

Concepciones que los Alumnos de Nivel Medio Superior Tienen sobre los Ángulos Negativos y Mayores de 360°

Rosario Lluck, Graciela Valdés, Santiago R. Velázquez y Gustavo Martínez

Universidad Autónoma de Guerrero
México

dianalluck@hotmail.com, vida_abundante_acapulco@yahoo.com
Pensamiento Geométrico – Nivel Medio

Resumen

En el aprendizaje de las matemáticas hay algunos temas como los ángulos negativos y los mayores de 360° que se presentan aislados de cualquier contexto práctico, social y de aplicación. Por este motivo nos interesa conocer las concepciones que tienen los alumnos al respecto, saber si pueden establecer relaciones entre las diferentes representaciones de estos ángulos. Pretendemos hacer una caracterización de los sentidos y significados que los alumnos del nivel medio superior atribuyen a los ángulos negativos y mayores de 360° . Para ello, efectuamos un análisis bibliográfico atendiendo a los aspectos conceptuales, didáctico-cognitivos y fenomenológicos. Además se hace una exploración con los estudiantes para conocer dichas concepciones.

Introducción

Durante la enseñanza de los ángulos negativos y mayores de 360° , así como de las funciones trigonométricas donde están inmersos, se inicia el tema tanto en las aulas como en los libros de texto de una manera repentina, sin justificar en modo alguno su existencia y su aplicación, lo único que se hace es “enseñar” sobre su manejo. Al revisar los textos nos podemos percatar que no se toca para nada el aspecto fenomenológico de los ángulos, siendo que su aplicación está presente en un sin número de fenómenos naturales y en aplicaciones de diferentes ramas de la ciencia y la tecnología. Podemos aseverar que el concepto de ángulo surge de la naturaleza misma ya que existen un sin número de fenómenos naturales, que se pueden explicar introduciéndolo, como por ejemplo los fenómenos de reflexión, refracción y difracción de la luz.

Los cambios en la incidencia de los rayos solares de acuerdo a las estaciones del año, la forma en que algunos animales se orientan, ya sea por la inclinación de los rayos solares o por el ángulo de reflexión de los sonidos. Los trabajos de Karl Von Frisch quien ganó el premio Nobel de Medicina y Fisiología en 1973, sobre la manera en que las abejas después de hacer un vuelo de exploración, transmiten la información a sus compañeras sobre dónde están las flores en el panal. Lo hacen ejecutando una danza con una cierta inclinación y frecuencia, siendo la inclinación la dirección en la que se encuentran las flores y la frecuencia, la distancia. También podemos asegurar que no hay diseño alguno en ingeniería donde no intervengan los ángulos. Aún dentro de la medicina está presente su aplicación, por ejemplo un buen tratamiento de ortodondia tendrá que estar fundamentado en una medición de ciertos ángulos craneales, los cuales determinan entre otras características, el tipo de mandíbula y de mejillas.

En este artículo se presentan avances de la investigación en términos de la experiencia con estudiantes, del análisis bibliográfico y finalmente se describen los resultados de la presentación del trabajo en diferentes eventos.

Antecedentes y Justificación

Sabemos que la trigonometría fue utilizada desde los primitivos babilonios, como un auxiliar para la agrimensura, la astronomía y la navegación. Los astrólogos y navegantes necesitaban calcular distancias no mesurables con una cinta métrica. La trigonometría les permitió realizar tales cálculos a través de la aplicación de las funciones trigonométricas, las cuales fueron utilizadas inicialmente por los griegos para analizar los arcos de los círculos. Hiparco fue el primero que en el año 140 a.c. las utilizó para determinar distancias en línea recta a través de la bóveda celeste.

Tomando en consideración esto, es indudable que los ángulos ya mencionados tienen su motivo de existencia tanto en la génesis de la trigonometría, como en las aplicaciones actuales de física, geometría analítica, cálculo vectorial, representaciones polares, etc. Basta con que pensemos en los giros de una rueda de engrane, movimientos vibratorios y muchos otros fenómenos cíclicos o periódicos. En la navegación tanto naval como aérea, encontramos giros “positivos” y giros “negativos”; si una nave debe de cambiar su rumbo con respecto a los puntos cardinales, las direcciones de giro deben quedar bien definidas, por lo cual se hace necesario adoptar ciertas convenciones, siendo en este caso necesaria la designación negativa y positiva de los ángulos y de igual forma de los ángulos mayores de 360° .

