

Razonamiento Probabilístico en Estudiantes del Nivel Superior

Manuel Alfredo Urrea

Universidad de Sonora

México

maurr@gauss.mat.uson.mx

Probabilidad, estadística y combinatoria — Nivel Superior

Resumen

El propósito de este trabajo es identificar y analizar algunas de las estrategias y desviaciones presentes en el razonamiento probabilístico de un grupo de estudiantes universitarios, al abordar cierto tipo de situaciones en las que se requiere usar ideas básicas relacionadas con el concepto de probabilidad.

Para identificar y analizar dichas estrategias se aplicó un cuestionario por escrito a los estudiantes, para el análisis de los argumentos que presentaron se tomaron en cuenta tres aspectos: el curricular, el psicológico-cognitivo y el relacionado con el desarrollo de las nociones de probabilidad y aleatoriedad desde la perspectiva de la disciplina. A partir de este análisis se pudo observar que destaca la presencia del sesgo de equiprobabilidad, el sesgo del enfoque del resultado aislado y la heurística de representatividad.

Consideraciones preliminares

Incidir en el aprendizaje de la probabilidad y de ideas básicas relacionadas, desde nuestro punto de vista, implica conocer la forma en que evolucionan los estudiantes en este campo de conocimiento. La existencia de una composición de intuiciones y desviaciones que muestran los estudiantes al enfrentar situaciones probabilísticas, plantea enfáticamente la necesidad de contar con un conocimiento de las características con que se presentan, esta posición define la orientación del trabajo.

Inicialmente este trabajo surge de la problemática que como profesor, de los cursos donde está presente el contenido de probabilidad, he observado, particularmente al trabajar con estudiantes del nivel superior. Así, en un primer momento, la intención fue trabajar en una propuesta didáctica que aportara situaciones en las que se enriquecieran las concepciones de los estudiantes sobre el concepto de probabilidad y las ideas básicas relacionadas.

Hacer este trabajo implicaba la necesidad de tener algún conocimiento de las intuiciones y desviaciones que muestran los estudiantes en su razonamiento al enfrentarse a cierto tipo de situaciones probabilísticas. Fue en la búsqueda de estas condiciones iniciales, que el trabajo se enfocó hacia la problemática de indagar sobre algunas de las desviaciones presentes en el razonamiento de los estudiantes al analizar, interpretar y resolver cierto tipo de situaciones probabilísticas.

Problema de investigación

Esta investigación se enmarca dentro de la problemática de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular en la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad, y forma parte de

un proyecto más general: “Caracterización de dificultades, obstáculos y comprensiones que se presentan a la educación en ideas básicas de probabilidad y estadística en los niveles medio superior y superior”¹.

Concretamente el trabajo se centra en lo relativo al tipo de razonamiento que muestran los estudiantes al enfrentar cierto tipo de situaciones probabilísticas. Hay indicios de que la comprensión del concepto de probabilidad y de las ideas básicas, relacionadas con ésta, enfrentan la interferencia de varias dificultades para que los estudiantes puedan llevar a cabo un razonamiento acorde a lo establecido por la disciplina, estas dificultades se manifiestan en los estudiantes por medio de diferentes sesgos.

Lo anterior fue uno de los motores que motivó la orientación de este trabajo, por lo que el objetivo central que se presenta es: estudiar la problemática en torno a la comprensión del concepto de probabilidad en estudiantes del nivel superior, desde la perspectiva del tipo de razonamiento que muestran al poner en juego las ideas básicas indispensables para analizar, interpretar y resolver cierto tipo de situaciones probabilísticas.

Si el estudiante pone en juego de manera correcta sus concepciones respecto a las ideas básicas relacionadas con el concepto de probabilidad, diremos que da muestra de un razonamiento normativo, en caso contrario, se espera que aparezcan elementos que nos permitan identificar heurísticas y sesgos.

