Ecuación Cuadrática: Una Ingeniería Didáctica para su Enseñanza

María Rey Genicio, Graciela Lazarte, Silvia Porcinito y Clarisa Hernández
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Jujuy
Argentina
tresm@imagine.com.ar
Pensamiento Algebraico – Nivel Medio

Resumen

Este trabajo surge de un Proyecto de Investigación que busca el desarrollo de estrategias innovadoras en la enseñanza de la matemática, el cual se apoya en una concepción de aprendizaje constructivo y significativo y adopta la «Ingeniería Didáctica» como metodología para la investigación. En ese marco se elaboró una ingeniería didáctica para una enseñanza –aprendizaje más eficiente de ecuaciones cuadráticas. Mediante las actividades planteadas el alumno llega a obtener la fórmula de la ecuación cuadrática, a determinar las propiedades de sus raíces, a factorearla y a reconstruirla a partir de sus raíces. En esta propuesta se plantea una vinculación permanente entre los conceptos de ecuación cuadrática y función cuadrática; asimismo se trabaja en distintos marcos: numérico, algebraico, gráfico, geométrico y funcional.

Consideraciones sobre la propuesta

En el marco del Proyecto de Investigación " Innovaciones Didácticas en la Enseñanza de la Matemática" se ha desarrollado una propuesta didáctica para abordar el tema: Ecuación cuadrática. Esta investigación se nutre teóricamente de los aportes de la psicología del aprendizaje y de la didáctica de la matemática. Sintetizamos a continuación los aportes más relevantes de cada una.

De la fuente psicológica se toma las teorías cognitivas que entienden que el aprendizaje efectivo requiere participación activa del estudiante en la construcción del conocimiento, ya que este proceso está mediado por procesos de pensamiento, de comprensión y de dotación de significado. Entonces la actividad de los alumnos es base fundamental para el aprendizaje mientras que la acción del docente es aportar las ayudas necesarias, estableciendo esquemas básicos sobre los cuales explorar, observar, y reconstruir conocimientos. En esos esquemas se articulan la información (aportada por el docente, los textos, los materiales y los alumnos) con las acciones cognitivas de los sujetos.

Se toma también el concepto de Interacción Socio–Cognitiva: la cognición humana óptima se lleva a cabo con la colaboración de otras personas y de objetos físicos y simbólicos que potencian las capacidades individuales. Así los procesos grupales de construcción de conocimientos se constituyen en medios altamente eficaces para el logro de un aprendizaje significativo, aunque en ellos se hace necesaria una intervención del docente muy cuidadosa, optimizando las actividades, facilitando los intercambios cognitivos, supervisando, recuperando oportunamente lo producido en cada grupo, y logrando la reorganización final de los conocimientos.

Por otra parte, de la fuente didáctica general se toma el concepto de estrategia didáctica de Bixio: conjunto de las acciones que realiza el docente con clara y conciente intencionalidad pedagógica, o sea, de lograr un aprendizaje en el alumno. Algunos de sus componentes son el estilo de enseñanza, la estructura comunicativa de la clase, el modo de presentar los contenidos, las consignas, los objetivos y su intencionalidad, la relación entre materiales y actividades, los criterios de evaluación, etc. Las estrategias deben apoyarse en los conocimientos previos de los alumnos (significatividad), orientar la construcción de conocimientos a partir de materiales adecuados y ser factibles de desarrollarse en el tiempo planificado, con la cantidad de alumnos con que se cuenta y con la carga horaria destinada.

En el campo de la Didáctica de la Matemática, la propuesta se apoya en la «ingeniería didáctica» (Douady – 1996): elaboración de un conjunto de secuencias de clases concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo para efectuar un proyecto de aprendizaje. En los análisis preliminares se tuvieron en cuenta las dificultades y los errores más frecuentes de estos aprendizajes, las prácticas habituales para el tratamiento de este tema y los diferentes enfoques que presentan los libros de texto sobre el mismo.

