ALGORITMOS DE PREDICCIÓN EN LA MODELACIÓN CUADRÁTICA

Marvin Mendoza Valencia, Leonora Díaz Moreno y Jaime Arrieta Vera
UNAH. Honduras
U. de Los Lagos. Chile
UAGRO. México
vinmar28@hotmail.com, leonora.diaz@ulagos.cl, jaime.arrieta@gmail.com

Resumen. Este trabajo reporta la emergencia, evolución y cosificación de algoritmos de predicción al modelar un fenómeno, en este caso el vaciado de un estanque cilíndrico, por modelos cuadráticos. La trayectoria que siguen este algoritmo se evidencia en el análisis de las producciones de profesores de matemáticas al participar en puestas en escena de un diseño de aprendizaje. Este análisis revela los procedimientos que siguen los actores, las herramientas con que actúan y los argumentos que esgrimen para validad su proceder. Se utiliza la presentación discursiva del fenómeno, además del uso de simuladores virtuales como complemento al diseño de aprendizaje

Palabras clave: Modelación Cuadrática, Trayectorias, Algoritmo, Serie de Taylor.

Abstract. This paper reports the emergency, evolution and objectification from prediction algorithms modeling a phenomenon, in this case the draining of a cylindrical tank, by quadratic models. The path this algorithm follows is demonstrated in the analysis of the production of mathematics teachers participating in stagings of a learning design. This analysis reveals the procedures followed by the actors, the tools with which they act and the arguments they use to validate their actions. Discursive presentation of the phenomenon is used, additionally the use of simulators to complement the learning design.

Key words: Quadratic Modeling, Trajectory, algorithm, Taylor Series

Introducción

La modelación en la actualidad es una línea de investigación en crecimiento en Matemática Educativa, o Educación Matemática o en Didáctica de las Matemáticas, así lo reporta Blomhøj (2009) quien levanta una categorización de diferentes perspectivas de modelación, atendiendo al foco de cada uno de los trabajos presentados para el grupo de discusión de modelación del XI ICME.

Con base en los antecedentes de una clasificación de modelación realizada por Kaiser y Sriraman en el 2006, el autor anterior propone las siguientes categorías para la modelación: a) realista, b) contextual, c) educativa, d) epistemológica, e) cognitiva, y f) sociocrítica.

Reformas Curriculares en diferentes países han incorporado a la modelación como un eje central del currículo de matemática y la importancia de considerar la enseñanza de la modelación desde los niveles iniciales (Bassanezi, 1994; Blomhøj, 2004; Biembengut y Hein, 2004).

Antecedentes

Diferentes autores han desarrollado investigaciones que giran en torno a la problemática de la enseñanza-aprendizaje de la modelación (Arrieta 2003; Bassanezi, 1994; Blomhøj, 2004; Biembengut y Hein, 2004; Mochon, 1997& Suárez y Cordero, 2005).

Arrieta (2003) afirma que la modelación es una práctica social ejercida en diferentes comunidades creando puentes entre la matemática escolar y la matemática cotidiana que vive en el ciudadano en su accionar diario. En cambio Bassanezi (1994) describe a la modelación como una actividad para desarrollar una forma particular de pensar y actuar: producir conocimiento, poner junto abstracciones y formalizaciones interconectándolo a procesos empíricos y fenómenos considerados como situaciones problemáticas.

Para Biembengut y Hein (2004) la aplicación de la modelación matemática, espera propiciar para el alumno: a) integración de las matemáticas con otras áreas del conocimiento, b)interés por las matemáticas frente a la aplicación, c) mejoría de la aprehensión de los conceptos, d)capacidad para leer, interpretar, formular y resolver situaciones-problema, e) estimular la creatividad en la formulación y resolución de problemas, f)habilidad en el uso de la tecnología (calculadora gráfica y computadores), g) capacidad para actuar en grupo, h)orientación para la realización de la investigación, h) capacidad para la redacción de esa investigación.

Blomhøj (2004) manifiesta tres argumentos para la enseñanza de la modelación: a) los modelos matemáticos constituyen un puente entre la vida real de los estudiantes, las experiencias y las matemáticas, b) los modelos son un vehículo para el desarrollo de capacidades cognitivas superiores, c) los modelos matemáticos están jugando papeles importantes en el funcionamiento y la formación de las sociedades basadas en tecnologías.

En cambio, otros autores consideran a la modelación como un proceso de representación (Mochón, 1997), o bien como una forma de actividad necesaria para la reconstrucción de significados matemáticos (Suárez y Cordero, 2005); en otros casos ésta se asocia a un proceso mediante el cual se desarrollan capacidades (Aravena, Caamaño y Giménez, 2008), también podemos encontrar posturas que la consideran una herramienta didáctica para la construcción de conceptos matemáticos (Villa y Ruiz, 2009) cada una de estas concepciones muestran que la modelación surge de situaciones específicas del contexto social en el que se desarrollan, donde se identifica cada modelo con la comunidad que lo genera, por medio de su práctica.

