Convención Didáctica sobre la Demostración Geométrica

Efrén Marmolejo y María del Carmen Solano
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México
Efrenmarmolejo@yahoo.com
Pensamiento Geométrico – Nivel Básico

Resumen

Presentamos en este artículo cuales son las condiciones que guarda la demostración geométrica en la escuela secundaria. Se comienza por presentar lo que las normas oficiales nacionales e internacionales nos indican al respecto. Mediante una exploración de campo se determina como es el trabajo en el aula en contexto escolar. Se analizan las diferentes corrientes que en matemática educativa sobresalen al respecto. Finalmente se discute como es que la demostración en contexto escolar no se aproxima a la norma oficial; y como el estudiante si acaso llega a un nivel de explicación en la que emplea propiedades geométricas que no necesariamente son verdaderas. Planteándose la necesidad de establecer una convención didáctica de la demostración geométrica.

I. Introducción

En la práctica docente muchos maestros observamos, respecto a los estudiantes de nuevo ingreso al nivel medio superior, que no tienen herramientas para enfrentarse a situaciones como las de argumentar, conjeturar, deducir o demostrar, pues todas sus herramientas mentales han sido desarrolladas para otro tipo de problemas como el cálculo, la construcción y el uso de algoritmos. También, que la evaluación hecha por PISA en el año 2001, en la que participo México, nuestros jóvenes de 15 años, quedaron en el lugar 31° de 32 países participantes. Es preocupante que, en alumnos de maestría, se dificulte la resolución de problemas geométricos que impliquen una demostración.

Por todo lo anterior, nos dimos a la tarea de investigar como vive la demostración geométrica en la escuela mexicana, enfocándonos al nivel de secundaria, siendo ahí donde oficialmente se da el encuentro del estudiante con el razonamiento deductivo y la demostración.

II.- Las normas oficiales

El Plan y Programas de estudio, de nivel secundaria, proponen actividades para que los alumnos utilicen el razonamiento deductivo. Lo que implica el manejo de ciertas reglas lógicas que no se abordan en ningún grado de educación secundaria..

Así mismo, en el Libro del Maestro de Matemáticas, se enfatiza lo siguiente: " Es importante no demostrar teoremas o resultados aislados, sino proponer actividades que permitan a los alumnos utilizar el razonamiento deductivo para establecer cadenas de teoremas, al principio pequeñas y extraídas de una misma situación, después un poco más largas y que vinculen situaciones diferentes. Los alumnos deberán aprender en forma paulatina a distinguir lo que se ha probado de aquello que se ha aceptado sin demostración y a redactar sus demostraciones.

En resumen resolver un problema de geometría o hacer una demostración pasa por varias fases: la comprensión del problema, investigación y búsqueda de la solución, la redacción de la solución."

Por su parte la Nacional Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en 1993 publica que el estudiante estándar de secundaria podrá aplicar el razonamiento deductivo, construirá y evaluará conjeturas matemáticas y argumentos...."las conjeturas y la demostración de su validez lógica es la esencia del acto creativo de hacer matemáticas".

El proyecto PISA [1] define la formación matemática como: la capacidad del individuo, a la hora de desenvolverse en el mundo, para identificar, comprender, establecer y emitir juicios con fundamento acerca del papel que juegan las matemáticas como elemento necesario para la vida actual y futura de este individuo como ciudadano constructivo, comprometido y capaz de razonar. Los estándares de matemáticas tienen tres aspectos que deben estar presentes en la actividad matemática: planteamiento y resolución de problemas; razonamiento matemático (formulación, argumentación, demostración); comunicación matemática; consolidación de la manera de pensar (coherente, clara y precisa). Por otra parte, considera la existencia de varias destrezas matemáticas que deben ser relevantes y pertinentes en todos los niveles de educación, (Slisko, 2003). En total son ocho destrezas, y para esta investigación, nos interesa en particular la "Destreza de argumentación matemática", que consiste en:

- Saber que son las demostraciones matemáticas y en que difieren de los otros tipos de razonamiento matemático.
- Seguir y evaluar las cadenas de los diferentes tipos de razonamientos matemáticos.
- Tener un cierto sentido de la heurística ("qué puede – o no – ocurrir, y por qué")
- Crear razonamientos matemáticos.

Como hemos analizado, tanto las normas oficiales nacionales e internacionales indican que un alumno de nivel secundaria ha de desarrollar habilidades para llevar a cabo la demostración de propiedades geométricas.

