Fractal: Ideas y Percepciones de Estudiantes entre 15 y 17 Años

Sabrina Harbin y Miriam Mireles
Universidad Simón Bolívar, Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Venezuela
sgarbin@usb.ve, mmireles@ipmar.upel.edu.ve
Pensamiento Matemático Avanzado — Nivel Medio

Resumen

En este trabajo se presenta el estado actual de una investigación cualitativa que, en su primera fase, intenta aproximarse a cómo el estudiante pre-universitario concibe espontáneamente la idea de fractal. Participaron 70 estudiantes con edades comprendidas entre 15 y 17 años. Se encuentra que la mayoría de estos alumnos perciben al fractal en sus características de manera parcial, y principalmente lo definen como un proceso iterativo. Los resultados de esta primera parte y el reconocimiento de que los fractales tienen un valor matemático elemental, inducen a pensar en el valor didáctico que podrían tener los fractales y su geometría, para desarrollar destrezas matemáticas y favorecer formas de pensamiento matemático más avanzado, en la transición del PME al PMA.

Planteamiento del Problema, Antecedentes y Fundamentación Teórica

En los últimos años los objetos fractales (Mandelbrot (1984)) y su geometría han despertado gran interés no sólo en los matemáticos, sino también en las distintas disciplinas, en el público en general, en la educación matemática y en muchos profesores que ven en los fractales una posibilidad para ofrecer una matemática distinta, más moderna y relacionada con la naturaleza, desde una geometría que permite aproximaciones más cercanas a las que puede dar la geometría euclídea. Se han elaborado propuestas de innovación y experiencias para introducir al estudiante de educación secundaria en el conocimiento del fractal y su geometría (Fernández y Pacheco, 1991; Guzmán,1994; Martínez, 1994; García-Ruiz, 1994; Plá, 1994; Zapata, 1996; Komerek, Duit y Schnegelberger, 1998; Naylor, 1999; Frame, M.L. y Mandelbrot, B., 2002). Sin embargo hemos constatado que aún son escasas las investigaciones rigurosas de tipo cognitivo (la más cercana a los intereses de nuestro estudio es la de Komorek, Duit, Bücker y Naujack (2001) que concluye que las ideas de fractal, específicamente la autosimilitud y estructura "dentrite", son asequibles para la edad de 15 y 16 años), que exploren las percepciones e ideas intuitivas de los estudiantes al conocer estos objetos, y que justifiquen, el que, el cómo y el para qué de una posible integración de los fractales en la currìcula o como herramienta o estrategia para otros tipos de aprendizajes.

Nuestro interés es realizar una investigación que en su primera fase explore e intente aproximarse a las ideas y percepciones de los fractales en estudiantes preuniversitarios; descubrir qué características fractales son perceptibles en los estudiantes, cuáles resultan más o menos intuitivas, el cómo definirían un fractal tan sólo teniendo una experiencia de visualización dada por la construcción de éstos. De la teoría cognitiva desarrollada por Tall y Dreyfus en relación al desarrollo y crecimiento del Pensamiento Matemático Avanzado y en la de transición del PME al PMA, los conceptos que tratamos son de manera particular, el *esquema conceptual* (Tall y Vinner, 1981) y *esquema informal* (Tall, 2001). Los estudiantes se enfrentan en el cuestionario con los fractales sin enseñanza formal previa sobre éstos. Ante el ejercicio de visualización que se propone y los pasos de construcción de los fractales, las descripciones y observaciones de los alumnos dejan en evidencia sus esquemas informales asociados a estos objetos matemáticos, que son fruto principalmente de la intuición, y de la abstracción de las relaciones e interconexiones que establecen con sus conocimientos previos, especialmente los geométricos (euclídeos).

Metodología, descripción de los participantes e instrumentos de recogida de datos.

