Algunas Dificultades en la Conversión Gráfico-Algebraica de Situaciones de Vectores

José Luis Soto
Universidad de Sonora
México
jlsoto@gauss.mat.uson.mx
Visualización — Nivel Superior

Resumen

El presente trabajo es un reporte parcial de un estudio realizado con estudiantes universitarios, para la detección de algunas dificultades de aprendizaje relacionadas con los *conceptos básicos* de la teoría de espacios vectoriales. Los resultados obtenidos son analizados en el marco de la teoría de registros de representación semiótica de R. Duval y provienen principalmente de dos entrevistas realizadas con estudiantes y de la observación de sesiones de enseñanza realizadas en un ambiente computacional.

Introducción

Las investigaciones realizadas en educación matemática (Dubinsky, 1997; Harel, 1997, 1998; Hillel, & Sierpinska, 1994; Pavlopoulou, 1994; Sierpinska, Dreyfus & Hillel, 1999; Trigueros & Oktaç 2003; Ulhig, 2003) han puesto de relieve las dificultades que encuentran los estudiantes para construir y utilizar los conceptos de combinación lineal, dependencia e independencia lineal, generación, base y dimensión, denotados también bajo el nombre genérico de *conceptos básicos* de la teoría de espacios vectoriales.

En el estudio reportado aquí nos hemos propuesto dar respuesta a las dos preguntas de investigación siguientes:

1. ¿Cuáles son las dificultades que enfrentan los estudiantes cuando resuelven problemas relacionados con situaciones de vectores en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$?
2. ¿Cuáles de estas dificultades están relacionadas con la conversión de representaciones gráficas en algebraicas y viceversa?

Consideraciones Teóricas.

El presente trabajo tiene como referencia una de las teorías de la representación en matemáticas, a saber aquella sobre registros de representación semiótica formulada por R. Duval. Esta teoría ha resultado apropiada para la investigación en el campo de la educación matemática, porque establece con claridad los vínculos entre el funcionamiento cognitivo y los sistemas semióticos de representación; no se conciben de manera aislada, sino como elementos de sistemas de representación que tienen su propia estructura interna, sus propias limitaciones de funcionamiento y de significado, que pueden ser caracterizadas en función de las actividades cognitivas que permiten desarrollar (Duval, 1998, pp. 177-178):

"Para que un sistema semiótico sea un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis:

- La *formación* de una representación identificable como una representación de un registro dado.
- El *tratamiento* de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ésta ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro...
- La *conversión* de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial..."

De estas tres actividades, la más importante para el aprendizaje es la *conversión* porque está directamente relacionada con las dificultades ligadas a la distinción que debe hacerse entre un objeto y su representación.

En $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ que son los espacios vectoriales que nos interesan, podemos ver la naturaleza distinta que tienen las actividades cognitivas señaladas antes y sus implicaciones para el aprendizaje. Un estudiante que produce, por ejemplo, la representación $a\mathbf{v}+b=\mathbf{0}$ en el registro algebraico de vectores, donde a, $b\in\mathbf{R}$ y $\mathbf{v}$, $\mathbf{0}\in\mathbf{R}^2$; denota que no tiene claras las reglas de formación en este registro. Se trata evidentemente de una representación que ha sido mal *formada* puesto que una regla básica de formación aquí es que el signo de suma tiene sentido solamente cuando se escribe entre dos signos que denotan vectores.

Los *tratamientos* en este mismo registro se reducen a sumar vectores y a multiplicar vectores por escalares, estas operaciones están sujetas a ciertas reglas que rigen los tratamientos. Estas reglas permiten, por ejemplo, transformar una expresión como $a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+\ldots+a_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$ $(a_1 \neq 0)$ en otra, pero una expresión como "$a_1=(+\ a_2\mathbf{v}_2+\ldots+a_n\mathbf{v}_n)/\mathbf{v}_1$" (Harel, 1998, p. 497) puede obtenerse de aquí sólo a costa de violar estas reglas.

Un problema tan simple como el de expresar un vector $\mathbf{w}\in\mathbf{R}^2$ como combinación lineal de otros dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, puede mostrarnos la diversidad de registros que pueden involucrarse y las complejidades de la conversión en álgebra lineal. En la Figura 1, se muestran los dos registros algebraicos y los dos registros gráficos que pueden movilizarse en la discusión de este problema.

