

ANÁLISIS COGNITIVO EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Jose Luis Lupiáñez, Luis Rico

Dpto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

RESUMEN: *Describimos un procedimiento denominado análisis cognitivo que forma parte de otro más amplio: el análisis didáctico, el cual describe el modo en el que el profesor debiera diseñar, implementar y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se presenta una caracterización del análisis cognitivo poniendo especial interés en sus fundamentos, en las herramientas teóricas y conceptuales que lo estructuran, y se ejemplifica una de esas herramientas, la descripción de competencias, en el caso de la función cuadrática.*

INTRODUCCIÓN

La asignatura *Didáctica de la Matemática en el Bachillerato* de la Universidad de Granada, tiene por finalidad la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria en dos dimensiones: primera, su participación en las prácticas de la comunidad de educadores matemáticos y, segunda, el desarrollo de los conocimientos y capacidades necesarias para la planificación de unidades didácticas.

La segunda dimensión se centra en que los futuros profesores conceptualicen y dominen una serie de procedimientos para diseñar, llevar a la práctica y evaluar una unidad didáctica sobre un tema matemático. El análisis cognitivo es uno de los procedimientos que contribuyen al *análisis didáctico* (Gómez, 2002).

La fundamentación y organización del análisis cognitivo que aquí se describe contribuye al desarrollo conceptual del análisis didáctico, pone de manifiesto los vínculos entre los elementos que lo constituyen, y refuerza su estructura cíclica.

En este documento nos centramos en describir el análisis cognitivo y sus elementos, basándonos en la reflexión que, desde una perspectiva de aprendizaje, debe hacer el profesor de matemáticas de secundaria a la hora de planificar su enseñanza. Ponemos especial énfasis en la descripción que el profesor debe realizar sobre las competencias que desea desarrollar en sus escolares mediante un tema matemático concreto.

EL ANÁLISIS DIDÁCTICO

El análisis didáctico es un procedimiento cíclico en el que el profesor ha de movilizar y poner en juego su conocimiento didáctico para diseñar, implementar y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje. Este análisis se sustenta a su vez en una serie de tareas, que pueden agruparse en cuatro categorías y que ponen su énfasis en diferentes aspectos. Esos agrupamientos los denominamos análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación. los tres primeros tipos de análisis se llevan a cabo en la fase de planificación:

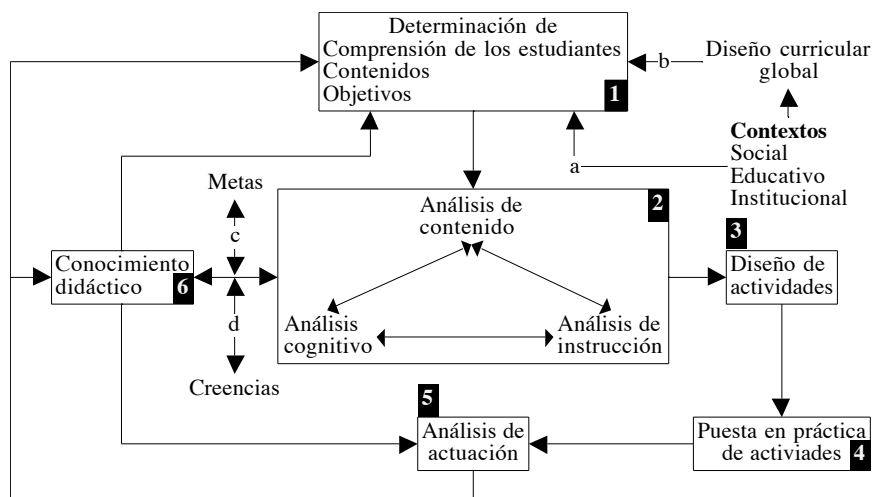


Figura 1. Ciclo del análisis didáctico (Gómez, 2002, p. 258).

Una vez seleccionada la estructura matemática en la que se centrará la unidad didáctica, el nivel educativo en que se va a tratar y el conocimiento del que parten los escolares, mediante el análisis de contenido el profesor analizará con detalle la estructura conceptual de ese tema matemático, señalando los conceptos y procedimientos involucrados y sus relaciones. También deberá describir las diferentes maneras de representar esos conceptos y procedimientos señalando cómo se relacionan los sistemas de representación. Finalmente, identificará familias de fenómenos en diferentes contextos y cómo son modelizados por alguna subestructura de la estructura matemática original. En resumen, todas estas tareas ponen de manifiesto la complejidad de la estructura matemática, los posibles significados que admite, y las relaciones entre ellos.