La investigación se enmarca en un estudio de tipo cualitativo. El foco de investigación tiene un carácter exploratorio, descriptivo e interpretativo. En la metodología de análisis se opta por utilizar las redes sistémicas (Bliss, Monk y Ogborn, 1983) como sistema de representación de los datos cualitativos obtenidos a partir de las respuestas dadas por los alumnos en el cuestionario. A partir de las redes sistémicas se establecen categorías y subcategorías asociadas a algunas de las características de la geometría fractal y etiquetadas como: autosemejanza, recursividad, complejidad, perímetro, área, longitud y números de puntos de Cantor, y alusiones a si el conjunto de Cantor desaparece o se hace polvo. Esto además permite diseñar unas tablas resumen. La experiencia se realiza con 70 estudiantes de primero y segundo año del ciclo diversificado (final de secundaria) venezolano, con edades comprendidas entre 15 y 17 años. En el momento de la aplicación de los cuestionarios no tenían conocimientos formales de cálculo (infinitesimal, diferencial, integral). Se aplican dos cuestionarios (C_1 y C_2); en este artículo se describe sólo los resultados de la primera parte del primer cuestionario. Las preguntas del C_1 se plantean bajo la hipótesis de que los esquemas conceptuales de los objetos geométricos se construyen principalmente a partir de experiencias de visualización, y sobre la opinión de que la experiencia es un factor fundamental en la formación de la intuición. El cuestionario tiene dos partes y aborda los fractales: Cantor, Kock, Árbol y Kock Aleatorio. Se muestra la construcción del fractal en sus primeros pasos: "Trata de imaginar cada paso que sigue de la construcción, el 4, 5, 6, 7 ... hasta el infinito. A)Describe lo que ves y lo que ocurre en la medida que se van haciendo más pasos. B) En el infinito resulta un objeto geométrico llamado: "se coloca el nombre del fractal respectivo". Imagina que dispones de un instrumento potente con el que puedes aumentar parte del objeto cuantas veces quieras. Ahora enfoca una parte del "se coloca el nombre del fractal respectivo". Describe lo que ves y lo que ocurre a medida que va aumentando la potencia del instrumento. ¿Puedes describir lo que ves cuando el instrumento tiene aumento infinito?. Dependiendo del fractal estas preguntas van acompañadas por otras: sobre la longitud y el número de puntos de Cantor, área y perímetro de Kock, y sobre el perímetro de Kock Aleatorio

Resultados

Las respuestas de los alumnos que reflejan las características fractales, muestran que la mayoría de los estudiantes percibe al fractal, en sus características, de manera parcial.
a) Recursión: En la construcción geométrica de los fractales con que trabajamos, en su proceso recursivo conformado por la base, la regla y el proceso iterativo, y específicamente relacionado con este último, encontramos dos tipos de iteración, la divergente y convergente, y diferente tipo de contenido, cardinalidad y espacio (en el sentido de Nuñez (1994)). La cardinalidad la da el número creciente de divisiones dadas por la regla, y el espacio, por la longitud de los segmentos que se van construyendo y que van configurando la representación geométrica de

cada fractal. La coordinación de ambos procesos, es el que permite cognitivamente "percibir o entender" al fractal en sus características específicas, por ejemplo en el conjunto de Cantor si bien el número de divisiones aumentan y el número de segmentos que se construyen crecen, los segmentos a la vez decrecen y entonces, ¿se hace polvo o desaparece?. En la siguiente tabla se puede observar, como resumen, el porcentaje de alumnos que se encuentran en cada categoría principal que reflejan las redes sistémicas construidas.

	Ocurren los mismos pasos (%)	**La Iteración es finita (%)**	**Proceso de divergencia (%)**	**Proceso de convergencia (%)**	**Explicita**	
					La regla (%)	**Otra regla (%)**
Cantor	0	7,14	15,71	25,71	1,4	2,8
Kock	1,4	2,85	13,85	4,28	2,85	0
Arbol	1,4	8,57	45,7	22,85	8,57	0
Kock Aleatorio	1,4	2,85	24,28	8,57	7,14	0
	2,8	**12,85**	**65,71**	**48,57**	**17,12**	**2,8**

