Investigación en Didáctica de la Matemática

Homenaje a Encarnación Castro

Luis Rico
María C. Cañadas
José Gutiérrez
Marta Molina
Isidoro Segovia
(Eds.)

Colección «Didáctica de la Matemática»
Diseño de portada: José L. Lupiáñez
Edición promovida por el grupo de investigación «Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico»
Los capítulos de este libro han superado una revisión por pares.

Comité Científico
L. Rico
M. C. Cañadas
J. Gutiérrez
M. Molina
I. Segovia

Este libro debe ser citado como:
Rico, L., Cañadas, M. C., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (Eds.) (2013).
Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro.
Granada, España: Editorial Comares.

© Los autores

Editorial Comares, S.L.
Gran Capitán, 10 – Bajo
18002 Granada
Telf.: 958 465 382 • Fax: 958 272 736
E-mail: libreriacomares@comares.com
http://www.editorialcomares.com
http://www.comares.com

ISBN: 978-84-9045-095-6 • Depósito legal: Gr. 1.788/2013

Fotocomposición, impresión y encuadernación: COMARES

RELACIÓN DE AUTORES

Abraham Arcavi
Weizmann Institute of Science (Israel)

Lorenzo J. Blanco Nieto
Universidad de Extremadura (España)

Rafael Bracho López
Universidad de Córdoba (España)

María C. Cañadas Santiago
Universidad de Granada (España)

José Carrillo Yáñez
Universidad de Huelva (España)

Marcelo Casis Raposo
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (Chile)

Enrique Castro Martínez
Universidad de Granada (España)

Elena Castro Rodríguez
Universidad de Granada (España)

Francisco Javier Claros Mellado
Universidad Carlos III de Madrid (España)

Antonio Codina Sánchez
Universidad de Almería (España)

Luis C. Contreras González
Universidad de Huelva (España)

Moisés Coriat Benarroch
Universidad de Granada (España)

Carlos de Castro Hernández
Universidad Complutense de Madrid (España)

Aurora del Río Cabezas
Universidad de Granada (España)

Ángel Díez Lozano
Universidad de Granada (España)

Paola Donoso Riquelme
Universidad de Granada (España)

Francisco Fernández García
Universidad de Granada (España)

Alejandro Fernández Lajusticia
Universidad de Valencia (España)

Antonio Fernández Cano
Universidad de Granada (España)

José A. Fernández Plaza
Universidad de Granada(España)

Pablo Flores Martínez
Universidad de Granada (España)

Jesús Gallardo Romero
Universidad de Málaga (España)

Francisco Gil Cuadra
Universidad de Almería (España)

Bernardo Gómez Alfonso
Universidad de Valencia (España)

Pedro Gómez Guzmán
Universidad de los Andes (Colombia)

Evaristo González González
Colegio Público Sierra Nevada, Granada (España)

M.ª José González López
Universidad de Cantabria (España)

José Luis González Marí
Universidad de Málaga (España)

José Gutiérrez Pérez
Universidad de Granada (España)

Josefa Hernández Domínguez
Universidad de La Laguna (España)

Ángel A. López
Universidad de Carabobo (Venezuela) y Universidad de Granada (España)

Carmen López Esteban
Universidad de Salamanca (España)

José Luis Lupiáñez Gómez
Universidad de Granada (España)

Antonio Marín del Moral
Universidad de Granada (España)

Alexander Maz Machado
Universidad de Córdoba (España)

Marta Molina González
Universidad de Granada (España)

María Francisca Moreno Carretero
Universidad de Almería (España)

Antonio Moreno Verdejo
Universidad de Granada (España)

Tomás Ortega del Rincón
Universidad de Valladolid (España)

Antonio Luis Ortiz Villarejo
Universidad de Málaga (España)

M.ª Mercedes Palarea Medina
Universidad de La Laguna (España)

Luis Puig Espinosa
Universidad de Valencia (España)

Luis Radford
Universidad Laurentienne (Canadá)

Rafael Ramírez Uclés
Universidad de Granada (España)

Nuria Rico Castro
Universidad de Granada (España)

Luis Rico Romero
Universidad de Granada (España)

Susana Rodríguez Domingo
Universidad de Granada (España)

Isabel Romero Albaladejo
Universidad de Almería (España)

Juan F. Ruíz Hidalgo
Universidad de Granada (España)

Francisco Ruíz López
Universidad de Granada (España)