En el análisis cognitivo, el profesor debe preocuparse de estudiar toda esa complejidad de significados de la estructura matemática desde la perspectiva de que va a ser objeto de aprendizaje por parte de unos escolares y, de ahí, la relación entre ambos análisis. En este caso, el profesor debe describir qué competencias desea que desarrollen sus escolares mediante esa estructura matemática, en qué errores pueden incurrir los escolares y cuáles dificultades de aprendizaje hay detrás de ellos.

En el análisis de instrucción, el profesor con toda la información obtenida en los análisis previos, debe diseñar, seleccionar y organizar actividades de enseñanza y tareas que realizarán sus escolares.

ESTRUCTURA Y ELEMENTOS DEL ANÁLISIS COGNITIVO

El análisis cognitivo, como parte del análisis didáctico, entendemos que es un proceso que llevará a cabo el profesor de matemáticas al planificar su actuación docente. En el análisis cognitivo el profesor estudiará un tópico matemático desde la perspectiva de que va a ser objeto de aprendizaje; se trata de analizarlo a efectos de su comprensión por los escolares de secundaria.

Para llevar a cabo ese análisis el profesor se apoya en la problemática de los procesos de aprendizaje de un estudiante de secundaria, por lo que el profesor deberá asumir una posición respecto a lo que significa aprender.

El análisis cognitivo se organiza y fundamenta según dos componentes, que tienen una marcada trayectoria dentro de la investigación cognitiva. La primera de ellas es relativa a las competencias que deseamos que los estudiantes de secundaria desarrollen en torno a cierto tópico matemático.

El término competencia alude a lo que el profesor desea que sus estudiantes sean capaces de hacer a partir de los contenidos, a cómo pueden movilizar y usar los conocimientos aprendidos. Es un término que adoptamos y que recoge parte del significado de lo que entendemos como objetivo de aprendizaje. Además, este concepto, desde hace algún tiempo, es usado por administraciones y por responsables de proyectos de investigación para describir lo que debiera conseguirse con los programas de formación de todos los niveles. Algunos de ellos son: el Proyecto *PISA* (Mathematics Expert Group, 2001); el Proyecto *Tuning* (González & Wagenaar, 2003), el Proyecto *Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics* (National Research Council, 2001), y la *Red Europea de Información en Educación 'Eurydice'* (Eurydice, 2003), entre otros.

La segunda componente se refiere al estudio de los errores en que los escolares pueden incurrir en la ejecución de tareas relacionadas con ese tópico, y al análisis de las dificultades que subyacen a esos errores y permiten su interpretación. El estudio de las dificultades de aprendizaje y de los errores también son un foco importante de interés en la investigación en educación matemática, pues ayudan a explicar parte de la problemática del aprendizaje (Jiménez, 1999; Radatz, 1980; Rico, 1995; y Socas, 1997).

La consideración de estas dos componentes de análisis se sustenta en nuestra concepción de las tareas de reflexión que, desde la perspectiva del aprendizaje, debe hacer el profesor de matemáticas de secundaria a la hora de planificar su enseñanza.

Esta reflexión debe tener en cuenta e incluir también un detallado análisis de qué conocimiento poseen, cómo lo sostienen y lo comunican, cómo lo representan y qué acciones pueden realizar con él. Resumiendo, el análisis cognitivo debe atender tanto la parte *positiva* del aprendizaje (qué hacen y pueden hacer los escolares), como la *negativa* (en qué errores incurren y a qué se deben).

Por tanto, de la misma manera en que la estructura conceptual, los sistemas de representación, el análisis histórico, el análisis fenomenológico y la modelización constituyen las piezas básicas en las que se fundamenta el análisis de contenido, el análisis cognitivo se sostiene sobre dos ideas u organizadores del currículo (Rico, 1997), que le dan un marco de significado e interpretación: competencias que deben desarrollar los estudiantes, y dificultades y errores en el aprendizaje.

Así, en el análisis cognitivo el profesor, como parte de la reflexión que ha de realizar para planificar su enseñanza, debe analizar, describir y caracterizar:

- qué competencias deben desarrollar los estudiantes de secundaria mediante un tópico;
- en qué grado pueden desarrollarse tales competencias;
- en qué errores pueden incurrir los escolares y qué dificultades subyacen a esos errores,
- cómo relacionar esas dificultades con un desarrollo inadecuado o incompleto de alguna de esas competencias.