Esta problemática ya ha sido estudiada en diferentes momentos y contextos, se tienen los trabajos de M. Borovnick , H. J. Bentz y R. Kapadia (1991) quienes señalan al espacio muestra y a la independencia como una fuente de dificultades que se representan en el desarrollo de la disciplina misma; D. Kahneman y A. Tversky (1982) quienes han reportado la heurística de representatividad y algunos de los sesgos asociados; M.P. Lecoutre (1985,1992) quien ha reportado trabajo relacionado con la presencia del sesgo de equiprobabilidad; Konold (1991) quien ha estudiado la presencia del sesgo del enfoque en el resultado aislado; algunas de estas investigaciones se han realizado fuera del contexto escolar. Por último, tenemos los trabajos de Serrano, Batanero, Ortiz y Cañizares (1998) quienes han investigado la presencia de la heurística de representatividad, el sesgo de equiprobabilidad y el sesgo del enfoque en el resultado aislado, dichos trabajos se centran en la presencia de estos sesgos de manera conjunta en estudiantes de secundaria.

Con estos antecedentes es que en este trabajo se ha definido el siguiente problema de investigación:

Identificar y analizar algunas heurísticas y sesgos presentes en el razonamiento que hacen estudiantes del nivel superior al analizar, interpretar y resolver cierto tipo de situaciones probabilísticas en las que se requiere utilizar las ideas básicas del concepto de probabilidad.

Para los fines de este trabajo, diremos que una heurística son las estrategias que utiliza el sujeto para enfrentar cierta situación a partir de algún conocimiento que tiene de ella, el cual puede ser incorrecto, incompleto o correcto. Un problema en la aplicación de dicho conocimiento, es que puede resultar insuficiente o no pertinente en ciertas situaciones, lo que

¹ Con apoyo del Sistema de Investigación del Mar de Cortés, clave 990103023.

lo puede llevar a razonamientos correctos o no. Mientras que los sesgos siempre son razonamientos incorrectos, desviaciones de un razonamiento establecido como correcto en el contexto de una teoría o disciplina.

Consideraciones teóricas

Aspecto curricular

Al enfocar este trabajo a estudiantes universitarios, nos dimos a la tarea de analizar los programas de materia de los cursos en los que se contemplan los contenidos de probabilidad y que son impartidos a los alumnos objetos de estudio. Tratándose del campo de la Probabilidad, se asume como marco de referencia inicial y apropiado el planteamiento de D. Heitele (1975), quien concibe a las ideas fundamentales como aquellas que funcionan como modelos explicativos para los individuos en cada etapa de su desarrollo en cierto campo del conocimiento.

Desde esta óptica se prevé la construcción de una visión de conjunto de los conceptos de acuerdo a la herramienta disponible, el grado de maduración de las ideas fundamentales parte desde un plano intuitivo. El tránsito de este proceso a etapas posteriores implica la identificación de nuevas propiedades de los conceptos, cuya interrelación a su vez empuja la maduración de las ideas fundamentales hacia un plano formal, propiciando con esto la posibilidad de que futuros acercamientos a los conceptos permitan tener concepciones más elaboradas o completas.

Aspecto psicológico cognitivo

Para tratar de ubicar el estado de desarrollo cognitivo de los estudiantes que participaron en este trabajo, en lo relativo al azar y la probabilidad, se consideró pertinente recurrir al planteamiento que hace J. Piaget e B. Inhelder (1975), quienes señalan la existencia de tres etapas en el desarrollo cognitivo del niño:

La senso-motriz, que va de los cero a dos años, en ésta el niño desarrolla habilidades motrices respondiendo a los estímulos que le proporciona el medio ambiente.

La de operaciones concretas, va de los dos a once años, en este periodo podemos ubicar dos subetapas:

La preoperacional, de los dos a siete años, en la que los niños no ven diferencia entre lo que es deducible y lo que no lo es, debido a que la anticipación intuitiva permanece a medio camino entre operación y azar. En lo que respecta a la noción de probabilidad se señala que en esta etapa el niño no puede hacer estimaciones correctas de las posibilidades a favor y en contra de los eventos aleatorios, y argumentan que esto se debe a que todavía no cuenta con los elementos necesarios como son: la habilidad para distinguir entre el azar y lo deducible, el concepto de proporción y el razonamiento combinatorio.

