Dificultades de Comprensión de Estocásticos en la Educación Secundaria

José Manuel López
DME, Cinvestav del IPN
México
josemanuellopez8@prodigy.net.mx
Probabilidad, Estadística y Combinatoria — Nivel Básico

Resumen

Este trabajo, con un enfoque cualitativo (Eisner, 1998), forma parte de una investigación más amplia sobre comprensión de probabilidad en tercer grado de secundaria. Con referencia a la propuesta de ideas fundamentales para un currículum de estocásticos (Heitele, 1975), el análisis del marco institucional vigente y del desempeño de docentes y alumnos en escenarios específicos, resultó en la identificación de dificultades de unos y otros durante su estudio de situaciones probabilísticas, así como de prácticas acríticas de enseñanza y de seguimientos de textos que no derivan en la advertencia de intuiciones erróneas (Fischbein, 1975) de los estudiantes durante la enseñanza.

1. Introducción

La formación de profesores en probabilidad, es deficiente, como lo señalan Galván (1996) y Alquicira (1998), por lo que con frecuencia su enseñanza es superficial o se le omite. Según Heitele (1975), para la enseñanza de estocásticos se necesitan profesores que sepan lo que de ellos es fundamental para aplicarlo en situaciones específicas dentro y fuera del aula, pues “la adquisición temprana de modelos explicativos inadecuados puede desarrollar intuiciones firmemente arraigadas” (pág. 4).

Parte de una investigación más amplia, ésta se planteó estudiar: ¿qué elementos requiere el profesor de tercer grado de secundaria para la enseñanza de la ley de los grandes números?; ¿qué elementos necesita el alumno de tercer grado de secundaria para comprender la ley de los grandes números? Sus objetivos fueron: identificar elementos para la enseñanza de la probabilidad en el tercer grado de secundaria e identificar elementos para la formación de docentes de probabilidad en el tercer grado de secundaria.

2. Ideas Fundamentales para la Enseñanza de Probabilidad y Estocásticos

Con contenidos de matemáticas en la escuela secundaria, “Un propósito central … es que el alumno aprenda a utilizarlas para resolver problemas, no solamente los que se resuelven con los procedimientos y técnicas aprendidas en la escuela, sino también aquellos cuyo descubrimiento y solución requieren de la curiosidad y la imaginación creativa” (SEP, 1993, *Plan y programas de estudio. Educación Básica Secundaria*, pág. 37). Esto es facti- ble si los alumnos comprenden lo enseñado en el aula.

Para el desarrollo de una base para el pensamiento probabilístico en un contexto es- colar, Heitele (1975) propone ideas fundamentales de estocásticos, las cuales define como aquéllas “que proporcionan al individuo modelos explicativos en cada etapa de su desarrollo, que sean tan eficientes como sea posible y que se distingan en los distintos niveles cognoscitivos, no de manera estructural sino sólo en su forma lingüística y en sus niveles de elaboración" (pág. 3). Luego, la enseñanza retroalimentará los conocimientos adquiridos previamente para relacionarlos analíticamente con la realidad y continuarlos hacia un conocimiento más elaborado, es decir, ir de un plano intuitivo hacia uno formal.

Las ideas fundamentales de probabilidad y de estadística (estocásticos) que Heitele propone son: medida de probabilidad; espacio muestra; regla de adición; regla del producto e independencia; equidistribución y simetría; combinatoria; modelo de urna y simulación; variable estocástica; Ley de los Grandes Números y la idea de muestra.

Según Fischbein (1975), la enseñanza de la probabilidad es necesaria y es factible con ella el desarrollo de las intuiciones, pues en las vivencias diarias debemos tomar decisiones entre varias opciones que se presentan. Según él, las intuiciones se clasifican en: *primarias*, que son adquisiciones cognitivas directamente de la experiencia, sin instrucción; *secundarias*, formadas por la educación sobre todo en la escuela. Fischbein señala, además, que existe un deterioro en el desempeño probabilístico con la edad y que la ausencia de la idea de proporcionalidad no es obstáculo para aprender el concepto de probabilidad.

3. Método, Organización y Criterios de Análisis

La información recopilada mediante videograbaciones, cuestionarios, entrevistas y documentos pertinentes, se analizaron con los siguientes criterios: ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975), recursos para organizar y tratar la información (Fischbein, 1975), otros conceptos matemáticos incluidos, términos de estocásticos utilizados en la enseñanza. Aquí sólo nos referiremos a las ideas fundamentales de estocásticos.