Es bajo el porcentaje de estudiantes que hacen alusión explícita o implícita sobre algún aspecto del proceso de recursión en la construcción de los fractales, con relación a la base y al proceso iterativo en sus dos aspectos de convergencia y divergencia. Si bien el proceso es infinito explícitamente hubo un 12,85 % donde la iteración se percibió como finita en por lo menos un fractal. El motivo principal ha sido el que permanece en estos estudiantes el modelo tácito de punto, como una imagen de pequeños puntos que tienen espacio y dimensión. La explicitación de la regla en la recursión es sumamente baja, sólo un 17,12% de los estudiantes hacen la referencia a la regla en por lo menos un fractal. Por el tipo de respuestas dadas por los estudiantes, el porcentaje alto de respuestas que explicitan o aluden el proceso iterativo, así como teniendo en cuenta el segundo cuestionario en que se pedía una definición de fractal, hace pensar que en su mayoría los estudiantes perciben en la construcción geométrica del fractal un proceso iterativo más que recursivo, el retorno a la base queda poco consciente. En cuanto al proceso iterativo, es mayor el porcentaje de explicitación del proceso de divergencia que el de la convergencia. Queda en evidencia como obstáculo cognitivo la coordinación del proceso de convergencia y divergencia. El hecho específico del no reconocimiento del proceso de divergencia, es causal, de situaciones como el percibir que el área de Kock aumenta indefinidamente o que los segmentos que se construyen en el Árbol llega un momento en que "chocan" y se "unen". Para el 8,57% de alumnos, la característica del Fractal Árbol de que su trazado es continuo y que no hay intersección entre los segmentos que forman las ramas de los árboles, no se cumple, estos estudiantes indican que en algún momento los segmentos chocan. También queda en evidencia la influencia de las representaciones de los objetos fractales sobre cada proceso. Si observamos la tabla, en Cantor, el porcentaje de alumnos que hacen alusión al proceso de divergencia es superior que el resto de fractales, la representación geométrica del conjunto de Cantor alude al proceso de divergencia, sin embargo las representaciones de los otros fractales aluden visualmente a la divergencia, se expanden y se hacen "más grandes". Sólo tres alumnos explicitan el proceso completo de recursión haciendo referencia a la regla, y proceso de iteración (convergente y divergente), un alumno en Cantor (considera a la iteración como finita), un alumno en Árbol y otro en Kock Aleatorio.

b) Autosemejanza: Se observa en la siguiente tabla el porcentaje de alumnos que se encuentran en cada categoría principal que reflejan las redes sistémicas construidas.

	Por la recurrencia (%)	**Visualiza la figura inicial (%)**
Cantor	4,28	8,57
Kock	5,71	10
Arbol	8,57	11,42
Kock Aleatorio	1,42	14,28
	18,57	**34,28**

Es bajo el porcentaje de alumnos que explicitan o hacen alusión a la característica de autosemejanza en los fractales. Las respuestas de los alumnos fueron caracterizados bajo dos aspectos. La evidencia de la autosemejanza dada por el proceso de recurrencia (que en el caso de nuestros alumnos sería del proceso iterativo), el 18,57% está en por lo menos en uno de los fractales; y la evidencia de la autosemejanza dada por el aumento del instrumento, se observa las figura u objeto inicial o partes de esta figura inicial como ángulos, lados, triángulos; el 34,28% la expresa en por lo menos un fractal. No hay ningún alumno que en sus respuestas explicite o alude a la autosemejanza en todos los fractales.

d) *Complejidad/ escabrosidad*: La escabrosidad o complejidad, como característica fractal, es una de las menos esperadas en las respuestas de los alumnos, por ser los objetos geométricos escogidos considerados como "simples" en cuanto a su construcción y formulación. Sin embargo, a través de estos procesos simples está la posibilidad de dominar y construir estructuras complejas, esta complejidad proviene precisamente de la repetición infinita. Como en los casos anteriores se puede observar los porcentajes en la tabla:

	Figura compleja (%)	**Figura irregular (%)**	**Objeto intrincado (%)**	**Forma abstracta (%)**	**Objeto difícil (%)**
Cantor	0	0	0	0	0
Kock	8,57	4,28	1,42	0	0
Arbol	1,42	0	1,42	1,42	0
Kock Aleatorio	5,71	4,28	1,42	0	1,42
	14,28	**2,85**	**1,42**	**1,42**	**1,42**

Las respuestas de los alumnos que afirman que a medida que se van dando los pasos va resultando una figura compleja, responde a la idea del proceso, que se parte de figuras simples y que a través de la repetición infinita de pasos va resultando una estructura más compleja.