La de las operaciones concretas, que va de siete a once años, en esta etapa empiezan a distinguir la diferencia entre azar y operaciones, estas últimas determinando el dominio de lo deducible, mientras que el azar define por tanto el dominio de lo incomprensible e irreversible, esto es lo impredecible.

La de las operaciones formales, que va de los 11 a los 15 años, en esta etapa ya está en condiciones de acceder a la idea de proporción y a las operaciones combinatorias, esto le permitiría, al menos, cuantificar tanto el número de posibilidades para el resultado de un experimento aleatorio como el número de posibilidades de los casos favorables, a partir de lo cual estará en posición de hacer el cálculo de ciertas probabilidades.

En esta dirección se tienen también los trabajos de E. Fischbein (1975), en los que se señalan algunos elementos que pudieran enriquecer algunos aspectos relativos a las conclusiones obtenidas previamente. Por ejemplo, concluye que los niños antes de los siete años, sí tienen nociones e intuiciones sobre ideas de azar, lo cual se manifiesta en las decisiones que toman al participar en juegos de azar: en muchos juegos sencillos los niños seleccionan de manera sistemática las respuestas más probables.

En los trabajos de Fischbein se le concede importancia central a las intuiciones como acercamientos a los objetos físicos o matemáticos, pero también como medios a través de los cuales el individuo forma sus nuevas concepciones. Así se concibe que las intuiciones juegan un papel preponderante a lo largo del desarrollo cognitivo del individuo, que éstas se generan gracias a la experiencia adquirida al interactuar con el medio y que evolucionan ante nuevas experiencias. Sin embargo, las nuevas intuiciones que forma el individuo, dependiendo de las condiciones en las que se da la experiencia o del contexto en el que se presente, pueden resultar correctas o no, o incluso pueden estropearse en su evolución.

Desde esta perspectiva se tiene que la instrucción es un factor fundamental para el desarrollo de dichas intuiciones, por lo que ésta debe planear, diseñar e implementar acciones que permitan a los niños tener las experiencias adecuadas para apoyar el desarrollo de intuiciones correctas, corregir las que son incorrectas, evitar su deterioro y apoyar la evolución de las intuiciones correctas que ya tiene desarrolladas. Esto es, sin una instrucción adecuada, no es posible explotar el potencial que tienen los niños en sus diferentes etapas, es decir, a pesar de que el sujeto esté en condiciones de llegar a un aprendizaje que le permita analizar, interpretar y resolver cierto tipo de situaciones probabilísticas, requiere de una instrucción adecuada para lograrlo.

Desarrollo de las nociones de Probabilidad y Aleatoriedad

La evolución de los conceptos de aleatoriedad, azar y probabilidad ha pasado por etapas difíciles, entre otras cosas motivado por la manera de ver e interpretar el mundo y los fenómenos que en él ocurren. Concretamente, la evolución de las visiones y consideraciones acerca del azar y la probabilidad, en particular las diferentes formas en que han sido definidos. A lo largo de su desarrollo dichas nociones han sido interpretadas de diferente forma: subjetiva y objetivamente. En el primer caso se caracteriza a las situaciones aleatorias como aquellas que están determinadas por la ignorancia o desconocimiento de los factores que en ellas influyen.

En el caso de la visión objetiva se caracteriza las situaciones aleatorias como aquellas que ocurren debido a una coincidencia impredecible de causas propias de la situación.

Heurísticas y sesgos

Las heurísticas y sesgos que se pretenden identificar en los sujetos que participan en esta investigación son:

Sesgo de equiprobabilidad, se manifiesta cuando se señala que todos los eventos asociados a un experimento aleatorio son equiprobables.