La investigación, de orden cualitativo (Eisner, 1998), se organizó en cuatro etapas.

a. *Primera etapa (documental).* Caracterizó el marco institucional en el que se inscribe la enseñanza de la probabilidad en tercer grado de secundaria. Para ello, se analizó la propuesta educativa respectiva: *Plan y programas de estudio* (SEP, 1994), libros de texto (entre ellos, Filloy, 2001).

b. *Segunda etapa (estudio dirigido y aula alterna).* Interesó caracterizar la comprensión de ideas de estocásticos mediante la interacción entre docentes (*estudio dirigido*), su enseñanza del tema y las dificultades que ésta enfrentó en *aula alterna*, contando con la participación de un docente-investigador (de ahí el adjetivo "alterna"), y las dudas manifiestas de los estudiantes. Mediaron el *estudio dirigido* y la enseñanza en el aula las lecciones de probabilidad (Filloy *et al.,* 2001), las cuales se refirieron a variable aleatoria y esperanza (lección 29), la paradoja de Bertrand relativa al teorema de Bayes (lección 30), distribución binomial (lección 31), el problema de los cupones como número de éxitos obtenidos en n ensayos (lección 32) y números aleatorios y simulación (lección 33).

b.1. *Estudio dirigido.* Consistió en el desarrollo de un programa de sesiones de estudio de probabilidad mediado por el texto ya citado, con 12 docentes de secundaria, para posibilitar la enseñanza del tema en el aula e introducir elementos de reflexión y crítica (autocrítica) de la práctica docente respecto al tema.

b.2. *Aula alterna.* Consistió en la conjugación de docencia e indagación en la práctica de la enseñanza de la probabilidad en el aula, mediada por el texto ya citado, con la participación de este investigador en las clases que el docente impartió a sus estudiantes y el registro de la información de interés.

c. *Tercera etapa (aula normal).* Con la orientación de los resultados de la etapa precedente, se enfocó la comprensión de los estudiantes acerca de la *Ley de los Grandes Números* al cabo de su enseñanza mediada por el texto citado. Participaron en el aula el investigador y sus 26 alumnos del tercer grado de educación secundaria.

c.1. *La estrategia de enseñanza* consideró resultados de *aula alterna* y lo que se observó en *estudio dirigido*, respecto a los siguientes aspectos: i) clarificación de la situación planteada; ii) realización de las actividades propuestas en el texto. Es decir, disposición en el aula de material (concreto) para ilustrar, mediante la realización de ensayos (efectivos), en qué consistía la situación por estudiar; en particular, se pretendieron condiciones para la advertencia de distintos resultados posibles y de la variación de ocurrencia de éstos mediante la introducción del enfoque frecuencial de la probabilidad.

c.2. *Aplicación de cuestionario* y cuantificación de los resultados obtenidos. En esta etapa se aplicó un cuestionario constituido por diez preguntas de opción múltiple (cuatro posibles resultados en cada pregunta y requerimiento de justificación de cada selección realizada), previamente a la enseñanza del tema; luego de ésta se aplicó nuevamente el mismo cuestionario para obtener información sobre resultados de esa enseñanza en las nociones de probabilidad de los estudiantes. Las preguntas se distribuyeron así: la primera planteó la intervención de azar; las siguientes tres, el enfoque clásico de la probabilidad; las siguientes tres correspondieron al enfoque frecuencial de la probabilidad; y las tres últimas, a la *Ley de los Grandes Números*. Las preguntas se refirieron a distintas situaciones, tales como extracciones de urna, ensayos de Bernoulli o del entorno familiar a los estudiantes.

d. *Cuarta etapa (entrevista semiestructurada).* Se entrevistó a un alumno de *aula normal*, seleccionado de acuerdo a sus resultados en las dos aplicaciones del cuestionario. El fin fue profundizar en su comprensión de la *Ley de los Grandes Números*, utilizando un guión de preguntas respecto a ideas fundamentales de estocásticos, recursos para organizar y tratar la información, términos de estocásticos y otros conceptos matemáticos.

4. Resultados

4.1. *Etapa documental.* Unos de los resultados de esta etapa es que, aún y cuando el *Plan y programas de estudios* (SEP, 1993, pág. 51) incluye temas de probabilidad que deben impartir los profesores, se privilegian en él dos ideas fundamentales (medida de probabilidad y espacio muestra), lo cual resulta en un programa de estudios incompleto y el reflejo consiguiente en los demás materiales de apoyo, en lo que a probabilidad se refiere.