Otros antecedentes para este reporte que sustenta el marco teórico de la investigación, lo constituye la perspectiva de modelación como una práctica situada en diferentes comunidades, la que corresponde a la articulación de dos entes, uno llamado modelo a partir de otro llamado modelado (Arrieta, 2003) en el estudio de la modelación lineal; Cortés (2003), en la modelación cuadrática; Méndez (2006), en la modelación multilineal; Galicia (2004), en la modelación exponencial; Castro (2007), en estudios de lo inversamente proporcional y en Alcaraz (2006), en la modelación senosoidal.

Objetivos del Estudio

Esta investigación se propone caracterizar las estrategias estudiantiles que entran en escena, cuando se incorpora a los estudiantes a trabajar con situaciones fenoménicas como es el vaciado de un cilindro circular recto. En particular, describir argumentos, procedimientos y herramientas que utilizan estudiantes de postgrado para realizar predicción de magnitudes en cualquier instante, así como también analizar el proceso de generalización que recurren para construir un algoritmo.

Marco Teórico

La perspectiva que fundamenta este reporte es una de las visiones de la socioepistemología respecto a la modelación. En este sentido se considera a la modelación como una práctica que articula dos "entes", el modelo y lo modelado. La primera cobra sentido en esta perspectiva de modelación cuando el primer ente cumple la función de intervenir cobre la segunda, esto implica que una tabla de valores, un gráfico cartesiano, una fórmula algebraica son modelos, si cumplen el rol de predecir respecto a un fenómeno en particular con el objeto de intervenir sobre este (Arrieta, 2003). Intervención que considera la naturaleza de cada fenómeno en particular, por ejemplo el cardiólogo a través de un electrocardiograma puede intervenir sobre el estado de salud del corazón de un paciente; de igual modo un biólogo marino, a través de un gráfico puede intervenir sobre la cantidad de alimentos en una laguna con peces.

En esta visión se habla de acto modelar cuando se cuenta con situaciones fenomenológicas, datos e información del fenómeno, y cuando estos datos puedan colaborar para intervenir sobre el fenómeno, es decir: el fenómeno, los modelos que intervienen sobre lo modelado. También es necesaria la articulación de los modelos con el fenómeno para dar origen a la comprensión global de la situación. La modelación que se plantea en este reporte, tiene su base en el estudio de las diferencias de la naturaleza de una práctica en comunidades no escolares, con el objeto de que estas, se puedan introducir al aula. La modelación es el puente de las esferas de práctica que considera intenciones, procedimientos, herramientas, argumentos y sus procesos de emergencia y constitución.

Metodología

Los participantes de la puesta en escena del diseño son cuatro profesores de matemáticas, que cursan un programa de postgrado en Educación Matemática en una Universidad de Chile. La secuencia de aprendizaje puesta en escena fue realizada en tres etapas, una primera de trabajo individual en búsqueda de un primer encuentro con la experiencia de aprendizaje, una segunda referida a trabajo colaborativo entre estudiantes y/o profesor, y una tercera etapa de discusión compartida. Se obtienen las evidencias de las grabaciones de audio-video y de las producciones tanto las de lápiz y papel como las digitales**.** Los actores previamente han participado en diseños de aprendizaje basados en la modelación lineal, y por tanto sus producciones serán analizadas considerando esta variable.

Descripción de los Participantes

El grupo de estudiantes es heterogéneo, con participación de profesores de matemática con formaciones y experiencias diferentes, como se describe a continuación. Nos referiremos en adelante a E1, E2, E3, E4, P, O1,O2 para indicar estudiantes, uno, dos, tres, cuatro, y para profesor, además de observadores uno y dos respectivamente. E1 es Licenciada en Educación y Pedagogía Básica, imparte clases al nivel básico (primaria) y posee 8 años de experiencia. E2 es Licenciada en Educación y Pedagogía en Enseñanza Media, imparte a nivel universitario y goza de 18 años de experiencia. E3 es Licenciada en Matemáticas en Pedagogía en Enseñanza Media, imparte clases a nivel universitario con experiencia de 19 años. E4 es Licenciado en Matemáticas se desempeña a nivel universitario y cuenta con alrededor de 14 años de experiencia.