e) *Medida*: En el cuestionario además de pedir una descripción sobre el proceso geométrico de construcción de cada fractal, también se preguntó sobre el área y perímetro de Kock, sobre el perímetro de Kock aleatorio y sobre la longitud del conjunto de Cantor y el número de puntos del conjunto de Cantor. Por otra parte hubo alusiones y afirmaciones en las respuestas de los alumnos sobre si el conjunto de Cantor desaparece o se hace polvo. En este apartado no colocamos todas las tablas por falta de espacio. Sobre el área y los perímetros pedidos (y longitud de Cantor), ningún alumno trató de hallarlos. Todos contestaron a esta pregunta desde lo que visualizaban y las afirmaciones sobre el área y los perímetros son muy similares:

aumenta, es infinita, es grande, incontable, difícil de calcular, cambia, se reduce. El porcentaje mayor de alumnos se encuentra en la categoría que el área y el perímetro aumenta. Este aumento es dado por el proceso de divergencia, se agregan triángulos o segmentos, en este proceso, no hay conciencia o atención al proceso de convergencia. Relacionada con esta categoría están las de que el área es infinita, tiene un valor grande, cambia o es incalculable. Sigue estando relacionadas las afirmaciones asociadas a estas categorías a la idea de divergencia. Las apreciaciones sobre que al área y el perímetro aumentan nos hacen pensar que los estudiantes dieron sus respuestas desde la concepción finita y positiva de la suma, en la cual, a medida que aumenta el número de sumandos, aumenta su valor en sentido potencial. En el sentido antes expresado del proceso de divergencia y convergencia, no se tiene en cuenta el tipo de sumandos, es decir, se considera la cardinalidad de la suma pero no la cantidad numérica que se va sumando.

Con relación al número de puntos del conjunto de Cantor, un alto porcentaje (44,28%) afirma que hay infinitos puntos. El 7,14% observa un número finitos de puntos, uno de ellos afirma que no tiene puntos, es decir para este alumno el conjunto de Cantor desaparece. Otro alumno afirma que "*no hay cantidad de puntos definida*", esta respuesta podría aludir a, que el Conjunto de Cantor desaparece o que por el proceso infinito no se puedan determinar. Por otra parte, un grupo de alumnos 24,27%, comparan la cantidad con el segmento inicial, un 11,42% afirma que hay una menor cantidad de punto que el segmento inicial, un 10% que hay una mayor cantidad que en el segmento inicial y un 2,85% que hay igual cantidad. Hubo también alusiones a que el Conjunto de Cantor se hace polvo o desaparece: "*desaparece*"(15,71%), "se hace menos visible"(1,42%), "*llega un momento que se queda en blanco*"(1,42%), "*minúsculo, miscroscópico, incluso más pequeño*"(1,42%). Si bien es cierto que la influencia de la representación geométrica de este conjunto influye en la percepción de que el segmento desaparezca o que permanezcan minúsculos puntos, como ya se ha comentado en otras características fractales, estas respuestas están estrechamente relacionadas con el modelo tácito de punto que prevalece en la mente, que tiene dimensión y espacio.