La concepción y el diseño de las actividades se encuadran dentro de «la teoría de las situaciones didácticas» de Guy Brousseau: proponer situaciones «adidácticas» en las que el docente no debe mostrar su intencionalidad ni intervenir indicando al alumno qué hacer; sino provocar que el alumno acepte la responsabilidad de la situación de aprendizaje. Así, la llamada «Situación fundamental», dada por las situaciones adidácticas, enfrenta a los alumnos a un conjunto de problemas que evolucionan de manera tal que el conocimiento que se quiere que aprendan es el único medio eficaz para resolverlos. Intervienen las «variables didácticas» para que el conocimiento evolucione en niveles crecientes de complejidad, y las «recontextualizaciones» de los conceptos tratados en los marcos geométrico y algebraico le otorgan significatividad a la propuesta.

En la resolución de los problemas, se espera que aparezcan distintas estrategias. También se sugieren puestas en común en las que se validen los resultados, se detecten los errores, se analicen las distintas propuestas y representaciones que se hayan utilizado, se elijan las más eficaces, se debatan las argumentaciones, se identifiquen los conocimientos puestos en juego, etc. a fin de que esos conocimientos evolucionen en la totalidad del grupo de clase y converjan hacia el que se quiere construir.

Los problemas diseñados responden a las «condiciones del buen problema» enunciadas por Douady; ya que: los enunciados tienen sentido en relación con los conocimientos previos; todos los alumnos están en condiciones de dar alguna respuesta, al menos para el problema inicial; admiten distintas estrategias de resolución y se pueden formular en distintos marcos (geométrico y algebraico). Y, principalmente, el conocimiento buscado es un conocimiento adaptativo en tanto es el medio científico de responder eficazmente a los problemas. Además se propone que en la puesta en marcha se cumplan las fases enunciadas por Douady en las que, dado el problema inicial: 1º– Se movilizan los objetos matemáticos conocidos para resolver el problema (Fase: Antigua). 2º– Se ponen en marcha instrumentos nuevos. Aparece el "nuevo implícito" (Fase: Búsqueda). 3º– Se hacen explícitos los conocimientos construidos en la fase anterior (Fase: Explicitación). 4º– El docente descontextualiza el conocimiento dándole la categoría de «objeto matemático» (Fase: Institucionalización). 5º– Se da a los alumnos diversos problemas destinados a provocar el funcionamiento como instrumentos explícitos de lo que ha sido institucionalizado (Fase: Familiarización – reinversión). 6º– El nuevo objeto es susceptible de convertirse en antiguo para un nuevo ciclo de la dialéctica instrumento-objeto (Fase:

Complejidad de la tarea o nuevo problema).

Propuesta didáctica

La intencionalidad de este trabajo es que el alumno construya el concepto de ecuación cuadrática a través de una serie de actividades que plantean una mayor implicación y razonamiento que en las propuestas tradicionales de enseñanza.

El abordaje de la resolución de ecuaciones cuadráticas se realiza sobre la construcción previa de los conceptos de función cuadrática: forma polinómica y forma canónica, representación gráfica, desplazamientos y estiramientos de la gráfica, coordenadas del vértice, existencia de ceros a partir de la gráfica. Con la primer actividad culmina el estudio de la función cuadrática (Ejercicios del 1 al 9) y se inicia el de ecuación cuadrática (Ejercicios del 10 al 11).

La propuesta comienza con la siguiente actividad:

1) *En cada caso encuentra la fórmula polinómica correspondiente a la fórmula canónica dada:*

a) $y = (x + 3)^2 - 9$ b) $y = (x - \frac{2}{3})^2 - \frac{4}{9}$ c) $y = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4}$

d) $y = 2(x + 1)^2 + 3$ e) $y = -5(x - 3)^2 - 1$ f) $y = -\frac{9}{2}(x - \frac{2}{3})^2 - \frac{1}{3}$

2) *¿Podrías, sin representar gráficamente, decir cuáles de los gráficos, que corresponden a las funciones cuadráticas dadas en el ejercicio anterior, pasan por el origen?*

3) *En las fórmulas de las funciones cuyos gráficos pasan por el origen:*

a) Indica qué característica tiene la fórmula cuadrática polinómica

b) Indica qué característica tiene la fórmula cuadrática canónica.

c) Establece una vinculación entre las fórmulas cuadráticas: canónica y polinómica

4) *En cada caso, encuentra la fórmula canónica correspondiente a la fórmula polinómica dada y escribe las coordenadas del vértice de la parábola.*

a) $y = x^2 + 4x$ b) $y = x^2 - 6x$ c) $y = x^2 - 9x$ d) $y = x^2 + \frac{6}{5}x$ e) $y = x^2 - \frac{7}{3}x$

5) *a) Expresa* $y = x^2 + bx$ *en la forma canónica y escribe las coordenadas del vértice*

b) De qué otra forma podrías haber encontrado la ordenada del vértice?

