la veracidad de las afirmaciones escritas en la otra columna.

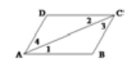
Conjetura	Una diagonal de un paralelogramo divide al paralelogramo en dos triángulos congruentes. 
Datos	$ABCD$ es un paralelogramo. AC es una diagonal de $ABCD$.
Demostrar	$\triangle ABC \cong \triangle CDA$
Afirmaciones	justificaciones
1. $AB \parallel CD$	1. Son lados opuestos de ABCD.
2. □1 ≅ □2	2. Son ángulos alternos internos.
3. □3 ≅ □4	3. Son ángulos alternos internos.
4. AC es un lado común de $\triangle ABC$ y $\triangle CDA$.	4. AC es una diagonal de ABCD.
5. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.	5. Por el criterio ALA de congruencia de triángulos.

Figura 5: Demostración de dos columnas

La demostración mediante “diagramas de flujo” (figura 6). Es muy visual y permite ver con facilidad las relaciones entre las partes de la demostración. Este estilo está presente casi exclusivamente en libros de textos producidos como resultado directo de investigaciones didácticas. Su inconveniente es que sólo resulta útil en demostraciones poco complejas, si bien la mayoría de las demostraciones que se pueden hacer en Secundaria son suficientemente simples para poder representarlas de esta manera.

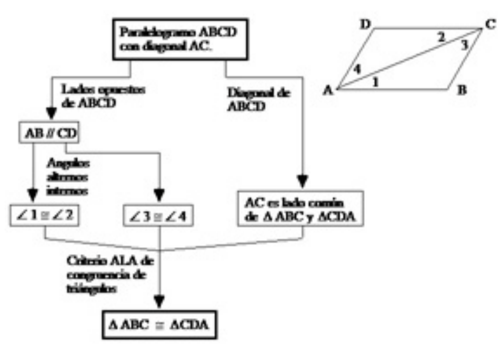
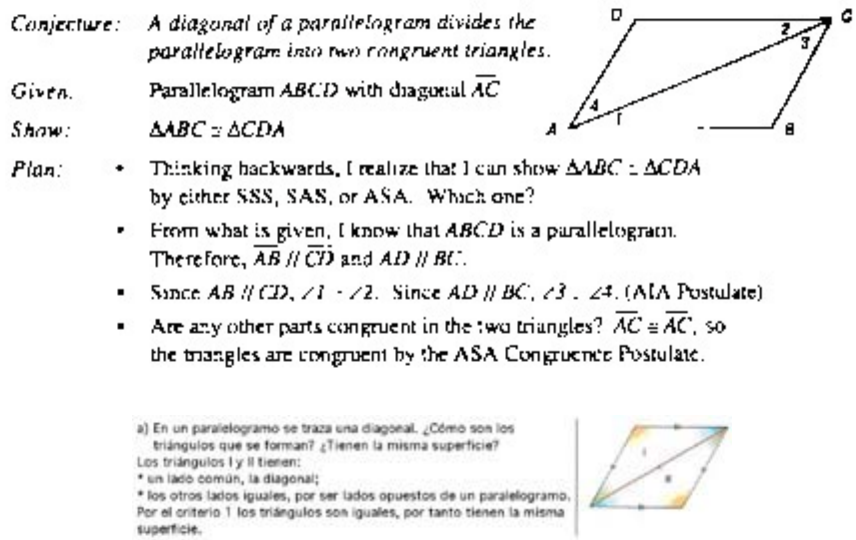


Figura 6: Demostración mediante diagrama de flujo

La demostración “verbal” (figura 7). Es habitual en los libros de texto españoles, y se caracteriza por presentar un texto escrito que se corresponde fielmente con el discurso verbal del profesor en la pizarra. En algunos casos, la forma escrita es más estructurada y en otros casos lo es menos.