DESCRIPCIÓN DE LAS COMPETENCIAS COGNITIVAS

Al hablar de competencias, ponemos nuestro interés en describir qué deberían de poder hacer los escolares en matemáticas, cómo pueden poner en juego el conocimiento matemático que poseen mediante el empleo de una estructura matemática concreta. Definimos por tanto una competencia como la *integración de determinados conocimientos, capacidades y habilidades que conduce a un nivel óptimo de desarrollo y actuación en matemáticas* (Lupiáñez, 2003).

Dependiendo del tipo de actuación considerado, podemos distinguir cuatro tipos de competencias, que ponen su énfasis en diferentes componentes del conocimiento matemático y en la actuación de los escolares de secundaria. Los tipos de competencias contemplados son: competencias **cognitivas genéricas, cognitivas específicas, metacognitivas y actitudinales**.

Las *competencias cognitivas* se refieren a los conocimientos, capacidades y habilidades que debe desarrollar un estudiante para analizar, razonar y comunicar ideas matemáticas, y para llevar a cabo actividades matemáticas. Distinguiremos entre competencias cognitivas *genéricas* y *específicas*.

Las *competencias metacognitivas* se refieren a aquellas estrategias de regulación y control sobre los propios procesos cognitivos, que cobran especial importancia en la resolución de problemas. Las *competencias actitudinales* se centran en las actitudes de los estudiantes hacia la matemática, y pueden ser normativas, formativas y de apreciación hacia la materia.

En el resto del documento, nos centraremos en describir el significado, la estructura y la organización de las competencias cognitivas, tanto genéricas como específicas.

Competencias Cognitivas Genéricas

Tienen que ver con las acciones básicas que se ponen en juego al trabajar en matemáticas. Poseen un ámbito de actuación que van más allá de la especificidad de un tópico matemático, en el sentido de que constituyen objetivos de aprendizaje que, por lo general, no se persiguen sólo con el trabajo sobre un tema matemático concreto. Este conjunto incluye tres competencias que abarcan cuatro aspectos relacionados con la cognición y que tienen especial repercusión en la educación matemática: **Pensamiento Matemático, Justificación y Comunicación**.

Pensamiento Matemático

Se incluyen capacidades que constituyen procedimientos básicos en matemáticas que tienen que ver con el uso que se haga del conocimiento matemático: *ejemplificar, relacionar, y generalizar*. Ejemplificar es presentar un concepto o relación matemática que posee unas propiedades previamente concertadas. Relacionar es una capacidad que tiene que ver con establecer vínculos entre diferentes elementos o propiedades de una estructura matemática. La generalización permite conjeturar propiedades o características de conceptos a partir de observar ciertos casos particulares.

Por tanto, bajo la etiqueta de *pensamiento matemático* consideramos una serie de capacidades tales como que los escolares sean capaces de:

- ejemplificar propiedades o características relevantes de conceptos o relaciones matemáticas,
- presentar un ejemplo específico de un concepto o relación,
- relacionar elementos o propiedades de una estructura matemática, y
- establecer propiedades de conceptos, o incluso conceptos de orden superior, a partir del estudio y observación de casos particulares significativos.

Justificación

Existen formas de justificación que involucran fundamentos, procesos cognitivos y valores epistémicos diferentes entre sí, y diferentes a los de la demostración formal. Estas justificaciones tienen otras funciones además de la de demostrar: argumentar, explicar, descubrir, generalizar, verificar, refutar, sistematizar, etc.

La competencia de *justificación*, por tanto, incluye que los escolares sean capaces de:

- elaborar justificaciones para sus afirmaciones,
- desarrollar paulatinamente justificaciones más sólidas, e
- identificar y validar la bondad de las justificaciones de otros.

Comunicación

La actividad de comunicarse en el aula, de manera verbal o escrita, es el medio por el que se lleva a la práctica la actividad de enseñar. Esta comunicación se produce cuando el profesor explica algún concepto, cuando propone una tarea a sus escolares, cuando los estudiantes comentan algo sobre ese concepto o discuten entre sí acerca de esa tarea, o bien cuando éstos responden al profesor. De toda esa complejidad de interacciones, nos centramos en las relacionadas con la expresión de los escolares y la forma en que se comunican.

Así, esta competencia de *comunicación* incluye que los estudiantes sean capaces de:

- expresarse de diferentes formas, sobre un contenido matemático,
- expresarse tanto de manera oral como escrita, y
- comprender otras afirmaciones orales o escritas realizadas por otros.