6) *Escribe cada una de las siguientes funciones de segundo grado en la forma canónica e indica las coordenadas del vértice.*

a) $y = x^2 + 8x - 1$ b) $y = x^2 - 3x + \frac{1}{2}$ c) $y = x^2 + \frac{7}{5}x + \frac{11}{20}$

7) *Expresa* $y = x^2 + bx + c$ *en la forma canónica y escribe las coordenadas del vértice.*

8) *Escribe cada una de las siguientes funciones de segundo grado en la forma canónica e indica las coordenadas del vértice.*

a) $y = 5x^2 - 20x + 25$ b) $y = 3x^2 + 6x - 3$ c) $y = 2x^2 - 5x - 1$

d) $y = 4x^2 - 3x + 5$ e) $y = 5x^2 + 7x + 2$

9) *a) Expresa* $y = ax^2 + bx + c$ *en forma canónica y escribe las coordenadas del vértice*

b) Indica la concavidad de la curva

10) *Dada la siguiente función de segundo grado* $y = 2x^2 - 10x + 8$

a) Exprésala en forma canónica. *b)Escribe las coordenadas del vértice.*

c) Encuentra los ceros de la función *d) Grafícala en coordenadas cartesianas*

11) *Recordando el problema del área del cuadrado:* *Area* (x) = $2x^2 - 20x + 100$ *¿Cuánto tiene que valer* x *para que el área sea* 58?
12) *Encuentra una fórmula que te permita resolver la ecuación*: $ax^2 + bx + c = 0$

El objetivo del primer ejercicio es que el alumno adquiera destreza en el marco algebraico para pasar, la expresión de una función cuadrática, de la forma canónica a la polinómica. También permite repasar el desarrollo del cuadrado de un binomio y, junto con los dos ejercicios siguientes, sienta las bases para transformar la fórmula de una función cuadrática de la forma polinómica reducida a la forma canónica. En el ejercicio 4, se trabaja con el polinomio con coeficiente principal 1 y sin término independiente. En el ejercicio 6, se aumenta la dificultad con la incorporación del término independiente. En el ejercicio 8 se incluyen polinomios de coeficiente principal distinto de 1. En los dos ejercicios que siguen el estudiante debe resolver una ecuación cuadrática particular, en uno se pide que determinen los ceros de la función[1] y en el otro se pide obtener x, para un valor de y dado[2]. En el último ejercicio se realiza la generalización, obteniendo así la fórmula general que permite resolver una ecuación cuadrática.

El docente, en distintos momentos de esta actividad, deberá realizar las puestas en común que considere necesarias de forma tal que, al finalizar la misma, quede institucionalizado el concepto de ecuación cuadrática y raíces de una ecuación cuadrática.

La organización de esta secuencia, elaborada según un grado de complejidad creciente, permite a los estudiantes pasar de una dificultad a otra usando como base lo construido en la actividad anterior. Por otra parte el estudiante aprende a completar cuadrados de una manera fácil y sencilla y obtiene la expresión general de las coordenadas del vértice de una parábola hasta lograr construir la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas; punto en el que sobresale la potencialidad de esta propuesta ya que el alumno, al superar los desafíos que se le presentan llega a ser el constructor de esta fórmula.