Sesgo del enfoque en el resultado aislado, este tipo de sesgos está presente cuando los sujetos interpretan y responden a una pregunta de probabilidad como si fuera no probabilística.

Heurística de representatividad, consiste en una tendencia a considerar que un evento o una observación de un experimento aleatorio tiene mayores posibilidades de ocurrir si es más parecido a la población de la que procede o éste reproduce algunas características esenciales del proceso que genera la información. Este tipo de heurística produce varios tipos de sesgo, los que analizaremos en este trabajo son dos:

Sesgo de la insensibilidad al tamaño de la muestra, el cual se presenta cuando el juicio de representatividad sobreestima el poder de decisión proporcionado por la información contenida en una muestra, omitiendo información relevante que proporciona el tamaño de ésta.

Sesgo de concepciones erróneas en las secuencias aleatorias, se presenta cuando se espera que una parte, aunque sea muy corta, del proceso aleatorio, lo representa fielmente sin tomar en cuenta que algunas de sus características son observables a la larga.

Metodología

Para este trabajo se seleccionaron 180 estudiantes de la Universidad de Sonora, 60 de cada una de las siguientes carreras: Licenciatura en Ciencias de la Comunicación, Licenciatura en Contabilidad e Ingeniería Civil, en cada caso seleccionamos 30 estudiantes de primer semestre sin instrucción en probabilidad en este nivel educativo y 30 de semestres que ya tuvieron instrucción en probabilidad.

Conociendo las características de los sujetos de estudio, se consideró pertinente una revisión de los planes y programas de estudio de los niveles medio superior y superior, con la intención de conocer los antecedentes académicos que tienen los estudiantes.

Para indagar acerca del tipo de razonamiento que ponen en juego estos estudiantes al enfrentar situaciones probabilísticas, se diseñó un cuestionario. Para la integración del cuestionario, que constituye el instrumento a través del cual realizamos nuestra exploración, se seleccionaron, rediseñaron y diseñaron problemas o reactivos. El cuestionario que se aplicó a los estudiantes consta de ocho reactivos, los primeros siete son retomados de los reactivos que utilizaron en su investigación Serrano y colaboradores (1998), algunos de los cuales sufrieron pequeñas

modificaciones basadas en nuestra observación al aplicarlos en nuestro medio; los primeros siete problemas son de opción múltiple, pero siempre se les pidió que argumentaran por qué seleccionaban tal opción. El problema ocho, a diferencia de los primeros siete, era abierto, por lo que el estudiante tenía más libertad de proponer la respuesta que considerara correcta.

Como nuestro interés es determinar el tipo de razonamiento que utiliza el estudiante al enfrentar estas ocho situaciones, dicho razonamiento puede ser normativo o puede ser sesgado. Para cada uno de los problemas del cuestionario se estableció el objetivo que persigue, así como una caracterización según tipo de argumento que el estudiante dio. La caracterización de los argumentos ya se ha dado en trabajos previos, pero fueron complementados con algunas observaciones que se realizaron al poner a prueba los reactivos en una comunidad estudiantil del nivel medio superior.

Problema No. 1 ¿Cuál de las siguientes sucesiones es más probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada cinco veces? a) AAASS b) SAASA c) SASSS
d) ASASA e) Las cuatro sucesiones son igualmente probables.

¿Por qué has dado esta respuesta?

En la investigación de Serrano y colaboradores (1998) el objetivo de este problema es identificar la heurística de representatividad al utilizar concepciones erróneas sobre secuencias aleatorias, así como el enfoque en el resultado aislado. Pero cuando se aplicó en nuestro medio en los estudiantes del nivel medio superior, en la prueba de pilotaje, se vio que también es posible identificar el sesgo de equiprobabilidad, el cual está presente en aproximadamente el 26% de los estudiantes que participaron en este estudio.