Diseño de la enseñanza

El diseño que se utiliza es *"El vaciado de un recipiente cilíndrico"* que consistió en una experimentación presencial: se perfora, en la parte inferior, una botella de plástico cilíndrica, previamente graduada, y se toma un video de cómo se vacía; auxiliándose del video se lee el nivel del agua cada 10 segundos, con estos datos se construye una tabla en Excel. A partir de la tabla se plantean situaciones de predicción donde los estudiantes construyen algoritmos. En las figuras y tablas, uno y dos se observan los datos experimentales obtenidos del vaciado del cilindro. El uno para referirse datos con ruido (decimales) y el dos para datos sin ruido (enteros).

Ejecución de la actividad

La puesta en escena de la actividad se presenta en Episodios (Ep) con el objeto de describir los detalles del desarrollo de los procesos de la consigna, con vista a observar la relación objetivos planteados en este reporte de investigación y se presentan algunos diálogos que ilustran el desarrollo de cada proceso que involucra la actividad.

Episodio uno: presentación de la actividad

Antes de realizar una nueva situación, los estudiantes desarrollaron una secuencia que describe lo lineal. En el siguiente dialogo se expresa la presentación de una nueva actividad desconocida para ellos, la cual presentó algunas dificultades en la comprensión del fenómeno.

P: Vamos a trabajar, vamos a escribir todo lo que se pueda escribir. No se vale borrar por favor, y después ellos dos (O1 Y O2) nos van ayudar para tomar las evidencias posibles y después las analizamos ¿de acuerdo?, y después ustedes nos cuentan la experiencia del grupo. Entonces pongan atención. Vamos a ver otro fenómeno más. Entonces tenemos un depósito de agua y lo tenemos lleno y abajo tenemos un chorro de agua. A un lado tenemos un regla y del otro lado vamos a poner una tabla de equipo contra el nivel de agua o.k, entonces en el segundo cero ¿Cuánto habrá?, La regla está hacia allá arriba inicia en cero entonces el nivel de agua es cero ¿De acuerdo?

E1: ¿Cómo profe? Perdón… pero ¿El agua parte de allá arriba?…..

P1: Si, está lleno. Acá, entonces el nivel del agua es cero, diez, quince, veinte.

E2: Pero el estanque va a vaciar el agua en el otro estanque.

P: Sí… aquí hay un hoyo, para que no se caiga al suelo.

E1: Qué raro verlo al revés, que raro ver el agua arriba.

P: ¿Cómo lo ven?

E1: ¡Qué bueno que el agua está abajo, po ¡ entonces el cero sería abajo y no arriba.

P: La regla está en cero.

E1: Claro, entonces habría cero agua en el estanque.

E2: Pero profe ¿Eso sería un ruido?

P: Por eso es necesario que antes discutamos juntos, si no se va entender ¿está claro?

E1: ¿Qué sería el ruido? ¿El cero? …

E2: Claro.

E1: Sí porque la ley de gravedad dice que debería estar abajo, jajaja.

E2: Además el estanque está lleno, si está lleno no puede ser cero allí.

Episodio dos: pensamiento centrado en lo lineal

Se inicia la actividad con la presentación del profesor con una diapositiva donde va preguntando los valores de las alturas, cuando el tiempo va avanzando, el profesor intuye que los estudiantes considerarán el nuevo fenómeno como lineal. En el dialogo a continuación se presentan las interacciones suscitadas.

P: Empieza a vaciarse, en el segundo diez ya tenemos cinco.

E1: Se ha vaciado cinco.

P: En el segundo 20 ¿Cuánto habrá vaciado?

E2: 10… no…. Sí, es 10.

P: En el segundo treinta,… ¿En treinta? Todos quince, en el segundo cuarenta veinte, en el segundo cuarenta y cinco, veinticinco.

E1. Estoy mirando profe, jejejejeje.

P: Pues no es así.

E1: Jajajaja.

P: ¿Por qué sucede esto? Porque nos estamos centrando en lo lineal. Imagínese ver el agua, al principio sale con más presión, ya después comienza a cambiar.

E3: Empieza a variar.

P: Al principio va agarrar rápido y después va agarrar más lento.

E3: Sí claro.

E4: Usted fue a generar dentro del proceso esa inducción lineal, fue inducida por usted porqué empezó diez cinco, entonces empezamos a encontrar relación lineal, si usted revisa cuando usted dijo diez cinco, ahora manda y dice: veinte y automáticamente decimos diez, y coincide lo que usted dice, entonces induce a que el fenómeno va a seguir pasando linealmente. Es decir no se hizo un análisis.

Episodio tres: trabajo individual del vaciado del cilindro para datos con y sin ruido

Concluido el debate que el fenómeno de vaciado del cilindro no era lineal, los estudiantes enfrentan el desafío individual de predecir el valor de la altura de vaciado en un cilindro para datos con ruido y sin ruido.

En el segundo t=27,72 s''' ¿Qué nivel de agua tiene el estanque (h)?