María Teresa Sánchez Compaña
Centro de Magisterio María Inmaculada, Antequera (España)

Victoria Sánchez García
Universidad de Sevilla(España)

Isidoro Segovia Alex
Universidad de Granada (España)

Modesto Sierra Vázquez
Universidad de Salamanca (España)

Martín M. Socas Robanya
Universidad de La Laguna (España)

Manuel Torralbo Rodríguez
Universidad de Córdoba (España)

Antonio Tortosa López
Centro de Educación Secundaria y Formación Profesional «S. Ramón y Cajal», Granada (España)

Gabriela Valverde Soto
Universidad Nacional de Costa Rica (Costa Rica)

Danellys Vega Castro
Universidad de Granada (España)

ÍNDICE

Bloque 3

Formación de Profesores e Investigación

UTILIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA POR MAESTROS EN FORMACIÓN EN TAREAS DE DIVISIBILIDAD

Use of the fundamental theorem of arithmetic by a group of training primary teachers on divisibility tasks

Ángel A. López[a,b] *y María C. Cañadas*[b]
[a]Universidad de Carabobo, [b]Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo muestra una investigación que estamos realizando, relativa al conocimiento matemático de futuros maestros sobre divisibilidad. En este capítulo presentamos resultados de las respuestas dadas por 37 futuros maestros a dos cuestiones sobre divisibilidad y teorema fundamental de la aritmética. Estos futuros maestros mostraron una utilización limitada de dicho teorema y manifestaron dificultades para determinar todos los factores-divisores de un número a partir de su descomposición canónica.

Palabra clave: Divisibilidad; Divisores; Factores, Formación de maestros; Teorema fundamental de la aritmética.

Abstract

This work is part of an on going study on divisibility as mathematical knowledge of training primary teachers. In this chapter we present results of the responses by 37 training primary teachers to two questions on divisibility and the fundamental theorem of arithmetic. These future teachers showed a limited use of this theorem. They expressed difficulties in determining all factors-divisors of a number from the canonical decomposition of such number.

Keywords: *Divisibility; Divisors; Factors; Fundamenthal teorem of arithmetic; Training primary teachers.*

Introducción

Las actividades que requieren de la utilización del teorema fundamental de la aritmética plantean dificultades a los estudiantes de diferentes niveles educativos. En las aulas, es usual encontrarse con la pregunta de si el número 1 es primo. Hay maestros en

López, A. A. y Cañadas, M. C. (2013). Utilización del teorema fundamental de la aritmética por maestros en formación en tareas de divisibilidad. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), I*nvestigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 59-66). Granada, España: Editorial Comares.

formación que, en una descomposición en factores primos como $3^2 \times 5^3 \times 7$, para responder si 21 es factor o divisor del número dado, expresan el número en su representación decimal y hacen la división, sin percatarse de que ese proceso no es necesario (López, Castro y Cañadas, 2013). Es frecuente que la transformación del número 45, (como el producto de factores primos) sea realizada sin dificultad pero que, a su vez, no consideren 15 como factor o divisor de 45. Esta y otras situaciones similares tienen que ver con el teorema fundamental de la aritmética. Por ejemplo, si un estudiante considera que el 1 es un número primo, entonces la descomposición no sería única (las descomposiciones con y sin el 1 serían diferentes y válidas).

El teorema fundamental de la aritmética es útil para la realización de algunas tareas de divisibilidad que se plantean en educación primaria. Por tanto, es posible que los futuros maestros tengan que enseñarlo en sus aulas. Además, consideramos que no es suficiente que dicha enseñanza se limite al enunciado del teorema, y que su uso no debería restringirse a la descomposición de un número en factores primos. Estas razones nos motivan a realizar el presente trabajo.

En este capítulo analizamos la utilización del teorema fundamental de la aritmética que hace un grupo de futuros maestros cuando responden dos cuestiones sobre divisibilidad. En el resto del capítulo, describimos el teorema fundamental de la aritmética e introducimos la estructura conceptual de la divisibilidad, presentamos el objetivo de la investigación, explicamos el método, describimos e interpretamos los resultados y, por último, recogemos las conclusiones.

Teorema fundamental de la aritmética y divisibilidad

La primera parte del teorema fundamental de la aritmética hace referencia a la posibilidad de descomponer cualquier número entero mayor que uno en factores primos. Esta descomposición es considerada un procedimiento en sí mismo en el currículo de educación primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007) y en los libros de texto de este nivel educativo. Además, la descomposición en factores primos se usa como parte de un algoritmo que permite calcular divisores de dos o más números, el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor.