4.2. *Estudio dirigido.* Se consideró la lección 29 referente a la realización de 100 volados, que se deben agrupar de diez en diez; si se obtiene águila, se gana un peso, pero si se obtiene sol se pierde un peso; cada partida de diez volados cuesta cinco pesos. La pregunta que se plantea es: ¿cuál es la ganancia que se puede esperar? Cada profesor realizó 10 lanzamientos para obtener los 100 lanzamientos que propone la lección. Se identificaron algunas dificultades de los docentes respecto a probabilidad, y algunos sesgos respecto a la idea de azar; así, un profesor se consideró "bueno" para la realización de los lanzamientos, aunque la probabilidad de cada cara de la moneda ordinaria es un medio. En la transcripción del pasaje en cuestión, "C" denota al conductor y "P" al profesor:

12 C	¿Cuál es la ganancia que razonablemente puedes esperar, es decir, por término medio? …..¿Te conviene jugar?	13 P_6	No podría.
14 C	Así como ve el problema, ¿le convendría jugar o no?	15 P_6	Sí, porque tengo las mismas oportunidades de ganar que mi otro contrincante.
16 C	Usted, maestra, ahora ¿cuánto en término medio?, ¿cuánto esperaría usted ganar, perder, o ninguna de las dos?	17P_{12}	Ganar veinticinco pesos.
18 C	¿Usted, maestra?	19 P_8	A lo mejor ganar.
22 C	¿Cuánto?	23 P_{11}	A lo mejor si gano y pierdo la mitad quedo en cero igual.
24 C	¿Usted, maestra?	25 P_9	Yo igual.
26 C	¿Cuánto?	27 P_9	O sea, de cero.
28 C	Usted, maestra, entonces usted 25, ¿verdad?	29 P_{12}	Yo soy buena para los volados.

4.3. *Aula alterna*. Se reveló escaso conocimiento del docente sobre probabilidad, por ejemplo al referirse a "frecuencia relativa", término específico de estocásticos. En las sesiones surgió la confusión de frecuencia relativa con frecuencia; se les consideró sinónimos y ocasionó incomprensión del valor esperado de la variable aleatoria en cuestión. En el aula, la gráfica de los resultados de la secuencia de lanzamientos de la moneda solamente consideró los favorables a águila; no se estableció la relación entre números de águilas ocurridas y el total de lanzamientos para que el alumno advirtiera la estabilización progresiva de la frecuencia relativa del evento en cuestión. En la transcripción del pasaje respectivo, "P" denota al profesor del grupo y "A" al alumno:

11 P	Poligonal, gráfica poligonal, vamos a hacer… vamos a ayudarnos del número con el cual… ustedes van a hacerlo, con el siguiente número, vamos a hacerlo rapidísimo. En la parte inferior dice número de lanzamientos de una moneda y ésta sería del 1 al 10; y por la parte izquierda está la frecuencia relativa, ésta sería también del 1 al 10, de dos en dos, 2, 4, 6, 8 y 10. Vemos por aquí [que] dice "frecuencia"...	12A_1	Relativa.
13 P	Relativa. Acá está el cero y acá esta el uno, dos, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. En la primera secuencia de volados, que fue de 10, ¿cuántas águilas obtuve?	14A_2	Cuatro.

4.4. *Aula normal*. Los alumnos no advirtieron la independencia de eventos para obtener caras distintas al lanzar dos monedas, pues aludieron a la trampa o a la suerte, a la manera en que se lanza la moneda:

174P	¿Crees que el primer resultado águila haya influido en el siguiente resultado	175A_{17}	Hubo trampa. ¡A la suerte!

que [también] fue águila?

176A_8 Puede ser trampa.
177A_4 Pudo haber sido que la moneda la
178A_5 echó con la cara hacia arriba dos veces.

También tuvieron dificultades para establecer la frecuencia relativa de eventos en diez lanzamientos, en particular, y el inventario del espacio muestra asociado a la situación en estudio (todas las diferentes secuencias de resultados de diez lanzamientos).

4.5. *Resultados generales del cuestionario.* La figura 1 resume los resultados de selecciones correctas en las aplicaciones del cuestionario antes y después de la enseñanza.