Si durante la enseñanza del álgebra nos encontramos frontalmente con el problema de la concepción de los números negativos, al trabajar con las funciones trigonométricas de ángulos negativos, tenemos dos dificultades, la característica negativa del ángulo y la obtención de sus funciones. También las correspondientes a ángulos mayores de 360° , presentan dificultades.

Puntualizamos que el concepto geométrico de ángulo, es suficiente para resolver los problemas que plantea la geometría, pero no para todos los problemas de la trigonometría y otras disciplinas.

Es importante entonces explorar qué significados dan los alumnos a un ángulo negativo y/o uno mayor de 360° y qué está representando cada una de las funciones trigonométricas en estos casos, ya que si este concepto es base para ser utilizado en otras disciplinas, no es clara la comprensión de otros conceptos relacionados con éste, tampoco tendrán claridad y acabarán aprendiéndolos de manera mecánica.

Marco Teórico

En Vigotsky se enmarca de manera adecuada la problemática tratada en este trabajo, ya que estamos explorando sobre conceptos que podemos considerar abstractos.

Las relaciones entre pensamiento y lenguaje, según Vigotsky, son profundamente complejas. "Un pensamiento nace a través de las palabras. Una palabra sin pensamiento es una cosa muerta, y un pensamiento desprovisto de palabras permanece en la sombra. La conexión entre ellos sin embargo no es constante. Surge en el curso del desarrollo y evoluciona por sí misma" (Vigotsky, 1998). La formación de los conceptos o la adquisición de la palabra significado, escribió Vigotsky, constituye el resultado de una actividad compleja (la operación con la palabra o el signo) en la cual participan todas las funciones intelectuales fundamentales en una combinación especial.

Aquí precisamente lo que tratamos de explorar son los sentidos y los significados, que los alumnos dan a los ángulos negativos y mayores de 360°. Porque si como establece Vigotsky, estos conceptos no tienen una representación mental para los alumnos, son cosa muerta y no se ha logrado que las diferentes funciones intelectuales, se combinen para darles significado.

Entendemos por *sentido* a lo que se concibe como una interpretación personal no institucionalizada que un sujeto le asigna a un objeto de conocimiento dentro de un contexto, donde el objeto adquiere relevancia y funcionalidad; y por *significado* la síntesis conceptual de dicho objeto como un producto social dado por la interacción, negociación y consenso. Algo institucionalizado y que por lo tanto se dará después de haber manipulado al objeto en diferentes conceptos, esto es, el sujeto construye el significado a partir de los sentidos en contexto.

Tanto los ángulos como las funciones trigonométricas, tienen diferentes representaciones. En general, cada representación, según Duval (1998) "*Es parcial cognitivamente con respecto a lo que ella representa*". Esto es, cada sistema de representación puede resaltar características diferentes. Es decir, cada sistema de representación nos permite ver una faceta diferente del objeto a estudiar y pone de manifiesto algunas de sus propiedades relevantes.

Los registros de representaciones deberán permitir las tres actividades cognitivas fundamentales, según Duval (1998) ligadas a la semiosis: la primera se refiere a la *formación de una representación identificable* como una representación de un registro dado. La segunda, es el *tratamiento* de una representación. Esta actividad es considerada como la transformación de una representación en otra, pero en el mismo registro donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna al registro teniendo en cuenta las reglas de tratamiento propias del tipo de registro de que se trate. Y la última, es la *conversión*. Esta actividad es una transformación externa al registro de partida, donde se produce una representación en otro registro y se conservan la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación original.

Refiriéndonos a las funciones trigonométricas podemos aseverar que estas actividades cognitivas deben haberse realizado para lograr una concepción adecuada de las mismas; pensemos solamente en las diferentes representaciones que puede tener la función seno de un ángulo.

Consideramos que un campo privilegiado donde se pueden aplicar los sentidos y significados es el estudio de los ángulos negativos y mayores de 360° que estamos realizando.

Metodología y Desarrollo

1. En esta investigación se diseña, valida y aplica una encuesta a una muestra de 20 alumnos del tercer semestre de bachillerato del CENTRO DE BACHILLERATO TECNOLÓGICO industrial y de servicios No. 14, (CBTIS 14), para explorar sus concepciones sobre el tema.

Se diseñó el instrumento de exploración, conteniendo dos apartados, uno con un problema de aplicación y otro con la representación de las funciones en el círculo trigonométrico. El primer apartado consistió en contestar, basados en un gráfico de la Rosa de los Vientos, la dirección que podía tomar un barco que se encontraba en el origen del plano cartesiano, anotando el número de grados que giraba y el sentido que tomaba. En el segundo, representar el seno, coseno y tangente de diversos ángulos negativos y positivos, en el círculo trigonométrico.