Conjecture: *A diagonal of a parallelogram divides the parallelogram into two congruent triangles.*

Given. Parallelogram $ABCD$ with diagonal $\overline{AC}$

Show: $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

Plan:

- Thinking backwards, I realize that I can show $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ by either SSS, SAS, or ASA. Which one?
- From what is given, I know that $ABCD$ is a parallelogram. Therefore, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ and $AD \parallel BC$.
- Since $AB \parallel CD$, $\angle 1 \cong \angle 2$. Since $AD \parallel BC$, $\angle 3 \cong \angle 4$. (AIA Postulate)
- Are any other parts congruent in the two triangles? $\overline{AC} \cong \overline{AC}$, so the triangles are congruent by the ASA Congruence Postulate.

a) En un paralelogramo se traza una diagonal. ¿Cómo son los triángulos que se forman? ¿Tienen la misma superficie?
Los triángulos I y II tienen:
* un lado común, la diagonal;
* los otros lados iguales, por ser lados opuestos de un paralelogramo.
Por el criterio 1 los triángulos son iguales, por tanto tienen la misma superficie.

Figura 7: Dos ejemplos de demostración verbal

1.3. Un importante problema para la didáctica de las matemáticas.

Nadie niega la importancia que tiene la forma de escribir una demostración en la facilidad para entenderla, pero éste es un aspecto puramente formal y secundario en relación con lo que, desde el punto de vista didáctico, son los problemas clave:

- ¿Qué es para los estudiantes demostrar una afirmación matemática?
- ¿Qué procesos mentales tienen lugar durante este aprendizaje?
- ¿Cómo aprenden a demostrar los estudiantes?

La respuesta a la primera pregunta se puede formular de manera muy simple: *Para un estudiante, igual que para un matemático profesional, demostrar una afirmación matemática es dar un argumento que convenza de que dicha afirmación es verdadera.* Pero este enunciado aparentemente tan simple esconde unas sutilezas importantes:

- Los argumentos que produce un estudiante son los que le resultan convincentes a él mismo, es decir los que acepta cuando los recibe del profesor, otro estudiante, etc.

- Un estudiante puede no quedar convencido por el argumento proporcionado por otra persona (por ejemplo su profesor), del mismo modo que un profesor puede no quedar convencido por el argumento proporcionado por un alumno.

- Esto quiere decir que el término "demostrar" puede tener significados diferentes para distintos interlocutores, más típicamente, para el profesor y sus alumnos. Si dos interlocutores dan significados diferentes a este término, no lograrán entenderse (Jaime, Gutiérrez, 1990; Gutiérrez, Jaime, 1998).

Así, este problema tiene varios componentes, conjuntos de subproblemas que es necesario considerar si queremos tener una visión adecuada del problema global del aprendizaje de la demostración:

- Las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas y la demostración matemática y su influencia en la forma de resolver problemas.

- Las creencias de los profesores sobre las matemáticas y la demostración matemática, y su influencia en las creencias de los estudiantes y en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

- Los diversos grados de evolución de las concepciones de demostración matemática de los estudiantes y de sus capacidades para realizar demostraciones.

En la siguiente sección me centraré en el tercer componente, que da respuesta a las dos últimas preguntas que he planteado más arriba.

2. El proceso de aprendizaje de la demostración desde la óptica de los Niveles de Razonamiento de Van Hiele

El modelo de razonamiento matemático de Van Hiele nos ayuda a dar respuesta a la segunda pregunta planteada en la sección anterior. Este modelo constituye la teoría de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas más influyente en la actualidad, especialmente en la enseñanza de la geometría. El modelo de Van Hiele plantea la existencia de cinco niveles de razonamiento matemático a lo largo de los cuales progresan los estudiantes desde sus primeros pasos en el jardín de infancia hasta los estudios más especializados de investigación en el post-grado o como matemáticos profesionales. Muy esquemáticamente, las características de los niveles son (Jaime, Gutiérrez, 1990):

Pierre M. van Hiele en 1999.