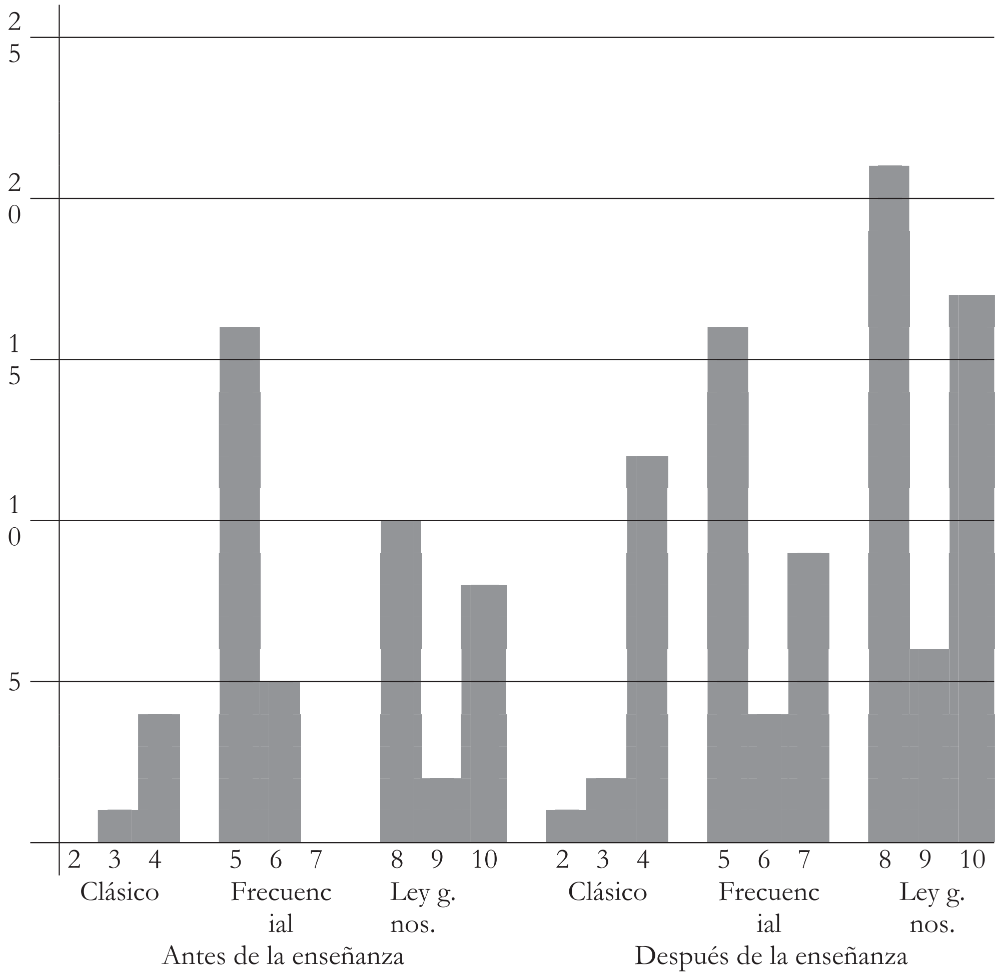

Figura 1. Resultados del cuestionario, selección correcta, antes y después de la enseñanza.

De modo notable, en los dos casos las preguntas que implicaron a la ley de los grandes números (8, 9 y 10); se obtuvieron mejores resultados, que las que corresponden al enfoque frecuencial (5, 6 y 7); y resultaron más difíciles las preguntas que corresponden al enfoque clásico (2, 3 y 4).
Por razones de espacio ejemplificamos sólo casos de enfoque frecuencial y de ley de los grandes números con un problema cada uno. Indicamos con negrita la opción correcta e incluimos ejemplos de justificaciones proporcionadas antes y después de la enseñanza.

6. Después de realizar un estudio en una universidad particular, en el área de posgrado, se estimó que 30 % de los estudiantes estaban seriamente preocupados por sus posibilidades de encontrar trabajo, 25 % por sus notas y 20 % por ambas cosas. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de último curso, elegido al azar, esté preocupado por al menos una de las dos cosas? ....( )

a) 5 % b) 20 % **c) 35 %** d) 55 %

Explica tu respuesta: si sumamos a 30% el 25% nos daria el 55% menos el 20% nos daria el 35%

Explica tu respuesta: porque es el 30% y 25% son 55% Estacian preocupados por sus notas y 20% no por que incluye ambas cosas.

Figura 2. Desempeño del estudiante No. 5 en condiciones iniciales y finales.

10. Una bolsa contiene 15 fichas numeradas del 1 al 15. Un experimento de azar consiste en extraer al azar una ficha y en lanzar una moneda. ¿Cuál de los siguientes casos es más probable al repetir el experimento 900 veces, en las mismas condiciones? ....( )

a) (par, águila) **b) (impar, águila)** c) (par, sol) d) Ninguno de los anteriores.

Explica tu respuesta: No lo sé

Explica tu respuesta: Los impares son más que los pares, por eso es más probable que salga esa combinación

Figura 3. Desempeño del estudiante No. 11 en condiciones iniciales y finales.

En los dos ejemplos, como ocurrió con más de la tercera parte de los estudiantes (ver Figura 1), la aportación de la enseñanza se revela en el tipo de justificación otorgada, la cual, aunque proporcionada en lengua natural por la presentación misma del cuestionario, manifiesta ya adquisición de elementos para un análisis probabilístico.