En la descomposición de un número entero positivo en factores primos, distinguimos entre factores-divisores explícitos (cada uno de los factores primos con su respectiva potencia que expresan el número) y factores-divisores no explícitos (el resto). En estos últimos, diferenciamos entre los no explícitos de base y los no explícitos de productos internos. Por ejemplo, en la descomposición canónica $3^2 \times 5^3 \times 7$, los factores-divisores explícitos del número son 3^2, 5^3 y 7; los números 3, 5 y 5^2 son los únicos factores-divisores no explícitos de base; y 15, 75, 175 o 1125 son factores-divisores no explícitos de productos internos.

La segunda parte del teorema plantea la unicidad de la descomposición en factores primos. Esta parte del teorema queda al margen en las actividades donde se hace uso del teorema en educación primaria y, usualmente, solo se encuentra en el enunciado del teorema.

La teoría elemental de números y, en particular, el teorema fundamental de la aritmética se consideran contenidos útiles para que los futuros maestros logren una comprensión conceptual de propiedades y estructuras numéricas (NCTM, 1989) y para que puedan entender y tratar sus ideas fundamentales en las aulas (Conference Board of the Mathematical Sciences, 2001). Zazkis y Campbell (1996) constatan que, aunque muchos futuros maestros de educación primaria están familiarizados con dicho teorema y son capaces de enunciar y explicar su significado, no tienen la capacidad de aplicarlo en la resolución de problemas sobre divisibilidad.

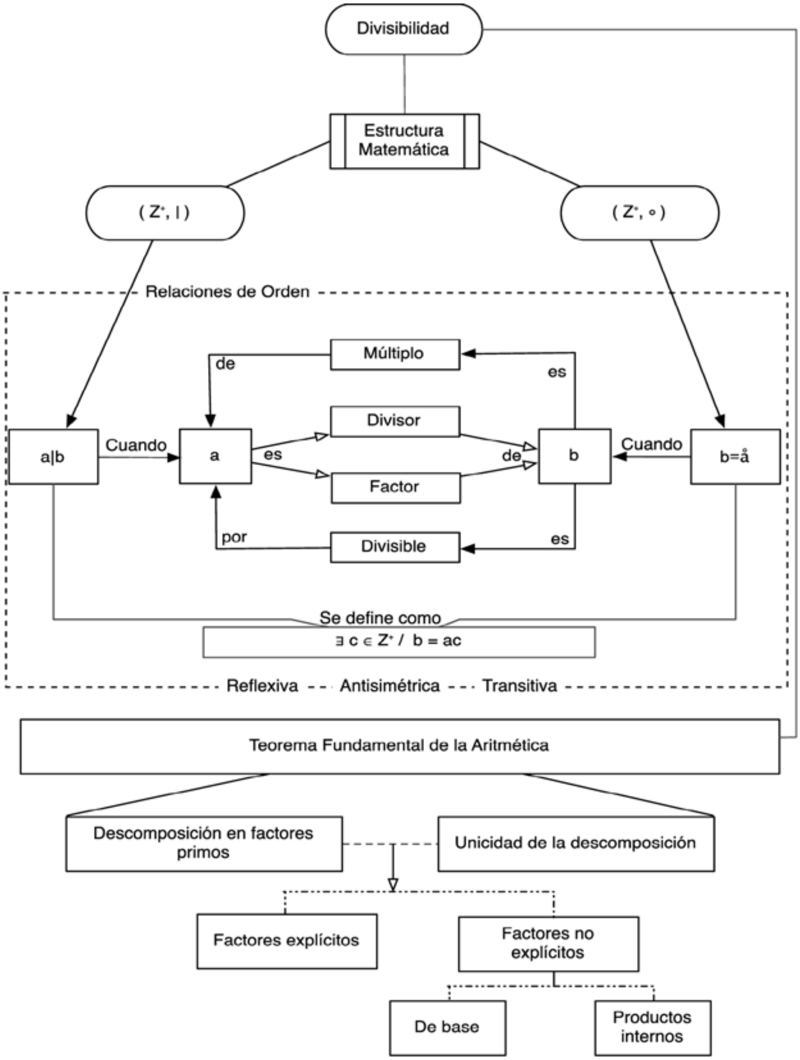


Figura 1. *Estructura conceptual de divisibilidad*

En la Figura 1 presentamos la relación que hemos considerado con el teorema fundamental de la aritmética y la estructura conceptual de la divisibilidad. La descomposición en factores primos aporta información importante para decidir sobre factores-divisores de un número y, en general, para decidir sobre las relaciones de divisibilidad.