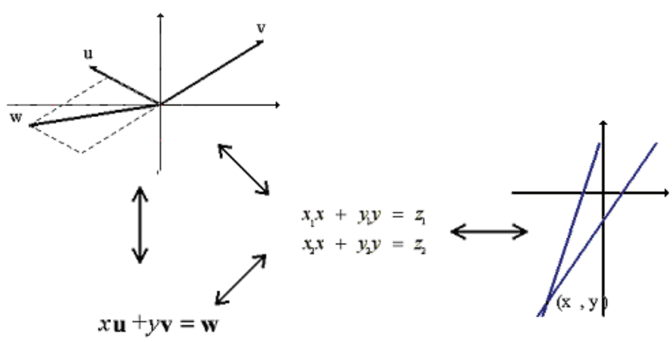


Figura 1

En el presente trabajo, sin embargo nos centramos en la representación de las operaciones de suma y multiplicación por un escalar, donde estas operaciones son representadas gráficamente como lo muestra la Figura 2.

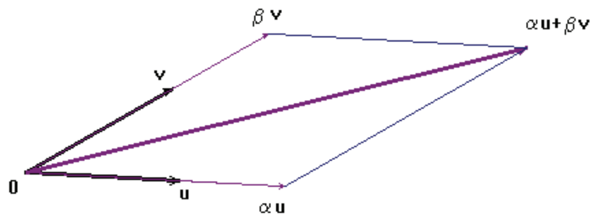


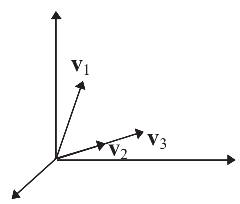
Figura 2

Metodología

Las dificultades han sido observadas y estudiadas en dos ambientes distintos:

1. En sesiones individuales de trabajo con dos estudiantes, mientras intentaban resolver a lápiz y papel una serie de catorce problemas sobre situaciones de vectores. Las sesiones han sido grabadas en video y posteriormente analizadas. Durante las sesiones cada estudiante ha interactuado con un profesor-entrevistador, quien ha tratado de identificar las dificultades y profundizar en ellas. Para dar una idea del tipo de problemas que conformaban esta serie, en la Figura 3 mostramos uno de ellos:

4. Sean $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ los vectores de $\mathbf{R}^3$ que aparecen en la gráfica siguiente:



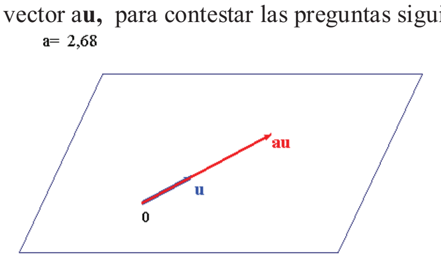
¿Son $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ linealmente dependientes o linealmente independientes?
Justifique su respuesta.

Figura 3

2. En sesiones de enseñanza realizadas con un grupo escolar de 36 estudiantes, en un ambiente computacional diseñado con el software de geometría interactiva Cabri Géomètre II (Bellemain & Laborde, 1995). Aquí los estudiantes han

realizado una serie de 17 actividades utilizando representaciones dinámicas manipulables directamente en la pantalla de una computadora y construidas previamente por el profesor. Las actividades pretenden poner en juego los conceptos básicos, pero se incluyen entre ellas algunas sobre los conceptos de valor y vector propio. Durante las sesiones han contado con instrucciones escritas para cada actividad y las han realizado en pareja interactuando con la computadora. El papel del profesor se ha limitado a orientar el trabajo de los estudiantes y observar las dificultades. Un fragmento de una de las primeras actividades se muestra en la Figura 4.

Actividad 1b. Abra el archivo vector1.fig. En pantalla aparecerá una gráfica similar a la que se muestra en la Figura 1. El valor de "a" que aparece en pantalla puede hacerse variar después de hacer un doble "clic" sobre él. Hágalo variar y observe el efecto de esta variación sobre el vector a**u**, para contestar las preguntas siguientes:



a) ¿Cómo es el vector a**u** con respecto al vector **u**, cuando el número "a" toma valores entre 0 y 1?
b) …

Figura 4

Conclusiones

Apuntamos aquí algunas conclusiones a las que hemos llegado en este estudio, en algunas de ellas se hace referencia a los estudiantes entrevistados como E1 y E2. Una descripción más completa de los resultados y conclusiones de este estudio puede verse en (Soto, J-L., 2003).