Nivel 1: Descripciones o comparaciones de figuras geométricas basadas en elementos o propiedades físicos, con frecuencia irrelevantes. Percepción global de las figuras, como un todo.

*Nivel 2:*Reconocimiento explícito de los elementos o propiedades matemáticos de las figuras. Capacidad de razonamiento matemático empírico o inductivo.

Nivel 3: Capacidad para relacionar lógicamente propiedades, realizar clasificaciones lógicas y definir objetos geométricos. Capacidad de razonamiento matemático deductivo informal.

Nivel 4: Capacidad de razonamiento matemático deductivo formal Se comprenden la estructura axiomática de las matemáticas y sus componentes (axiomas, definiciones, teoremas, etc.).

Nivel 5: Capacidad para analizar la estructura de un sistema axiomático y para relacionar lógicamente diferentes sistemas axiomáticos o sus componentes. Por ejemplo, se puede comparar la suma de los ángulos de un triángulo plano y de un triángulo esférico.

Es evidente que el quinto nivel de razonamiento queda completamente fuera de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas en Secundaria, por lo que no le prestaré atención en adelante. Por otra parte, para el tema que estamos tratando ahora, me interesa destacar las características de los niveles de Van Hiele que tienen que ver específicamente con la habilidad de demostración (Gutiérrez, Jaime, 1998):

Nivel 1: No hay demostración. La veracidad de una afirmación se justifica porque es evidente en una figura geométrica que se está observando, y la afirmación es cierta sólo en esa figura.

Nivel 2: Demostración empírica. La veracidad de una propiedad enunciada se demuestra verificándola experimentalmente en uno o más ejemplos. La demostración consiste en analizar uno o más ejemplos observándolos y realizando mediciones, transformaciones, recuentos, etc.

Nivel 3: Demostración deductiva informal. La veracidad de una propiedad enunciada se demuestra mediante un argumento deductivo abstracto informal. La demostración consiste en crear el argumento deductivo abstracto después de analizar ejemplos para identificar propiedades matemáticas visualmente o realizando mediciones, transformaciones, recuentos, etc. Estas demostraciones, aunque son deductivas, no cumplen los requisitos del lenguaje matemático formal. Los estudiantes pueden comprender pequeñas demostraciones formales explicadas por el profesor, pero no son capaces de hacerlas por sí mismos.

Nivel 4 y 5: demostración deductiva formal. La veracidad de una propiedad enunciada se demuestra mediante un argumento deductivo abstracto formal. En este nivel se llega a producir las demostraciones deductivas formales aceptables por los matemáticos profesionales.

Como se puede notar, el modelo de Van Hiele plantea que aprender a demostrar es un proceso largo, durante el cual los estudiantes van modificando poco a poco su concepción de demostración al mismo tiempo que van aprendiendo técnicas de demostración cada vez más sofisticadas. El modelo de Van Hiele también plantea que no podemos pedirle a los estudiantes de un nivel de razonamiento que realicen demostraciones correspondientes a otro nivel superior. Esto, llevado a la práctica escolar, quiere decir que no podemos pretender que estudiantes de Secundaria que nunca han hecho demostraciones empiecen a realizar de manera comprensiva demostraciones formales. Por el contrario, este camino hacia el aprendizaje de las demostraciones formales no tiene atajos y hay que recorrerlo al ritmo de los estudiantes, no al ritmo de los libros de texto o los currículos escolares. No cabe esperar que los estudiantes medios consigan realizar demostraciones formales complejas antes de terminar Secundaria. Un progreso óptimo razonable de los estudiantes medios, si la enseñanza es adecuada, es (figura 8) que los estudiantes pasen del nivel 1 al 2 durante los últimos cursos de Primaria, del nivel 2 al nivel 3 durante la segunda mitad de Secundaria y que, al terminar Secundaria, parte de los alumnos hayan llegado a realizar demostraciones formales sencillas propias del inicio del razonamiento de nivel 4.