Conclusiones

A partir de las redes sistémicas se establecen categorías y subcategorías asociadas a algunas de las características de la geometría fractal y etiquetadas como: autosemejanza, recursividad, complejidad, perímetro, área, longitud y números de puntos del conjunto de Cantor, alusiones a que el Conjunto de Cantor se hace polvo o desaparece. La mayoría de los alumnos percibe al fractal en sus características de manera parcial, y principalmente lo describen como un proceso iterativo más que recursivo, el retorno a la base queda poco consciente. En cuanto al proceso iterativo, en la construcción geométrica de los fractales, es mayor el porcentaje de explicitación del proceso de divergencia que el de convergencia (en el sentido cognitivo de Nuñez (1994)); la coordinación del proceso de convergencia y divergencia resulta un obstáculo cognitivo. El no reconocer el proceso de divergencia en algunos alumnos no permitió percibir, la característica del fractal Árbol de que su trazado es continuo, y que no hay posibilidad de que los segmentos que conforman las ramas de los árboles puedan "chocar" o "unirse". La autosemejanza como característica ha sido poco explicitada, no se sabe si es por lo "evidente" de esta característica o si hay dificultad o poco entrenamiento matemático en reconocer figuras semejantes. La autosemejanza se caracteriza en estos alumnos por el proceso de recurrencia, y por el aumento del instrumento. La complejidad o escabrosidad, en las respuestas de los alumnos, responde a la idea del proceso, que se parte de figuras simples y que a través de la repetición infinita de pasos va resultando una estructura compleja. Permanecen en los estudiantes el modelo tácito de punto, con dimensión y espacio, lo que da como consecuencia respuestas finitas, o la percepción de que el conjunto de Cantor desaparece, o se hace polvo, así mismo esto último es percibido por la influencia de la representación del conjunto de Cantor. Con relación a los aspectos de medida, prevalecen en muchos estudiantes una concepción finita y positiva de la suma, a medida que aumenta el número de sumandos, aumenta su valor en sentido potencial. Consideran la cardinalidad de la suma pero no la cantidad numérica que se va sumando. Por último acotar que los porcentajes de respuestas que aludían a las características de los fractales fueron bastante bajas, las respuestas de los estudiantes fueron directas y con argumentación limitada, y muestran escasas destrezas matemáticas. Ningún estudiante trató de poner en práctica algún procedimiento de resolución para tratar de responder las cuestiones que se plantearon, por ejemplo tratar de establecer una suma para calcular el área o perímetro del fractal. Las respuestas fueron dadas con poco lenguaje matemático y se usó el lenguaje común, la habilidad de explicar y justificar los procesos y resultados, apoyado en la capacidad de establecer relaciones entre las naciones y procesos matemáticos, se ha evidenciado poco. Son competencias importante para acercarse a la comprensión de la noción de objeto fractal. Todos estos resultados derivados en esta primera fase, y el reconocimiento de que los fractales tienen un valor matemático elemental, confirman el seguir investigando, en una segunda fase, sobre el valor didáctico que podrían tener los fractales y su geometría para desarrollar destrezas matemáticas y favorecer formas de pensamiento matemático más avanzado, en la transición del PME al PMA.

Referencias Bibliográficas

Bliss, J., Monk, M. y Ogborn, J. (1983). *Qualitative data analysis for educational research.* London: Croom Helm.

Fernández, F. y Pacheco, J. (1991). Valor matemático elemental de los fractales. *Suma* 9, 4-10.

García-Ruiz, J. y Otálora, F. (1994). El uso de la geometría fractal en las Ciencias Naturales. *Epsilon* 28, Vol. 10 (1), 109-125.

Guzmán, M. de. (1994). Introducción a los Procesos geométricos infinitos y a las estructuras fractales. *Epsilon* 28, Vol. 10 (1), 17-26.

Komerek, M., Duit, R y Schnegelberger,M. (Eds.) (1998). *Fraktale im Unterricht. Zur didaktischen Bedeutung des Fraktalbegriffs.* German: Inst. Fuer Paedagogik der Naturwissenschaften.

Komorek, M., Duit, R. Bücker, N. y Naujack, B. (2001). Learning Process studies in the field of fractals. Obtenido en: http://www.ipn.uni-kiel.de/projekte/esera/book/b185-kom.pdf

Frame, M.L.y Mandelbrot, B. (eds.) (2002). *Fractals, Graphics, and Mathematics Education.* USA: The Mathematical Association of America.

Mandelbrot, B. (1984). Los objetos fractales. Barcelona, España: *Metatemas 13.*

Martínez, J. (1994). Los conjuntos de Julia y la Familia de Transformaciones no lineales. *Epsilon* 28, Vol.10 (1), 81-97.

Núñez, E. (1994). Subdivision and small infinities Zeno, paradoxes and cognition. *Actas del PME 18* (Volumen 3, pp. 368-375). Lisboa, Portugal.

Naylor, M. (1999). Exploring Fractals in the Classroom. *The Matematics Teacher 92* (4), 360-66.

Plá, J. (1994). Los fractales. *Epsilon 28,* Vol. 10 (1), 27-53.

Tall, D. Y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics 12* (2), 151-169.

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics 48* (2-3), 199-238.

Zapata, R. (1996). Integración de la geometría fractal en las matemáticas, y en la informática, de Secundaria. Obtenido en: http://math.rice.edu/~lanius/fractals/WHY