III. El trabajo en el aula

Se realizó una investigación de campo, para determinar como estas disposiciones oficiales se llevaban a cabo en el aula. Se aplicaron instrumentos para explorar como los alumnos de

[1] PISA (acrónimo derivado del titulo del proyecto en inglés: Programm for International Student Assesment, Programa para la evaluación internacional de estudiantes. Es auspiciado por la UNESCO y la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Es la evaluación internacional estandarizada, desarrollada en conjunto por los países participantes y administrada a estudiantes de 15 años que se encuentran actualmente en los sistemas educativos.

tercero de secundaria demuestran, argumentan o explican sobre las soluciones de problemas geométricos. Y a los maestros para determinar acerca de su concepción sobre los teoremas y su demostración. En particular, se efectuaron entrevistas clínicas a diferentes alumnos y maestros. Para seleccionar a los alumnos que fueron entrevistados, primero se aplicó el instrumento a todo un grupo, el cual estuvo dividido en equipos, con un máximo de cuatro integrantes. De acuerdo a su desempeño se seleccionaron 3 estudiantes únicamente. Los resultados obtenidos en los alumnos fueron:

- No dominan las propiedades básicas de ángulos, triángulos, cuadriláteros y circunferencia, si acaso utilizan propiedades de las que no están seguros que sean verdaderas.
- Pocos estudiantes conocen las propiedades, pero no saben emplearlas.
- No se observa secuencia lógica en sus razonamientos.
- No tienen estrategias de demostración.
- Fundamentan sus afirmaciones a partir de explicaciones de bases intuitivas.
- No utilizan símbolos matemáticos, predominando el lenguaje común.
- En cuanto a los maestros se encontró:
- Si por su formación académica consideran importante hacer una demostración, entonces los profesores la explican a sus alumnos.
- Los maestros explican los teoremas y sus demostraciones en el pizarrón, los alumnos son pasivos.

Sobre la base de estos resultados, se constata que los alumnos desconocen las propiedades geométricas que se exploraron, se pudiera ubicar el nivel de conocimiento de acuerdo al modelo de Van Hiele en el nivel 1 y en casos excepcionales hasta el nivel 2. Generalmente utilizan la explicación, entendida ésta como un intento personal para auto convencerse de la validez de una proposición. Además, se puede afirmar que los alumnos no manejan el concepto de demostración tal y como lo aproximan las normas oficiales, si acaso llegan a dar una explicación basada en conocimientos intuitivos.

IV. Diferentes perspectivas de la demostración geométrica en Didáctica de las Matemáticas

La demostración es una de las herramientas más potentes de las matemáticas. "Parte de la educación matemática consiste en que los estudiantes aprendan a demostrar o al menos ver la necesidad de ello", Alsina (1997). Ningún resultado es aceptado en el cuerpo de las matemáticas hasta que ha sido demostrado deductivamente a partir de un conjunto explicito de axiomas. Durante generaciones, en la geometría euclidiana, la enseñanza de la demostración deductiva ha sido el objetivo principal [2].

---

[2] En la escuela secundaria, la enseñanza de la geometría, comprende básicamente la obra magistral de los Elementos de Euclides, sin embargo esta no apareció en forma deductiva, hicieron falta 300 años, de exploraciones, argumentos vagos e incluso incorrectos, antes de que se plasmara en los Elementos. Esta estructura que intenta ser estrictamente lógica, se apoya demasiado sobre argumentos intuitivos, definiciones

Uno de los trabajos mas sobresalientes en el estudio de la geometría es el modelo de los esposos Van Hiele, el cual surgió a raíz de los problemas cotidianos que se presentan en el aula. Es descriptivo porque intenta explicar como razonan los estudiantes (niveles de razonamiento) y prescriptivo porque da unas pautas a seguir en la organización de la enseñanza (fases de aprendizaje).Las propiedades características de este modelo son: su secuencialidad, no es posible alterar el orden de la adquisición de los niveles de razonamiento; cada nivel tiene un lenguaje propio; hay períodos donde aparecen razonamientos de dos niveles consecutivos, el nivel de razonamiento es local o sea que si un individuo razona a cierto nivel en un concepto, es posible que razone a otros niveles en otro concepto, la adquisición de los sucesivos niveles no es un aspecto biológico, pues interviene en gran medida la instrucción recibida y la experiencia personal. No existe una edad a la cual se alcancen cada uno de los sucesivos niveles, Flores, C. y Toledo, E. (2001).