Competencias Cognitivas Específicas

Se refieren a las capacidades y habilidades que debe desarrollar un estudiante en relación al dominio de una estructura conceptual, a las diferentes maneras de representar un tópico matemático, a la descripción de situaciones y contextos con los que se asocia, y a la resolución de problemas relacionados con dicho tópico. Son competencias que están estrechamente vinculadas con la descripción matemática del tópico, que el profesor ya hizo en el análisis de contenido.

Son cuatro las competencias que constituyen y forman parte del conjunto de competencias específicas: **Estructura Conceptual, Representación, Fenomenología y Modelización.**

Estructura Conceptual

El conocimiento conceptual sobre un tópico matemático posee tres niveles de concreción: *hechos*, *conceptos* y *estructuras conceptuales*. A su vez, el conocimiento procedimental incluye el manejo de esas piezas conceptuales, y distingue entre *destrezas*, *razonamientos* y *estrategias*. Estos niveles de conocimiento se analizan en detalle en la descripción de la estructura conceptual que se realiza en el análisis de contenido previo al análisis cognitivo. Estas competencias se centran en describir qué capacidades y habilidades deseamos que desarrollen los escolares acerca de ese tópico concreto, según esos diferentes niveles de conocimiento.

El foco de reflexión está en tener en cuenta el manejo de todo ese conocimiento e incluye que los escolares sean capaces de:

- conocer e interpretar términos y notaciones, y asumir y manejar convenios importantes;
- reconocer y aplicar los diferentes elementos que constituyen un concepto y las relaciones entre ellos; e identificar las relaciones entre diferentes conceptos relacionados entre sí.
- seleccionar y aplicar algoritmos y métodos de resolución simples, y
- resolver cuestiones o tareas sencillas que a menudo se trabajan como rutinas.

Representación

En el análisis de contenido previo se hace un análisis detallado de los sistemas de representación que admite una estructura matemática determinada así como las diferentes operaciones que pueden realizarse en, y entre esos sistemas de representación. De toda esa reflexión surgen las relaciones existentes entre esos sistemas de representación, y los distintos significados y perspectivas que posee la estructura en cada uno de ellos.

La competencia relativa a *representación* debe incluir que los escolares sean capaces de:

- decodificar e interpretar diferentes formas de representar objetos y situaciones matemáticas;
- reconocer las relaciones entre ellas; y
- elegir y transitar entre formas de representación de acuerdo a la situación y a los propósitos perseguidos.

Fenomenología

Los problemas que forman parte de la experiencia cotidiana, y sus soluciones, pueden presentarse en una amplia variedad de situaciones y contextos. Contextos y situaciones permiten establecer la localización de un problema en términos de los fenómenos de los que surge la situación problemática. Esos fenómenos, y por tanto aquellos problemas que se planteen a partir de ellos, pueden organizarse según situaciones y contextos.

Así, la competencia relativa a *fenomenología* debe incluir que los escolares sean capaces de:

- reconocer y describir situaciones y contextos de su entorno, o del mundo real, que estén relacionados con un tópico matemático; y
- reconocer si un tópico matemático puede ó no representar una situación o problema real;

Modelización

Las tareas de modelización se enmarcan dentro de aquellos procesos que permiten a los estudiantes el manejo y uso de conceptos para la resolución de problemas. Constituye, sin duda, unos de los peldaños superiores de actuación matemática, por el gran número de conexiones y relaciones que es necesario establecer.

La competencia de *modelización*, incluye que los escolares sean capaces de:

- identificar relaciones y plantear interrogantes en contextos y situaciones cotidianos;
- resolver problemas en diferentes situaciones y contextos mediante un tópico matemático concreto;
- analizar y estructurar la situación problemática original, y traducirla a la matemática.
- interpretar los modelos matemáticos en términos de realidad;
- construir un modelo matemático, usarlo y validarlo; y
- reflexionar, analizar y criticar un modelo y sus resultados.

COMPETENCIAS COGNITIVAS EN LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

El ejemplo que aquí se muestra se enmarca en una planificación de una unidad didáctica sobre introducción a la función cuadrática. La información del análisis de contenido en la que se basa esta propuesta se encuentra en Gómez y Carulla (2001).