Zazkis y Liljedah (2004) asocian la comprensión de la divisibilidad en N, con la descomposición en factores. Muchos autores han coincidido en sus investigaciones en la necesidad de avanzar en el campo de la teoría elemental de números y maestros en formación, así como en la comprensión de conceptos relacionados con la divisibilidad (Brown, Thomas y Tolias, 2002; Castro y Molina 2011; Leinkin, 2006; Zazkis, 2000).

Objetivo de investigación

El objetivo del trabajo que recogemos en este capítulo es describir la utilización que hacen futuros maestros de educación primaria del teorema fundamental de la aritmética, en tareas sobre divisibilidad. Esperamos poder aplicar los resultados para la mejora de la docencia de los futuros maestros.

Método

Desarrollamos 3 sesiones de trabajo sobre divisibilidad con 37 maestros en formación que cursaban la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria, del Grado de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Granada en 2012. Nos centramos en una sesión en la que realizaron una tarea compuesta por varias cuestiones. Debían resolver la tarea individualmente, aunque estaban organizados en grupos de 3 o 4 compañeros, con los que podían hablar. Los futuros maestros disponían de 1,5 horas para esta tarea. Recogimos el trabajo individual escrito y grabamos en audio las discusiones de cada uno de los grupos. Por su relación con el teorema fundamental de la aritmética, nos centramos en las cuestiones 4 y 5 de la tarea mencionada.

4. Escribe todos los factores del número 459 distintos de 3 y 17. Explica tu respuesta.
5. Escribe un número, diferente de 45, que tenga exactamente seis divisores. Explica tu respuesta.

Con cada una de las cuestiones, indagamos sobre el uso o no del teorema y la consideración de los factores explícitos y no explícitos en la descomposición canónica de un número. La Cuestión 4 se refiere a una situación familiar para los futuros maestros, mientras que la Cuestión 5 supone una situación poco habitual ya que la respuesta no es única, por lo que les proponemos un ejemplo del que puedan extraer conclusiones.

Con base en nuestros intereses investigadores y una revisión preliminar de las respuestas, consideramos las siguientes categorías para el análisis de las mismas: utilización del teorema (utilización de la descomposición canónica de un número, consideración de la unicidad establecida por el teorema) y reconocimiento de los diferentes tipos de factores-divisores definidos anteriormente. Codificamos las respuestas de los futuros maestros con estas categorías. Presentamos un ejemplo de codificación de la respuesta de Jesús a la Cuestión 4, en la Figura 2.

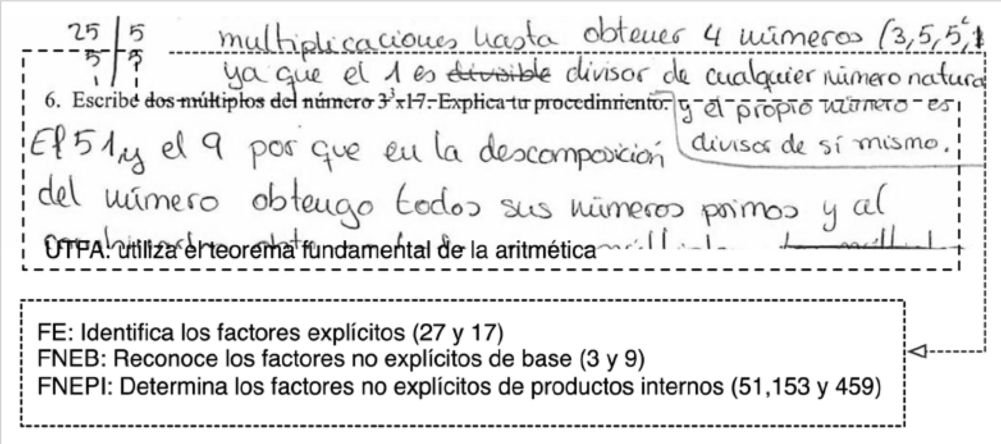


Figura 2. *Respuesta de Jesús a la Cuestión 4*

Resultados y discusión

A la Cuestión 4 respondió un 78,4% de los futuros maestros, mientras que a la Cuestión 5 respondió un 67,6%. Resumimos la información referente a las categorías consideradas en la Tabla 1. Los datos son porcentajes sobre el total de respuestas dadas a cada una de las dos cuestiones.