Balacheff, N. (1988), considera que la interacción social del individuo tiene una importancia relevante, lo cual lleva a los alumnos a realizar discusiones para convencerse unos a otros de los argumentos de cada uno. Esta interacción social resulta ser un instrumento potente que sirve para favorecer los procesos de devolución a los alumnos de la responsabilidad matemática sobre sus actividades y producciones, al tiempo de favorecer la aparición de procesos de demostración en ellos. Además, hay que considerar no solo el ámbito social, sino a los alumnos en relación con el contexto en general. La argumentación no la considera un camino directo hacia la demostración ya que tiene el objetivo de obtener el acuerdo de un compañero, convirtiéndose en un obstáculo epistemológico de la demostración. A diferencia de la demostración que busca la validez a través de la descontextualización del discurso, la desaparición del actor y del tiempo.

Duval, (1999), ha visto que para los alumnos, y especialmente al inicio de su escuela, las diferencias que perciben entre argumentar y demostrar no son muchas, de hecho son casi sinónimos. Aclara que, la demostración es un razonamiento válido. La argumentación no tiene vínculos de validez, sino de pertinencia, es decir, la demostración busca la validez de un enunciado y la argumentación su pertinencia. El desarrollo de la argumentación incluso en sus formas más elaboradas no abre una vía de acceso a la demostración. Es necesario que el alumno utilice un lenguaje muy específico como el de la lógica y no únicamente un lenguaje natural

Fischbein, citado por Mariotti, (1998) afirma que en la matemática y en la ciencia en general, existen dos tipos de conocimientos, aquellos que son auto evidentes y los que están basados en una serie de pasos y que proporcionan una prueba indirecta. A los primeros se les denomina intuitivos a los segundos lógicos o lógicamente basados. Un conocimiento intuitivo es auto evidente, se acepta sin una necesidad de validación; coercitivo, se impone con un carácter de verdad obligatoria; puede ser representado globalmente; tienen un carácter de necesaria certidumbre intrínseca, que no requiere de soportes externos para apoyarse, pues de hecho tiene la experiencia del individuo; tiende a llevarse mas allá de la información dada, mas allá del soporte empírico.

---

injustificadas y demostraciones inadecuadas como comprendieron los matemáticos del siglo XIX. (Kline, 1976, páginas 46 y 177)

La aceptación intuitiva es parecida a la "fe", Fischbein, se refiere al grado de aceptación directa y subjetiva de la relación correspondiente en cuanto a lo intrínsecamente necesario. Esta aceptación esta basada en convicciones, las cuales pueden ser autoritarias (si el profesor o un libro lo dice), formales (cuando se basan en una prueba formal), o intuitivas (se basan en la evidencia). Por sus reglas lógicas y deductivas la demostración queda fuera del flujo fundamental del comportamiento del adolescente. El pensamiento analítico, el basado en la lógica, tiene como característica, su claridad, pero en la práctica carece de algo esencial: su inmediatez. En situaciones prácticas se necesitan validaciones globales y rápidas. Los teoremas y sus demostraciones serán aceptados por el alumno cuando se de la aceptación intuitiva de los mismos.

Por su parte Boero (1999), propone el uso del concepto de unidades cognitivas de los teoremas como una herramienta para predecir y analizar algunas dificultades de los alumnos, proporcionando un camino para abordar la enseñanza de la demostración. El concepto de unidad cognitiva de un teorema, esta basado precisamente en la continuidad existente entre la producción de una conjetura y la construcción posible de su prueba. Si esta unidad se rompe, como cuando se pide "demuestre que…", se pierde la continuidad y solo se recupera cuando existe una re-aprobación del enunciado a través de un ciclo completo: explorar, conjeturar, explorar y reorganizar una nueva demostración. Este ciclo básicamente se divide en dos fases: la producción de las conjeturas y la construcción de la prueba. Los resultados de los alumnos variarán enormemente de los producidos por los matemáticos. El maestro juega el papel de mediador en la formulación de enunciados, incluyendo todos los instrumentos efectivos para expresar y probar teoremas. El proceso de producción de conjeturas es determinante para introducir a los alumnos a la argumentación para la construcción de la demostración.

V. Necesidad de un replanteamiento de la demostración geométrica en el ámbito escolar.

No existe una concepción única e inmutable de la demostración, entonces no es posible esperar que, en la escuela, la demostración tenga una sola concepción. Larios (2003), utiliza el concepto de transposición didáctica, el cual tiene que ver con el trabajo de adaptación o transformación del saber en objeto de enseñanza, en función del lugar, del público, y de las finalidades didácticas que se persiguen. Al docente le toca la tarea de tomar el conocimiento matemático y adaptarlo o contextualizarlo al momento particular de su aula.