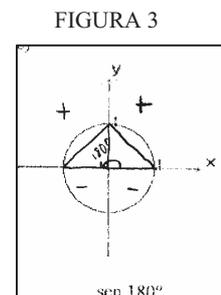
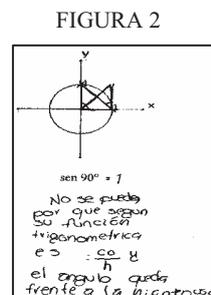
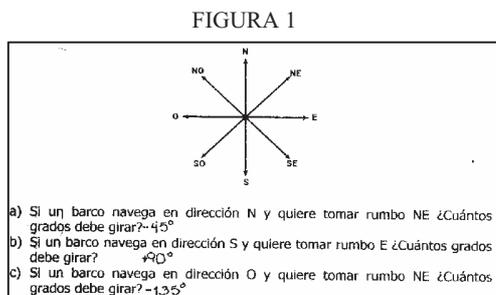
El instrumento se aplicó a la muestra mencionada de edades entre 14 y 16 años, que cursaban en el segundo semestre, la materia de Matemáticas II, con contenido de geometría y trigonometría.

En un primer momento dichos alumnos contestaron el cuestionario, posteriormente, analizando las respuestas obtenidas, se llevó a cabo la entrevista con cada uno de ellos para conocer lo que pensaban al responder las preguntas planteadas.

Después de analizar los resultados, observamos que en el apartado I, el 95% de los alumnos contestó en forma correcta, no así en el apartado II, que sólo el 5% lo hizo correctamente.

Pudimos observar en los resultados mencionados que los alumnos entrevistados:

- En el problema de la Rosa de los Vientos no tuvieron dificultad, identificando correctamente los sentidos positivos y negativos de los ángulos. (figura 1)
- Al preguntarles sobre otras aplicaciones de estos ángulos, su respuesta fue negativa.
- En el cuestionario, al representar las funciones de los ángulos en cuestión, en el círculo trigonométrico, no lo pudieron resolver porque forzosamente quieren ver el triángulo rectángulo y al no visualizarlo piensan que no hay solución. (figura 2)
- Confunden a los ángulos negativos con los signos de los cuadrantes. (figura 3)



2. Como los textos reflejan el trabajo docente dentro del aula y en consecuencia la forma en que los conceptos les han sido manejados a los alumnos, también efectuamos un análisis de textos. Este trabajo se puede realizar desde diferentes perspectivas, nosotros tomamos el efectuado por Sierra (2003) en su trabajo sobre “El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria” en el que consideran tres dimensiones para el análisis:

Análisis conceptual, en el que se busca conocer las definiciones utilizadas y forma de organizar los conceptos, las representaciones gráficas y simbólicas, problemas y ejercicios resueltos y propuestos.

Análisis didáctico-cognitivo en el que se indaga los objetivos que el autor propone para estos contenidos.

Análisis fenomenológico caracterizado con los fenómenos que considera el autor para la presentación de los conceptos motivo de investigación.

Los textos utilizados se seleccionaron por su pertinencia y por estar contemplados dentro de la bibliografía sugerida por el plan de estudios correspondiente. Los resultados emanados de este análisis son los siguientes:

AU-TOR	ANÁLISIS CONCEPTUAL
(Acosta, 2002)	<p>Presenta la definición clásica de ángulo y la diferencia entre ángulo positivo y negativo conforme la convención del giro de las manecillas del reloj.</p> <p>A partir de la semejanza entre triángulos introduce las funciones trigonométricas, como una relación entre dos lados de un triángulo rectángulo.</p> <p>Posteriormente introduce el círculo trigonométrico y las curvas generadas a partir de él para 360°.</p> <p>No se encuentran aplicaciones, ejercicios o problemas referentes a los ángulos negativos y mayores de 360°.</p>
(Sparks, 1998)	<p>El concepto de ángulo lo introduce refiriéndolo a los segmentos rectilíneos dirigidos, ángulo negativo y positivo conforme la convención del giro de las manecillas del reloj.</p> <p>Manejando como antecedente el sistema cartesiano de coordenadas rectangulares, define las funciones trigonométricas a partir de las relaciones entre la abscisa, ordenada y radio vector.</p> <p>En el capítulo 4 “La Reducción de las Funciones Trigonómicas” en su segunda sección, desarrolla la obtención de las funciones trigonométricas de ángulos negativos, exponiendo la conveniencia de expresarla en términos de la misma función del ángulo positivo de igual magnitud.</p> <p>En el capítulo 5 “Medida en Radianes y Funciones de Números” al tratar con ángulos mayores de 360° lo hace en función del número de revoluciones. En el capítulo 6 trata todo lo referente a la graficación de las funciones trigonométricas, hasta 360°, mostrando como referencia, sin analizar -180°</p> <p>Contiene un gran número de ejercicios, solamente tocando los ángulos negativos y mayores de 360° en los capítulos arriba mencionados, y al tratar las coordenadas polares.</p>