En la figura 2 se muestra una tabla en la que se recogen 13 tareas generales relativas a la función cuadrática, que muestran un cierto nivel de capacidad matemática. Para cada una de ellas se señala si tiene que ver ó no con las competencias cognitivas genéricas y específicas descritas anteriormente (que aparecen codificadas mediante su inicial en las columnas). Además, en ese listado se señalan dos grandes grupos de objetivos de aprendizaje en las que pueden agruparse esas tareas: *reconocer y caracterizar funciones cuadráticas*, y *describir situaciones y contextos relacionados con la función de segundo grado*:

	PM	J	C	EC	R	F	M
Reconocer y caracterizar funciones cuadráticas							
Dar ejemplos de funciones cuadráticas, simbólica y gráficamente.	X			X	X		
Dar argumentos para justificar si una función es cuadrática ó no.	X	X		X	X		
Dar ejemplos de gráficas de función cuadrática con un máximo o con un mínimo.	X			X	X		
Conocer y emplear los términos habituales más simples: función, función cuadrática o de segundo grado, igualdad, valores, gráfica,...			X	X			
Asumir y manejar los convenios habituales de representación: $f(x)=$, respetar el significado del signo de igualdad, variables en los ejes cartesianos,...			X	X	X		
Identificar elementos en la expresión simbólica de una función: variable, coeficientes principal, lineal e independiente,...				X			
Identificar el vértice y el eje de simetría de una parábola.				X	X		
Conocer las diferentes expresiones simbólicas de la función cuadrática.				X	X		
Dar argumentos para justificar que una función cuadrática tiene siempre un máximo o un mínimo.		X			X		
Describir situaciones y contextos relacionados con la función de segundo grado							
Encontrar y describir verbalmente alguna situación del mundo real que pueda asociarse con una función cuadrática.			X			X	X
Describir dónde pueden hallarse formas u objetos parabólicos.			X			X	X
Identificar la expresión simbólica o gráfica de una función cuadrática que represente una situación o problema real.					X	X	X
Reconocer cuándo una función cuadrática no representa una situación o problema real.						X	X

Figura 2. Descripción de competencias en el caso de la función cuadrática.

Sombreado las celdas correspondientes, se muestra distintos niveles de contribución de esos dos grandes objetivos de aprendizaje al desarrollo de competencias cognitivas genéricas y específicas. Cuando la celda es más oscura es que contribuye especialmente, y la disminución en esa contribución se muestra con sombreados más claros hasta llegar a la nula contribución que se expresa con la celda en blanco.

CONCLUSIONES

Hemos descrito el análisis cognitivo como un procedimiento que el profesor debería llevar a cabo dentro del ciclo del análisis didáctico para diseñar, implementar y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje. Se han presentado sus fundamentos y dos organizadores del currículo que forman

parte de él: competencias, y errores y dificultades, así como una breve ejemplificación de tareas que ejemplifican las competencias en el caso de la función cuadrática.

Esta organización pone de manifiesto el carácter cíclico, relacional y funcional del análisis didáctico como procedimiento. Parte de ese procedimiento se centra en el que el profesor planifique fundamentada y sistemáticamente su actuación docente, y en este punto el análisis cognitivo juega un papel esencial al establecer un potente vínculo entre el análisis de contenido y el análisis de instrucción.

REFERENCIAS

- Eurydice (2003). *Las competencias clave*. Madrid: Unidad Europea de Eurydice.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7, 3, pp. 251-292.
- Gómez, P. y Carulla, C. (2001). Enseñanza constructivista, conocimiento didáctico del profesor y análisis didáctico en matemáticas. El caso de la función cuadrática. En M. L. Tirado (Ed.), *Educación en matemática*. Bogotá: IDEP.
- González, J., Wagenaar, R. (Eds.) (2003) *Tuning Educational Structures in Europe. Informe final fase uno*. Bilbao: Universidad de Deusto y Universidad de Groningen.
- Jiménez, J. E. (1999). *Psicología de las dificultades de aprendizaje*. Madrid: Síntesis.
- Lupiáñez (2003). *Competencias, capacidades y actitudes de los estudiantes de matemáticas de secundaria*. Documento no publicado: Universidad de Granada.
- Mathematics Expert Group (2001). *Draft framework for the PISA 2003 mathematics assessment*. OECD/PISA.
- National Research Council (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. J. Kilpatrick, J. Swafford, y B. Findell (Eds.). Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, División of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.
- Radatz, H. (1980). Students' errors in the mathematics learning process: a survey. *For the learning of Mathematics*. Vol. 9, pp. 163-172.
- Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J., Rico, L., Gómez, P. (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.
- Rico, L. (coord.) (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: Horsori.
- Socas, M. (1997) Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En Rico, L. (coord.) (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp.125-154). Barcelona: Horsori.