Figura 8: Progreso óptimo del nivel de razonamiento de los estudiantes de Primaria y Secundaria.

3. El proceso de aprendizaje de la demostración desde la óptica de los tipos de demostraciones producidas por los estudiantes.

El modelo de Van Hiele plantea la necesidad educativa de distinguir las demostraciones empíricas (nivel 2) y las deductivas (niveles 3 a 5). Por otra parte, investigaciones didácticas que han analizado las demostraciones producidas por estudiantes de diferentes habilidades y cursos han mostrado que es conveniente analizar más detalladamente las demostraciones correspondientes a cada nivel de razonamiento, pues se observa que los estudiantes, aun requiriendo el mismo nivel de razonamiento, pueden producir demostraciones bastante diferentes. Estas investigaciones nos ayudan a contestar la tercera pregunta que planteaba en la sección 1.3.

En muchas ocasiones, un estudiante no entiende por qué hay que demostrar deductivamente una afirmación matemática. Esto ocurre generalmente porque, para él, se trata de una afirmación obvia o porque ya la considera suficientemente demostrada por las mediciones o transformaciones que ha realizado con algunos ejemplos adecuados. En algunas investigaciones se ha visto que, después de presentar y explicar suficientemente a los estudiantes una demostración deductiva, éstos no quedan convencidos y dicen que es necesario realizar mediciones en ejemplos concretos para asegurar la veracidad del enunciado (Fischbein, 1982).

Así pues, previo al problema de enseñar a demostrar a los estudiantes, está el de identificar las creencias de los estudiantes al respecto y saber qué les convence y qué no les convence de que una afirmación matemática es cierta. El progreso en la habilidad de los estudiantes para hacer demostraciones cada vez más deductivas, abstractas y formales debe ir precedido por un cambio en sus creencias sobre qué demostraciones son válidas y cuáles no lo son. Diversos autores dan cuenta de los resultados de investigaciones en las que exploraron las fuentes de convicción de estudiantes de los diferentes niveles educativos. Sus conclusiones apuntan a que, inicialmente, muchos estudiantes se convencen de que una propiedad matemática es cierta porque se fían de alguna fuente de información externa a ellos (convicción externa). Según De Villiers, esta fuente de convicción externa puede ser (De Villiers, 1991, 1992):

El libro de texto, el profesor o un alumno aventajado, que han afirmado que la propiedad es cierta *(convicción autoritaria).* En ocasiones la "demostración" dada por estos estudiantes es simplemente la afirmación de que dicha propiedad o resultado es cierto.

Ver una demostración de esa propiedad escrita en el estilo de las demostraciones formales *(convicción ritual).* Por ejemplo, en EE.UU. se enseñaba hasta hace pocos años casi exclusivamente la demostración de dos columnas. En este contexto, muchos estudiantes aceptaban o rechazaban una demostración según que estuviera escrita o no en este formato.

Ver o hacer transformaciones de expresiones simbólicas (generalmente algebraicas) relacionadas con esa propiedad *(convicción simbólica).* Aunque esta forma de demostración es válida y puede dar lugar a demostraciones correctas, aquí me refiero al caso de estudiantes que no comprenden el significado del enunciado que tratan de demostrar y que, por tanto, se limitan a aceptar, o realizar, transformaciones simbólicas aunque éstas carezcan de utilidad o sean matemáticamente erróneas.