(Swokowski, 1997)	<i>Análisis conceptual:</i> Inicia el texto con algunos temas de álgebra relacionados: sistema de coordenadas rectangulares y gráficas, funciones y gráficas de funciones. Da una definición clásica de ángulo y también refiere la diferencia entre ángulo positivo y negativo conforme la convención del giro de las manecillas del reloj. Las funciones trigonométricas las define a partir del círculo unitario, haciendo referencia a los conceptos de función ya tratados. Posteriormente analiza las gráficas de las funciones trigonométricas desde -2π hasta 4π . Contiene explicaciones sobre temas de física relacionados, como movimiento circular, movimiento armónico, la diferencia entre velocidad angular y velocidad lineal. También presenta una buena cantidad de ejercicios y problemas en los que incluyen tanto a los ángulos negativos, como los mayores de 360°
-------------------	---

AUTOR	ANÁLISIS DIDÁCTICO-COGNITIVO
(Acosta, 2002)	Este texto fue elaborado basándose en el programa de la DGETI, con una intención de lograr una participación activa de los alumnos en la formación de los conceptos. No lográndose este objetivo en el apartado correspondiente a la trigonometría.
(Sparks, 1998)	En esta edición el autor trata de incluir las consideraciones matemáticas de la época sin perder su carácter tradicional. Específicamente en el capítulo referente a las funciones trigonométricas hace algunos cambios con respecto a las ediciones anteriores en cuanto al orden de los capítulos aunque conserva las mismas definiciones.
(Swokowski, 1997)	El autor trata de incrementar la claridad en el análisis de los conceptos con la finalidad de facilitar a los estudiantes, la comprensión de los conceptos, sin perder el rigor matemático.

AUTOR	ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO
(Acosta, 2002)	No contiene referencia alguna, solamente algunos ejercicios en los que se hace referencia al movimiento circular uniforme
(Sparks, 1998)	No contiene referencia alguna
(Swokowski, 1997)	Al tratar los temas de física da la oportunidad de manejar los conceptos de los ángulos dentro de un contexto en los que intervienen fenómenos relacionados.

Conclusiones

Este trabajo se presentó en diversos eventos como en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME) XVIII, en donde al mostrar los resultados obtenidos, los asistentes expresaron su interés por el diseño de alguna estrategia de solución a esta falta de conceptualización palpable de la temática investigada. Por lo que, concluimos que si como docentes podemos conocer los sentidos y significados de la temática aquí tratada, se podrá reconceptualizar la enseñanza de los mismos. Y una vez determinadas las concepciones de los alumnos sobre las funciones trigonométricas de ángulos negativos y mayores de 360° , éstas pueden ser base para el diseño de situaciones didácticas como notas de clase (Brousseau 1983, Chevallard 1998 y Velázquez 2001) para corregirlas.

Referencias Bibliográficas

- Acosta R. (2002). *Geometría y Trigonometría*. Colección DGETI. México: Fondo de Cultura Económica.
- Brousseau, G. (1983). *Los Obstáculos Epistemológicos y los Problemas de la Enseñanza*. México: DME-CINVESTAV-IPN.
- Chevallard, Y., Bosch M. y Gascón J. (1998). *Enseñar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. México, SEP.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Sierra M., González M.T. y López C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Revista Educación Matemática*, 15(1) (pp. 21-49).
- Sparks F. y Rees P. (1998). *Trigonometría*. México: Reverté Ediciones.
- Swokowski E. y Cole J. (1997). *Trigonometría*. México: International Thomson Editores.
- Velázquez, S., Flores C., García G., Gómez E. y Nolasco, H. (2001). *El Desarrollo de Habilidades Matemáticas en Situación Escolar*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Vigotsky, L. (1998). *Pensamiento y Lenguaje*. México: Quinto Sol.