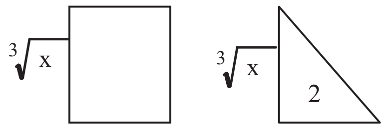
En la segunda actividad, el estudiante debe aplicar la fórmula recién obtenida, para resolver ecuaciones cuadráticas e indicar si las soluciones halladas son reales (iguales o distintas) o complejas. Luego, las ecuaciones que son incompletas, las deberá resolver sin utilizar la fórmula cuadrática. Aquí el alumno puede llegar a cometer distintos errores, y como consecuencia obtener distintos resultados que los hallados aplicando la fórmula. Esto lo llevará a revisar lo realizado y servirá al docente para reflexionar sobre los errores cometidos. Por último deberá indicar de qué depende que una ecuación cuadrática tenga distintos tipos de raíces. Al finalizar la actividad se institucionalizará las distintas formas de resolver una ecuación cuadrática y el nombre de "discriminante" para la expresión $b^2 - 4ac$; es conveniente que el alumno pueda darse cuenta del porqué de esta denominación.

En la siguiente actividad deben proponer una ecuación cuadrática, de forma que las raíces cumplan determinadas condiciones, como por ejemplo que tenga: raíces reales iguales, raíces complejas, raíces reales distintas o raíces reales distintas y una de ellas sea 5. Este problema, abierto a múltiples respuestas, tiene como propósito que el alumno se desprenda de la concep-

[1]En el trabajo previo sobre función cuadrática los alumnos determinaban la existencia de los ceros de la función a partir del gráfico.
[2] La secuencia previa sobre función cuadrática, se inicia con una situación problemática que da origen a la fórmula cuadrática planteada en el ejercicio N° 11.

ción de que un problema matemático tiene una respuesta única Además se persigue que el estudiante pierda el miedo a plantear ejercicios.

Para vincular ecuación cuadrática con función cuadrática (lo algebraico con lo gráfico), se da el gráfico de distintas funciones y deben indicar el tipo de raíces y, de ser posible, el valor de las mismas. Recíprocamente, a partir de una ecuación cuadrática deben obtener los puntos donde la gráfica de la función cuadrática correspondiente, corta al eje x.



También se plantea un ejercicio para resolver una ecuación cuadrática mediante el método gráfico. La intención del mismo es prepararlo para buscar las raíces de otras ecuaciones más complejas y / o difíciles de resolver en forma analítica.

Se ejercita la resolución de ecuaciones reducibles a ecuaciones cuadráticas (fraccionarias e irracionales). Aquí el alumno reforzará el manejo algebraico de expresiones.

Para resolver ecuaciones reducibles a cuadráticas se plantea la siguiente actividad:

Juan quería poner dos pósteres en la pared de su cuarto. Uno de ellos que tuviera la forma de un cuadrado y el otro de un triángulo rectángulo. Para que los pósteres no fueran demasiado grandes, se impuso la condición de que la diferencia de sus áreas fuese 2 y que tuvieran las medidas indicadas en el gráfico. Para determinar cuanto debía medir de alto, Juan llegó a plantear la ecuación:
Área (cuadrado) − Área (triángulo) = 2 , pero luego no pudo encontrar el valor de x.
Su amigo, que era un experto en resolver ecuaciones cuadráticas, inmediatamente determinó que el valor de x podía ser 8 ó −1, e indicó a Juan que los póster deberían tener una altura de 2. Para obtener la solución, el amigo ideó una forma muy ingeniosa de transformar la ecuación en una ecuación de segundo grado. Te animas a determinar cómo lo hizo y a desarrollar los pasos para encontrar la solución?

En la siguiente actividad, se incluye gran variedad de aplicaciones donde primero se debe modelizar el problema y luego seleccionar el método que mejor se adapte el tipo de ecuación cuadrática a resolver (completa o incompleta) . Por último se deberá decidir si las soluciones de la ecuación pueden ser la respuesta al problema. En algunos de estas aplicaciones se debe obtener la fórmula de la función, a partir de datos numéricos obtenidos en forma experimental.

Para que el alumno pueda llegar a obtener las propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática se plantea la siguiente actividad:

***1) a)** Completa el siguiente cuadro (las ecuaciones ya se resolvieron en una actividad anterior)*

Ecuación	Escribe la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
a) $2x^2 + 4x - 6 = 0$			
b) $3x^2 = 2 - 5x$			
c) $9x^2 + 12x = -4$			
d) $-6x^2 + 2x - 4 = 0$			
e) $3x^2 + 6x = 0$			
f) $49x^2 + 9 = 42x$			
g) $x^2 - 7 = 0$			
h) $0,5 - 6x = 2x^2/3$			
i) $x(x + 1) = 3x^2$			
j) $3x^2 + 6 = 0$			

b) Encuentra alguna relación entre la suma de las raíces y los coeficientes de la ecuación cuadrática.