4.6. *Entrevista semiestructurada*. Se presentó la situación siguiente a la que se refirió el guión de entrevista:

Un aprendiz de paracaidista debe realizar 10 saltos, cayendo dentro de cierta zona para pasar al siguiente nivel de instrucción; sus intentos son independientes. Si cae dentro de la zona gana un punto, si no, pierde un punto.

Se indicó al estudiante que interpretara la situación planteada mediante los resultados de diez secuencias de diez lanzamientos de una moneda ("águila" para adentro de la zona y "sol" para fuera de ella); así se le remitió a una situación estudiada en clase. Se realizaron efectivamente los 100 ensayos, se registraron los resultados en una tabla con papel y lápiz y se les capturó también en *Excel* para presentar, casi de inmediato en pantalla, la gráfica de las frecuencias de águilas correspondiente y la línea de tendencia respectiva. En el siguiente pasaje, "E" denota al entrevistador y "A" al entrevistado:

41 E ¿Qué podrías decir de estos resultados que obtuviste? [con los lanzamientos de la moneda].
42 A Que fue al azar, que fue la suerte de cada….
43 E Pero en cuanto a ... los volados […] ¿qué podrías decir ... de los resultados que obtuviste?
44 A Que se tuvieron que efectuar para saber cómo serían, ¿no?, qué tanta diferencia había, ¿cuántos son pares o impares…..?
45 E ¿Qué hubieras pensado si estos resultados, por ejemplo, hubieran sido 10, 9 u 8 [puntos obtenidos]?
46 A Que sería ganancia, sería una ganancia.
47 E Y ¿qué dirías si hubieras obtenido 0, 1, ó 2?
48 A Sería pérdida.
49 C ¿Pero qué dirías de esos resultados?
50 A Que podía haber sido mayor o menor cualquiera de los dos [resultados].

El alumno no atribuyó otro significado a los resultados según se planteó la situación de ganancia o pérdida, y no los abstrajo como sólo dos de todas las posibilidades. Estos eventos son poco probables en comparación con los eventos de obtener 3, 4, 5, 6 ó 7 puntos (águilas). Tampoco consideró el resultado "esperado" (la situación es justa), lo cual se señaló en las sesiones en aula. En resumen, con este alumno la enseñanza de la *Ley de los Grandes Números* no logró su cometido.

5. Observaciones

Conviene considerar las experiencias previas de los alumnos (intuiciones primarias) y discutirlas en el aula, lo cual contribuirá a un perfil distinto del futuro profesionista: capacidad de discutir sus puntos de vista, crítico de los diferentes a los suyos, creatividad, independencia. Con docentes en particular, de ahí derivaría el ejercicio crítico sobre su práctica en el aula y sobre los medios institucionales (SEP), pues la propuesta vigente para probabilidad es incompleta según el planteamiento de Heitele (1975).

Tanto alumnos como profesores pueden estimar bien la probabilidad de eventos de fenómenos sencillos (un solo lanzamiento de un dado o moneda), pero les es difícil calcularla cuando se hace referencia a varias repeticiones de ellos y se consideran eventos compuestos. Esto concuerda con lo señalado por Fischbein (1975) respecto a la capacidad de resol- ver problemas combinatorios, pues no siempre se le alcanza en el nivel de las operaciones formales, si se carece de una enseñanza específica. Al respecto, merece destacarse de este trabajo la dificultad y el insuficiente uso que hacen los estudiantes del diagrama en árbol. A pesar de la importancia que le concede Fischbein (1975) como recurso en la resolución de problemas probabilísticos y combinatorios, los alumnos evitan su uso y, cuando lo emplean es con escaso éxito. Consideramos que el uso de este recurso debe ser reforzado en la enseñanza.

Refrencias Bibliográficas

Alquicira, M.I. (1998). *Probabilidad: Docencia y Praxis. Hacia una fundamentación Epistemológica para la educación secundaria*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav, México.
Eisner, E. (1998). *El ojo ilustrado*. Barcelona, España: Paidós.
Filloy, E., Rojano, T., Figueras, O., Ojeda, A.M. y Zubieta, G. (2001). *Matemática Educativa. Tercer grado.* D. F., México: Mc Graw-Hill.
Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
Galván, M. (1996). *Nubes y relojes*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav, México.
Heitele, D. (1975). An epistemological view of fundamental stochastical ideas. *Educational Studies in Mathematics,* 6, 187-205.
SEP, (1994). *Plan y programas de estudios 1993*. D. F., México. Educación Básica Secundaria.