- Cuando se trabaja con espacios vectoriales euclidianos en dos y tres dimensiones, el concepto de dependencia lineal está íntimamente relacionado con la colinealidad y coplanaridad de vectores. A este respecto pudimos observar dificultades a dos niveles.
- En primer lugar aquellas relacionadas con la identificación de conjuntos de vectores colineales o coplanares en el registro gráfico, sin lo cual la conversión al registro algebraico es imposible. En el caso de la colinealidad, atribuimos estas dificultades a la falta de discriminación de las variables visuales en las representaciones gráficas con las que se ha trabajado, esta ausencia ha sido particularmente notoria en la identificación de la colinealidad de los vectores $\mathbf{v}$ y $a\mathbf{v}$ cuando $a<0$. En el caso de la coplanaridad, las dificultades están más relacionadas con las limitaciones del registro gráfico, que hacen imposible distinguir conjuntos de vectores coplanares de los no coplanares.

Particularmente en las actividades de enseñanza en las que tenían que localizar, a partir de la manipulación de la gráfica, los valores y vectores propios de una matriz de tamaño dos por dos, los estudiantes no han tenido dificultades en encontrar los dos vectores propios que corresponden a los dos valores propios positivos, pero cuando alguno de los valores propios era negativo, la existencia de vectores propios ha pasado con frecuencia desapercibida para ellos. A veces se ha llegado a la conclusión de que la matriz no tiene vectores propios, porque no tiene valores propios positivos.

- En segundo lugar, la colinealidad y la coplanaridad son condiciones necesarias pero no suficientes para que un conjunto de vectores sean linealmente dependientes, sin embargo hemos observado que los estudiantes han tomado como linealmente independientes algunos conjuntos de vectores donde existen parejas no colineales, en el caso del plano, e igualmente lo han hecho cuando tienen conjuntos de vectores en donde hay ternas no coplanares, en el caso del espacio.
- La imposibilidad de representar el vector cero en el registro gráfico es una limitación inherente a este registro. Esto trae como consecuencia un problema severo de no congruencia entre las representaciones gráfica y algebraica de una situación de vectores. En $\mathbf{R}^3$, por ejemplo, la representación gráfica de los conjuntos $\{\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ no pueden distinguirse una de la otra, de manera que una vez convertidos del registro algebraico al gráfico, el regreso hacia el registro algebraico ya no es posible. Al respecto de este fenómeno de no congruencia, Duval (1998, p. 51) ha señalado "La dificultad de la conversión de una representación depende del grado de no congruencia entre la representación de salida y la representación de llegada".

Los efectos de esta limitante han quedado de manifiesto en los intentos por traducir las nociones de dependencia e independencia lineal del registro gráfico al algebraico y viceversa, porque el vector cero es una referencia obligada para estas nociones. Por ejemplo, cuando E1 está resolviendo uno de los problemas, ofrece como explicación que la dependencia lineal del conjunto de vectores $\{\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ se debe a que el vector $\mathbf{0}$ obliga a los otros dos a ser colineales.

Por otra parte, durante las actividades de enseñanza que se referían a transformaciones lineales, en virtud de que las matrices han sido escogidas libremente por los estudiantes, cuando se han encontrado con matrices que tienen un valor propio igual a cero, han concluido que la matriz tiene un solo vector propio, a saber el que se corresponde con el valor propio distinto de cero.

- Para que una representación proporcione el acceso al objeto representado, según Duval (1998, pp. 176-177) "es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de sus posibles representaciones".

Es evidente a lo largo de las entrevistas que cada vez que se solicita representar una base, los estudiantes recurren a la base canónica de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, posiblemente debido al uso reiterado de ellas en su curso de álgebra lineal y posiblemente debido a ello han llegado a confundir la noción de base, por ejemplo, con una situación de vectores ortonormales. La confusión incluso hace que E2 asocie la noción de base con características que no son definitorias de este concepto y están relacionadas más bien con la norma euclidiana de $\mathbf{R}^3$. En uno de los problemas, cuando E2 trata de justificar porqué el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\}$ no es una base para $\mathbf{R}^3$, afirma que no lo es, porque para que lo fuera, él pediría que los vectores del conjunto fueran linealmente independientes y además "que fueran unitarios". Los estudiantes confunden pues el concepto de base con una de sus representaciones más conocidas que es la representación de una base canónica.