Por lo que respecta a los estudiantes de Secundaria, es muy interesante la clasificación de Balacheff, el cual identifica las dos categorías de demostraciones que ya he mencionado anteriormente, las empíricas (que él llama "pragmáticas") y las deductivas (que él llama "conceptuales"). Para las demostraciones empíricas, Balacheff introduce una clasificación en varios tipos de demostraciones basada en analizar los motivos por los que los estudiantes usan los ejemplos para demostrar los enunciados. Estos tipos son (Balacheff, 1988a, 1988b, 2000):

Empirismo naïf. Se basa en la verificación del enunciado que hay que demostrar en unos pocos ejemplos, normalmente elegidos de manera aleatoria. Con mucha frecuencia los estudiantes se conforman con verificar un único ejemplo. Se trata del tipo más básico de demostraciones, las primeras que producen de manera autónoma los estudiantes de Secundaria cuando los profesores les piden por primera vez que demuestren algún enunciado. La figura 9 muestra un ejemplo de empirismo naïf, pues el estudiante se conforma con contar las diagonales de n polígono y generalizar el resultado.

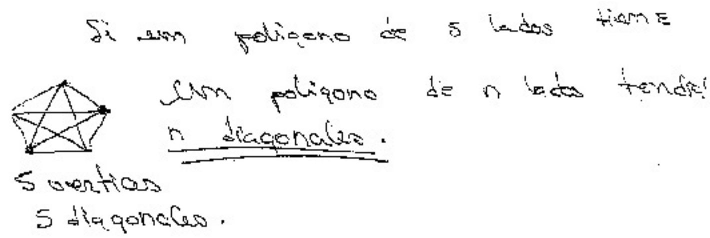


Figura 9: ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados?.

Experimento crucial. Se basa en la selección cuidadosa de un ejemplo con el convencimiento de que si la conjetura es cierta en este ejemplo, lo será siempre. Este tipo de demostración supone un paso adelante respecto del anterior en el camino hacia las demostraciones abstractas. Ahora los estudiantes empiezan a ser conscientes de la infinidad de posibles ejemplos y de que no basta con verificar unos pocos pero no pueden verificarlos todos. Para solventar esta dificultad, eligen ejemplos que, aun siendo particulares, sean "lo menos particulares posible", es decir que sean similares a la mayor parte de los ejemplos que se les pueden ocurrir a los estudiantes. La figura 10 muestra un ejemplo de experimento crucial, evidente al explicar el estudiante que elige "cualquier triángulo".

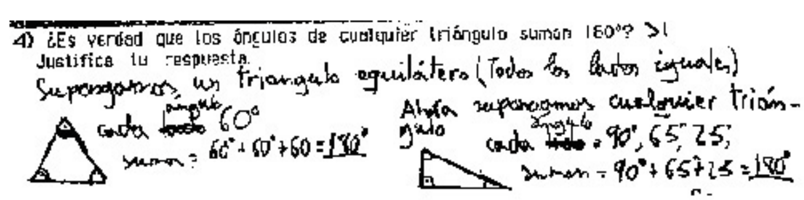


Figura 10: ¿Es verdad que los ángulos de cualquier triángulo suman 180°? Justifica tu respuesta.

Ejemplo genérico Se basa en la selección y manipulación de un ejemplo que actúa como representante de su clase, por lo que la demostración, aunque sea particular, pretende ser abstracta y tener validez para toda la clase representada. Este tipo de demostración supone un nuevo paso adelante respecto de los anteriores en el camino hacia las demostraciones abstractas. Ahora los estudiantes ya son conscientes de que ningún ejemplo es válido "por sí mismo", por lo que buscan ejemplos que actúen como representantes de su familia o clase. Al mismo tiempo, los estudiantes empiezan a usar propiedades abstractas en sus demostraciones, aunque están claramente referidas al ejemplo seleccionado. La figura 11 muestra un ejemplo de este tipo de demostración. El estudiante ya no usa valores numéricos concretos, sino que busca propiedades abstractas generales para hacer la demostración. No obstante, esta demostración es empírica porque se limita a describir la construcción de la figura y no usa las propiedades matemáticas necesarias.