c) Encuentra alguna relación entre el producto de las raíces y los coeficientes de la ecuación cuadrática.

d) Teniendo en cuenta que $x_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$ y $x_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$, *realiza el producto y la suma de las raíces y observa si coincide el resultado con la relación encontrada en a) y b) respectivamente.*

***2)** A partir de la relación encontrada en el Ej.1d), expresa la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ a) En función de "a" y de la suma y el producto de sus raíces* x_1 *y* x_2

b) En función de la suma y el producto de sus raíces x_1 *y* x_2

Con el primer ejercicio, se espera que el alumno sea capaz de encontrar, a partir de ejemplos numéricos, las propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática que luego, al realizar la actividad propuesta en el inciso d), las estará demostrando.

El ejercicio Nº 2 prepara al alumno para reconstruir una ecuación cuadrática, a partir de la suma y producto de sus raíces.

A continuación se realiza una actividad donde se aplican las propiedades de las raíces. Primero se reconstruye la ecuación a partir de las propiedades y luego se realiza el proceso inverso: dada la ecuación, obtener la suma y producto de las raíces

Para escribir en forma factoreada la fórmula de una función y una ecuación cuadrática se propone la siguiente actividad:

***1)** a) Resuelve la ecuación cuadrática* $2x^2 + 4x - 30 = 0$

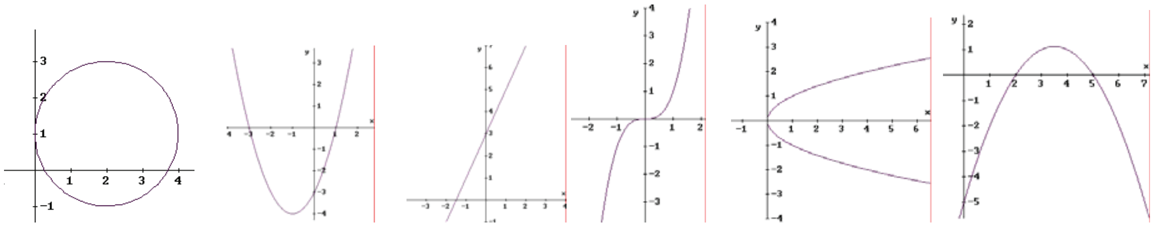
b) Factorea la expresión $2x^2 + 4x - 30$ *(ten en cuenta que* $4x = -6x + 10x$).

c) Puedes encontrar alguna relación entre la expresión factoreada y las raíces de la ecuación cuadrática

***2)** Demuestra que la relación encontrada en el ejercicio anterior es válida para cualquier expresión cuadrática de la forma:* $ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$ *(donde* x_1 *y* x_2 *son raíces de la ecuación cuadrática correspondiente a la expresión dada).*

Finalmente, la última actividad permite realizar una integración entre lo desarrollado para función cuadrática y para ecuación cuadrática.

1) *Dados los siguientes gráficos, identifica el que corresponda a una función cuadrática y luego en base a dicho gráfico responde los siguientes incisos:*
i) Determina el signo del coeficiente de x^2
ii) Indica las raíces de la ecuación cuadrática correspondiente a dicha función cuadrática.
iii) Encuentra las coordenadas del vértice de la parábola.
iv) Halla, de dos formas distintas, la fórmula que define a dicha función cuadrática



Referencias Bibliográficas

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gomez, P. ; (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. México. G.E.I.

Bixio, C. (1998). *Enseñar y aprender*. Bs. As. Argentina. Homo Sapiens.

Brousseau, G. (1994). *Los diferentes roles del maestro*. En Parra, C. y Saiz, I. (comps.), Didáctica de Matemática: *Aportes y reflexiones*. (pp 65–94). Bs. As. Argentina. Paidos

Duhalde, M., Gonzalez, M. (1997). *Encuentros cercanos con la Matemática*. Bs. As. Argentina. Aique.

Chevallard, I. (2000). *La transposición didáctica*. Bs. As. Argentina. Aique.