Para el problema No. 1, mostraremos dos ejemplos del tipo de argumento (1 y 3) que se puede encontrar en las respuestas que dan los estudiantes:

Argumento 1): Debe haber aproximadamente igual número de águilas que de sello o hay la misma probabilidad de águilas y sellos; con este argumento se puede interpretar que los estudiantes ponen de manifiesto que buscan el equilibrio de la secuencia aleatoria, aún cuando éstas son cortas.

Estudiante 1: a), b), d) *“La moneda está equilibrada me imagino que deben caer igual número de águilas y sello pero de diferente manera”*. Este estudiante parte de la búsqueda del equilibrio en la sucesión en cuanto al mismo número de águilas y sellos en la sucesión, lo que podría estar poniendo de manifiesto su comprensión de la equiprobabilidad teórica que tienen los puntos muestrales del experimento de lanzar una vez una moneda equilibrada, pero dejando de lado un aspecto que en este tipo de situaciones está presente, la independencia de cada lanzamiento respecto a los demás y el espacio muestra del experimento aleatorio compuesto. En este caso particular, el estudiante está poniendo en juego la heurística de representatividad, en términos de la idea que se tiene de lo que es una sucesión aleatoria, en cuyo caso la característica que asocia a este tipo de situaciones es el equilibrio que se debe mantener en la cantidad de águilas o sellos que aparecen en la sucesión, o a través de mantener una frecuencia relativa parecida a la probabilidad de los elementos en la distribución.

Argumento 3): Es cuestión de suerte puede ocurrir cualquiera de las secuencias; en este tipo de argumento se asume que por el hecho de estar ante una situación aleatoria todas las secuencias posibles son igualmente probables.

Estudiante 2: e) “Como es una situación de azar todas las opciones son igualmente probables”. La interpretación que se hace a esta justificación del estudiante es que está poniendo de manifiesto la presencia del sesgo de equiprobabilidad.

Después de organizar la información obtenida de las respuestas que proporcionaron los estudiantes, para cada uno de los problemas, se realizó este tipo de análisis.

Conclusiones

De la revisión de los programas de materia de los cursos que contemplan el tema de probabilidad, se pudo ver que la estructura que tienen, está orientada a priorizar el desarrollo de la estructura lógico secuencial de la disciplina, más que el desarrollo de las concepciones e intuiciones que el estudiante debe lograr al terminar dichos cursos.

Una proporción muy grande de estudiantes da muestra de desviaciones en su razonamiento respecto a lo que se considera como razonamiento normativo, se pudo ubicar la presencia de los siguientes sesgos: de equiprobabilidad, del enfoque en el resultado aislado, de la insensibilidad al tamaño de la muestra y el de concepciones erróneas de sucesiones aleatorias; estos últimos dos, asociados a la heurística de representatividad.

Lo anterior se presenta a pesar de que los estudiantes ya han rebasado la edad que Piaget propone para los sujetos que están en la tercera etapa. Por otra parte, no se ve diferencia entre el tipo de argumento que utilizan los estudiantes que ya recibieron instrucción del tema respecto a los que no la han tenido. Por lo que es probable, que el tipo de instrucción que han recibido, no esté diseñada para proporcionar a los estudiantes experiencias que les permitan enriquecer sus intuiciones y, por ende, sus concepciones respecto a las ideas básicas relacionadas con el concepto de probabilidad.

Referencias Bibliográficas

- Borovcnik, M. y Kapadia R. (1991), *Chance Encounters: Probability in Education*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Fischbein, E. (1975), *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Dordrecht, Netherlands: Reidel Publishing Company.
- Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, No. 6, 187 - 205.
- Kahneman, D. y Slovic, D. y Tversky, A. (1982), *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge University Press.
- Konold, C.: (1991), Understanding students' beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Lecoutre, M.P. (1992), Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.
- Piaget, J. y Inhelder, B. (1975), *The Origin of the Idea of Chance in Children*. New York, USA: Norton.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. y Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y Sesgos en el Razonamiento Probabilístico de los Estudiantes de Secundaria, *Educación Matemática*, 10 (1), 7 - 25.