El concepto de demostración es uno de los conceptos matemáticos centrales en la matemática y por lo tanto se considera indispensable su enseñanza a los alumnos en los distintos niveles educativos. A pesar de esto es bien sabido que las diversas formas de pensamiento lógico no siempre son logradas satisfactoriamente en la escuela, e incluso en los niveles superiores, Crespo (2003).

Al revelar, lo que realmente se hace en la escuela secundaria, surge la necesidad de establecer una reconceptualización del significado de la demostración en contexto escolar. Encausar la argumentación con bases empíricas y científicas hacia la construcción de conjeturas; potenciando el paso de la conjetura a la prueba, dándose la veracidad de las conjeturas del consenso a la prueba, formando una Unidad Cognitiva resumida en las fases de: explicar, argumentar, conjeturar – demostrar. Durante la construcción de conocimientos, el estudiante está en una permanente búsqueda de explicaciones y argumentos que permitan la aceptación de "teorías", proposiciones y aproximaciones conceptuales constituidas en conjeturas, cuya práctica persistente, formará habilidades en el estudiante para comprender y manejar la extensión y limite de los conceptos matemáticos (propiedades), a utilizar la intuición y los procedimientos heurísticos en la creación de "razonamientos matemáticos". Siendo el campo semántico del estudiante el punto de partida para la enseñanza de un nuevo conocimiento, aceptando válido ejercer su intuición, admitiendo y promoviendo que éste pueda conjeturar ascendentemente, se estará más próximo a lograr que éste descubra la prueba.

La explicación y la argumentación como una forma de construcción conjeturas, por medio de procedimientos heurísticos, permiten la elaboración de enunciados, con no sólo argumentos de sentido común, sino también son argumentos matemáticos. El aprovechar como se hizo el proceso constructivo del enunciado auxilia en la exploración y búsqueda de las vías de la demostración. Podría ser que bastara con que los alumnos pudieran encadenar las propiedades geométricas aunque carecieran de un estricto rigor lógico. No es conveniente en la escuela secundaria mantener una conceptualización de la demostración a la manera de cómo lo hacen los matemáticos.

Como afirmamos antes, es necesario que en la comunidad de educadores matemáticos se convenga en una reconceptualización que de significado a la demostración en contexto escolar, con características como las arriba citadas, y que esta convención pueda incorporarse al sistema educativo. Lo cual coadyuvaría a mejorar la competencia de los estudiantes en cuanto a la formulación, argumentación y demostración matemática.

Referencias Bibliográficas

Alsina, C., Fortuny, J. y Pérez, R. (1997). Pensar geométricamente., en *¿Por qué geometría?* (pp.37-70), Síntesis. Madrid.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les éleves de collége. Thése d´etat.* Université Joseph Fuourier, France.

Boero, P. (1999). Argumentación y Demostración. Una relación compleja, productiva e inevitable en las Matemáticas y la Educación Matemática. En *Preuve.*[En línea] Disponible en: http://www.lettredelapreuve.lt/Newsletter/990708Theme/990708ThemeES.html.

Crespo, C. (2003). *Las demostraciones como contenido matemático.* En CIMATE-UAG (Ed.). Memorias de la VII Escuela de Invierno y VII Seminario Nacional en Didáctica de las Matemáticas. (pp. 144-145), Chilpancingo, Gro.

Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del currículo. *Matemáticas y Educación.* (pp. 125-133). Graó, Barcelona.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* Iberoamerica.México.

Flores, C. & Toledo, E. (2001). *La Geometría En Un Taller Para Profesores de Educación Primaria* .PRONAP, SEP. , México.

Kline, M. (1976). *El fracaso de la Matemática Moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* Siglo XXI España

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutation. The Logic of Mathematical Discovery. C*ambridge University Press.

Larios, V. (2003). Si no demuestro… ¿enseño matemáticas? *Revista de Educación Matemática.* Vol. 15, Num. 2, Agosto del 2003. (pp. 163-176). Santillana XXI. México.

Lerman, S. (1987). *Investigations, where to now? Or problem-posing and the nature of mathematics*. University of Exter.

Mariotti, A. (1998). La intuición en la Prueba: reflexiones sobre los aportes de Fishbein. En *Preuve*. [En línea] Disponible En:http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/981112Theme/981112ThemeES.html

NCTM. (1993). *Curriculum y Evaluation. Standarts for School Mathematics*. USA

Slisko, J. (2003). Los conocimientos y destrezas para la vida según el proyecto PISA: ¿Cuáles son sus implicaciones para la enseñanza de las matemáticas y ciencias naturales? Curso corto. En CIMATE-UAG (Ed.) *VII Escuela de Invierno y VII Seminario Nacional en Didáctica de las Matemáticas*. (pp. 171), Chilpancingo, Gro.