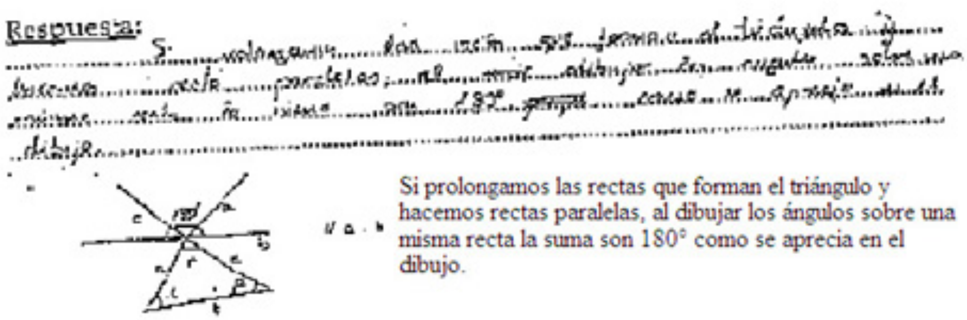


Figura 11: Demuestra que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

Para las demostraciones deductivas, Balacheff distingue los siguientes tipos:

Experimento mental. Se trata de una demostración deductiva abstracta organizada a partir de manipulaciones de ejemplos concretos. Como preparación de la demostración, los estudiantes interiorizan las acciones realizadas durante la experimentación (generalmente observación o transformación de ejemplos), las disocian de esas acciones concretas y las convierten en propiedades abstractas que utilizan para construir un argumento abstracto deductivo. Con frecuencia estas demostraciones aluden a acciones y es posible identificar en ellas un desarrollo temporal, reflejo de la secuencia de manipulaciones y observaciones realizadas. La figura 12 muestra un ejemplo de experimento mental. El estudiante ha dibujado algunos ejemplos y al observar el proceso de dibujo ha identificado un procedimiento de conteo que ha transformado en la fórmula y después en la demostración verbal de la validez de dicha fórmula.

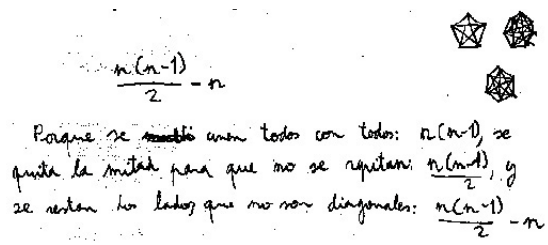


Figura 12: ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados?.

Una característica de los experimentos mentales es que, generalmente, se pueden suprimir los ejemplos que acompañan a la demostración (en este caso los tres polígonos de la esquina) sin que ésta pierda información o deje de ser comprensible. Por el contrario, en los ejemplos genéricos, los ejemplos usados por los estudiantes forman parte de la demostración, por lo que generalmente, si los suprimimos, la parte de demostración que queda pierde información o carece de significado. *Cálculo simbólico* Se trata de demostraciones basadas en la transformación de expresiones simbólicas formales. La figura 13 muestra un ejemplo de demostración mediante cálculo simbólico (procedimiento típico de la trigonometría estudiada en Secundaria).

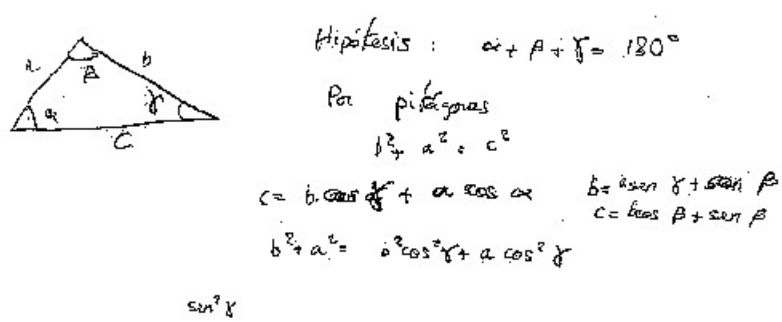


Figura 13: Trata de demostrar que la suma de los ángulos de cualquier triángulo acutángulo es 180°.