Tabla 1. *Respuestas de las cuestiones 4 y 5, expresadas en porcentajes*

Nº	UTFA	FE	FNEB	FNEPI
4	75,9	72,7	81,8	72,7
5	60,0	73,3	60,0	53,3

Nota. UTFA=utiliza el Teorema fundamental de la aritmética, FE=identifica los factores explícitos en la descomposición canónica; FNEB=reconoce los factores no explícitos de base en la descomposición canónica; FNEPI=determina los factores no explícitos de productos internos en una descomposición canónica.

En la Cuestión 4, el 75,9% de los futuros maestros que respondieron, utilizaron el Teorema fundamental de la aritmética. Todos ellos hicieron la descomposición en factores primos del número 459 y la mayoría identificó los factores-divisores explícitos y no explícitos. En la Figura 2 se puede observar que Jesús identifica los factores explícitos (27 y 17), los no explícitos de base (3 y 9) y no explícitos de productos internos (51,153 y 459) en la descomposición canónica del número. Sin embargo, no todos los futuros maestros lograron identificar los factores explícitos y no explícitos en la descomposición canónica hecha. El 27,3% de los futuros maestros que respondió, no identificó los factores explícitos en la descomposición canónica del número, el 18,2% no identificó los factores no explícitos de base y el 27,3% no identificó los factores no explícitos de los productos internos.

En la Cuestión 5, el 60% utilizó el teorema fundamental de la aritmética para responder. Las estrategias seguidas por los futuros maestros para responder las podemos agrupar en tres tipos: (a) escoger un número al azar y descomponerlo en factores primos, luego probar a dividirlo para saber si cumple con la condición de exactamente seis divisores; (b) escoger cuatro números primos al azar y la unidad y, luego, hacer el producto de ellos; y (c) descomponer en factores primos el número dado como ejemplo y escribir otro número con característica similares a este en su descomposición en factores primos.

Independientemente de la estrategia utilizada para responder a la Cuestión 5, se observa confusión para determinar los factores explícitos y no explícitos en una descomposición canónica. El 46,7% de los futuros maestros que respondieron, no identificó los factores que no están explícitos y que son resultado de productos internos de la descomposición canónica del número (ver Figura 3). El 40% no identificó los factores no explícitos de base en la descomposición canónica y el 26,7% mostró confusión para identificar los factores explícitos en una descomposición canónica.

Manuel (ver Figura 3) utiliza cuatro números primos, la unidad y el producto de todos ellos para responder. Consideró que el número 75361 es el producto de cuatro factores primos $11\times13\times17\times31=75361$. Sin embargo, no consideró los productos internos entre los números primos que también son divisores del número (e.g., 11×13 o $11\times17\times31$). En la grabación de audio, donde participó Manuel con dos compañeros más, constatamos que no consideraron la posibilidad de los factores no explícitos de productos internos como una situación que se presenta en cualquier descomposición canónica.

> Manuel: …ah ya! entonces hago factores primos, multiplica $1\times2\times3\times7\times11\times13$ el trece es primo ¿no?.
>
> José: si el 13 es primo.
>
> David: 6006… no pero espérate porque es un rollo, no porque luego puede ser divisible por 6.

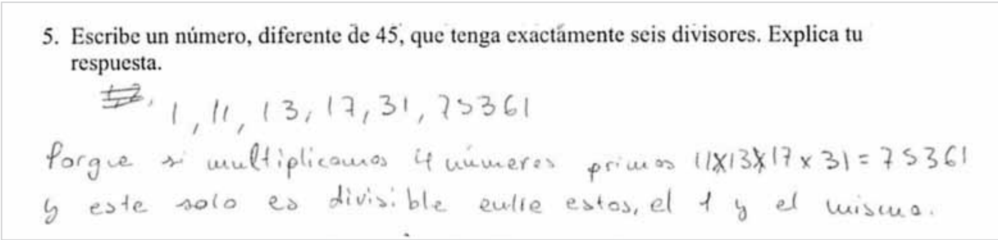
La advertencia es evidente porque el número es 6006 y sólo sospecharon del 6 como posible divisor diferente del número, pero en ningún caso advirtieron que 6 es producto de 2×3. Luego, acordaron escribir otro número que sea producto de números primos y decidieron que los números debían ser mayores. Nuevamente, no consideraron los factores no explícitos de productos internos.