Todavía más, los estudiantes han exhibido durante las entrevistas que la generación no es un requisito exigido a un conjunto de vectores para ser una base, sino una característica que solamente las bases poseen. En uno de los problemas, a pesar de que E1 ha enunciado la definición de base con bastante precisión, la confunde con la de conjunto generador de $\mathbf{R}^2$; después de proponer los vectores $\mathbf{v}_1=(1,0)$, $\mathbf{v}_2=(0,1)$ como un conjunto generador de $\mathbf{R}^2$, el profesor le propone agregar un tercer vector (-1, 1) al conjunto y le pregunta si el nuevo conjunto también genera a $\mathbf{R}^2$. La estudiante considera que el nuevo conjunto ya no genera a $\mathbf{R}^2$.

- En el manejo de los conceptos de dependencia e independencia lineal aparecen dificultades vinculadas con la lógica, en particular con la escritura (simbólica) de la lógica Cuando un conjunto de *n* vectores es LD, se tiene directamente de la definición, que estos vectores satisfacen la ecuación:

$$a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+...+a_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0},$$

donde por lo menos algún a_i es diferente de cero. Esta ecuación puede usarse para verificar que un conjunto de vectores es LD; o a la inversa, si un conjunto de vectores es LD, se sabe que satisfacen esta ecuación para algún a_i es diferente de cero y de nuevo la ecuación puede manipularse para establecer alguna relación útil entre los vectores del conjunto. A pesar de que las definiciones tanto de dependencia como de independencia lineal se valen de la representación $a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+...+a_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$, el papel que esta ecuación juega en cada una de ellas, es muy distinta.

Las entrevistas muestran, que esta reducción de la definición de dependencia lineal a ciertas condiciones bajo las cuales se satisface la ecuación $a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+...+a_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$, se convierte en un obstáculo cuando se trata de utilizar la definición de independencia lineal, porque la ecuación $a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+...+a_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$ juega en esta definición solamente el papel de hipótesis en la condicional $a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+...+a_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0} \rightarrow a_1=a_2=...=a_n=0$. Este obstáculo pareciera originarse en el éxito obtenido con la manipulación algebraica de la ecuación $a_1\mathbf{v}_1+a_2\mathbf{v}_2+...+a_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}$ cuando se abordan problemas de dependencia lineal y sus causas mas profundas podrían residir en la estructura lógica que subyace a las definiciones, y en las dificultades para negar proposiciones formuladas en términos de cuantificadores.

Es posible entonces que la articulación entre los registros gráfico y algebraico, resulte insuficiente como herramienta teórica para explicar esta dificultad porque en el fondo la dificultad parece más ligada a la naturaleza y los tratamientos del sistema matemático de signos de la lógica.

Referencias Bibliográficas

Bellemain, F. y Laborde, J. M. (1995). *Cabri Géomètre II*. Dallas, Tex.: Texas Instruments, Software.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. In D. Carlson et al (Eds.), *Resources for teaching linear algebra*, MAA Notes, 42, 85-106.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Harel, G. (1997). Moving beyond concept definition. *Resources for teaching linear algebra MAA Notes,* 42, (pp. 107-126).

Harel, G. (1998). Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (Or vice versa). *The American Mathematical Monthly*, 105, (pp. 497-507).

Hillel, J. y Sierpinska, A. (1994). On one persistent mistake in linear algebra. *Proceedings of the 18th annual meeting of International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (3), (pp. 65-72).

Pavlopoulou, K. (1994). *Propédeutique de l`algèbre linèaire: la coordination des registres de représentation sémiotique*, Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur (Strasbourg 1); prépublication de l`Institut de Recherche Mathématique Avancée. France.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. y Hillel, J. (1999). Evaluation of the teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 7-40.

Soto, J-L. (2003). *Un estudio sobre las dificultades para la conversión gráfico-algebraica, relacionadas con los conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales*. Tesis de Doctorado, no publicada. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN, México.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2003). La Théorie APOS et l`Enseignement de l`Algebre Linéaire. En prensa.

Ulhig, F. (2003). A new unified, balanced, and conceptual approach to teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications* 361, (pp. 147-159).