Probablemente porque los resultados proceden de experimentos con estudiantes de Secundaria, no suficientemente avanzados, la tipología de Balacheff no analiza en profundidad las demostraciones deductivas formales. Más recientemente, en

Harel, Sowder (1998) se han propuesto varios tipos de demostraciones deductivas que completan la clasificación de Balacheff. Por otra parte, como resultado de investigaciones didácticas que hemos hecho en la Universidad de Valencia, hemos integrado y ampliado las clasificaciones de Balacheff y de Harel y Sowder definiendo unas nuevas categorías que permiten describir de manera más pormenorizada la actividad de los estudiantes cuando resuelven problemas de demostración (Marrades, Gutiérrez, 2000). Mi objetivo en este texto es presentar una introducción a la problemática de la demostración matemática en el contexto de los estudiantes de Secundaria, por lo que no voy a analizar los tipos de demostraciones formales ni las categorías más detalladas mencionados antes. Los lectores interesados en profundizar en este tema pueden encontrar más información en mi página web.

4. Conclusión

Para terminar, quiero insistir en la necesidad de considerar que en la tarea de aprender a demostrar, la destreza en la comprensión y realización de demostraciones formales es sólo el paso final del camino, un paso que la mayoría de estudiantes de Secundaria no llegarán nunca a dar. Más aún, un paso que la mayoría de estudiantes de Secundaria no necesitan dar y que, si los profesores se empeñan en llegar a él saltándose los pasos anteriores, sólo lograrán resultados contraproducentes, como la incomprensión y el bloqueo de sus alumnos. Lo que sí es fundamental en Secundaria es lograr que los estudiantes entiendan la necesidad de demostrar y que hagan demostraciones por los medios de que sean capaces según su destreza matemática y su entrenamiento.

Por otra parte, cada profesor debe intentar, en la medida de las posibilidades económicas y de instalaciones de su centro, aprovechar al máximo las ventajas que le ofrecen los nuevos medios informáticos, en especial los programas de ordenador de geometría dinámica como Cabri o Sketchpad. Hay numerosas investigaciones que demuestran que el software de geometría dinámica es un excelente medio para ayudar a los estudiantes de Secundaria a iniciar y afianzar el aprendizaje de la demostración matemática. Aunque también debemos tener en cuenta que algunas de estas investigaciones nos alertan de problemas que pueden surgir si no se hacen las cosas con cuidado.

Bibliografía

[1] Balacheff, N. (1988a). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège.* tesis doctoral, 2 vols. (Univ. J. Fourier -

Grenoble: Grenoble, Francia).

[2] Balacheff, N. (1988b). *Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics.* en Pimm, D. (ed.) Mathematics, teachers and children. (Hodder & Stoughton: Londres), 216-235.

[3] Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* (Una Empresa Docente: Bogotá, Colombia). [traducción de la tesis doctoral]).

[4] De Villiers, M. (1991). *Pupils' needs for conviction and explanation within the context of geometry* Pythagoras 26, 18-27.

[5] De Villiers, M. (1992). *Children's acceptance of theorems in geometry.* Proceedings of the 16th PME conference, preprint.

[6] Fischbein, E. (1982). Intuition and proof, *For the Learning of Mathematics.* 3.2, 8-24.

[7] Gutiérrez, A.; Jaime, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 20.2/3, 27-46.

[8] Harel, G.; Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies, en Schoenfeld, A.H.; Kaput, J.; Dubinsky, E. (eds.), *Research in collegiate mathematics education, III.*(American Mathematical Society: Providence, EE.UU.), 234-283.

[9] Jaime, A.; Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele, en Llinares, S.; Sánchez, M.V. (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática.* (Alfar: Sevilla), 295-384.

[10] Marrades, R.; Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment *Educational Studies in Mathematics* . 44.1/2, 87-125.