> José: …el uno y el número que sea ya son dos, así que hay que buscar cuatro más.
>
> Manuel: …pues mira coge el uno y ahora multiplica el 11 por 13.
>
> José: porqué con esos números primos.

Manuel: para que sea grande, un número complicado, 51… no 51 no… pon ahí dos primos… 17 también y 31 es primo ¿no?… es que debería ser así por 31.

David: pero ¿31 es primo o no?.

Manuel: 1×11×13×17×31=75361


5. Escribe un número, diferente de 45, que tenga exactamente seis divisores. Explica tu respuesta.

1, 11, 13, 17, 31, 75361

Porque si multiplicamos 4 números primos 11x13x17x31 = 75361

y este solo es divisible entre estos, el 1 y el mismo.

Figura 3. *Respuesta de Manuel a la Cuestión 5*

CONCLUSIONES

Los futuros maestros mostraron una utilización limitada del teorema fundamental de la aritmética. La descomposición en factores primos de un número (primera parte del teorema) no presentó dificultad para los maestros en formación que participaron en este estudio. Sin embargo, algunos de ellos no consideraron los factores explícitos y no explícitos en esa descomposición. En particular, mostramos las dificultades que presentaron para determinar todos los factores-divisores de un número a partir de su descomposición canónica. Esta evidencia, junto con los conocimientos previos, nos lleva a conjeturar que utilizaron la descomposición en factores primos como un procedimiento independiente del teorema fundamental de la aritmética y que lo aplicaron de forma mecánica.

Respecto a la segunda parte del teorema, observamos algunas respuestas que apuntan a la «posibilidad» de existencia de otra descomposición en factores primos, lo cual refleja una limitación importante en la utilización del teorema fundamental de la aritmética.

A partir de los resultados, extraemos algunas implicaciones docentes que podrían contribuir al uso del teorema. En primer lugar, y dado que una de las estrategias en la Cuestión 5 fue seleccionar un número al azar y dividir, podríamos utilizar una idea de la demostración del teorema: a partir de la descomposición canónica del número, calcular el número de divisores-factores y, posteriormente, hacer el producto de las combinaciones posibles entre ellos. En segundo lugar, como algunos de los maestros en formación, no identificaron como factores de un número dado los no explícitos, proponemos plantear la descomposición en factores primos en diferente orden. En tercer lugar, dado que la unicidad del teorema fundamental de la aritmética es un aspecto que no es considerado más allá del enunciado del teorema, proponemos profundizar sobre la unicidad del teorema, incidiendo en que esta implica que todos los factores-divisores de ese número se generan a partir de esa descomposición necesariamente, y haciendo hincapié en que no es una cuestión de azar, como ocurrió con la estrategia seguida por un grupos de futuros maestros cuando respondieron la Cuestión 5 de este estudio.

Referencias

Brown, A., Thomas, K. y Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: Success and understanding. En S.R. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory: research in cognition and instruction* (pp. 41-82). Westport, CT: Ablex.

Castro, E. y Molina, M. (2011). Introducción a la divisibilidad. En I. Segovia y L. Rico (coords), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 123-146). Madrid, España: Pirámide.

Conference Board of the Mathematical Sciences. (2001). *The mathematical education of teachers*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Leinkin, R. (2006). Learning by teaching: the case of sieve of Eratosthenes and one elementary school teacher. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education: perspectives and Prospects* (pp. 115-140). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

López, A., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2013). Utilización de la noción «ser múltiplo» por maestros de educación primaria en formación. *Epsilon. Revista de Educación Matemática, 84*.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Real Decreto 2211/2007 de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación primaria (Vol. BOE Nº 173, pp. 31487-31566). Madrid, España: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Zazkis, R. (2000). Factors, divisors and multiples: Exploring the web of students' connections. En A. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. 4, pp. 210-238). Providence, RI: American Mathematical Society.

Zazkis, R. y Campbell, S. R. (1996). Prime decomposition: understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 207-218.

Zazkis, R. y Liljedah, P. (2004). Understanding primes: the role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(3), 164-186.