Tiempo	Nivel del agua
t	h
0	24.5
12	16.8
20	12.5
35	6.13
38	5.12
50	2
66	0

Tabla 1. Datos de t y h con ruido

Tiempo	Nivel del agua
t	h
0	0
10	55
20	100
30	135
40	160
50	175
60	180

Tabla 2. Datos de t y h sin ruido.

Para afrontar el problema en las dos facetas surgieron diferentes estrategias. Para datos con ruido, la estrategia de todos los estudiantes fue obtener las diferencias de los tiempos y de las alturas y estrategias empleadas ara la modelación lineal, como ser regla de tres y puntos medios. Ninguno de los estudiantes logró predecir el valor solicitado.

Para datos sin ruido, las estrategias fueron variadas. E1 presentó una estrategia aritmética anclada en variación por intervalos

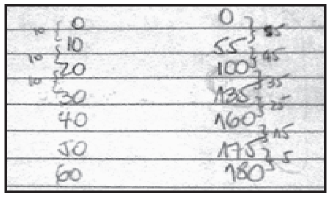

Figura 1. Diferencias de h y de t para datos sin ruido, obtenidas por E1.

Los argumentos que presentó E1: *"Vi que las diferencias entre estas es 10, es una constante de 10. Entonces supuse que no siempre hay diferencia de 10, entonces dije entre 20 y 30 hay 35 que divido en diez me da 3.5. Supuse que cada rayita tiene 3.5, entonces dije 27.72 por 3.5. No Dije 27, dije 7, porque ya tengo 20 entonces 7.72 por 3.5más los 100 da 127.02."* Además agrega: "*Tiene 27.72 con 20 ya lleva 100 y faltan 7.72, pero con 3.5 en cada segundo, por lo tanto, se multiplica 7.72 por 3.5. Al resultado que es 27.02 le suma 100 y le da 127.02".*

E2 y E3 obtuvieron primera y segundas diferencias de la variable h, que les permitió conocer la naturaleza del modelo o de la función. Ellas encontraron un modelo cuadrático a partir de tres valores de la tabla, obtuvieron los parámetros para el modelo, al que posteriormente evaluaron para predecir el valor solicitado.

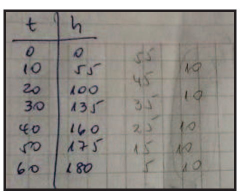

Figura 2. Diferencias de h de E2.

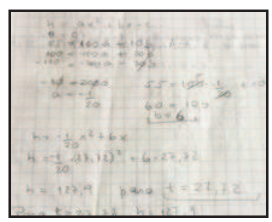

Figura 3. Modelo cuadrático de E2.

Por su parte, E4 consideró lo aritmético y lo geométrico con la intención de buscar pistas a través de las diferentes tangentes de la gráfica sin llegar a obtener la predicción solicitada. Argumenta lo siguiente: "grafico los puntos dados y observa una gráfica que da en términos de una función radical Y=raíz de x..., también lo relacionó con una función logarítmica, pero nunca lo asoció con "lo cuadrático".

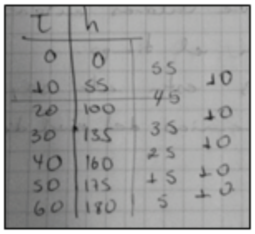

Figura5. Esbozo de la gráfica de E4.

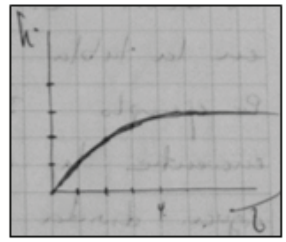

Figura 4. Diferencias de h de E4.

Episodio cuatro: consolidación del algoritmo de predicción

En base a lo realizado por E1 se presentó una discusión en torno a la búsqueda de una generalización de un método de predicción que describiera el fenómeno.

E1 en una primera instancia manifiesta que busca relaciones entre ambas columnas, en la segunda columna observa diferencia entre los datos que la conforman va disminuyendo. Posteriormente encuentra diferencias en la primera columna, las que es constante y corresponde a 10. Una vez realizada esta relación E1 vislumbra que las diferencias de la segunda columna no siempre son constantes, pero si las de la primera por lo tanto intenta relacionarlas por intervalos, recordemos que la pregunta es ¿En el segundo t=27,72 s ¿Qué nivel de agua tiene el estanque (h)? en ese contexto primero determina un intervalo, que en la primera columna se sitúa entre 20 y 30, como se pudo observar en la figura uno.

Entonces los actores predicen utilizando el siguiente procedimiento: "En el segundo 20 el agua está en el nivel 100, le resto lo que falta para 27.72, o sea 7.72 o sea 7.72 por los milímetros por segundo 3.5.

Escribe 7.72seg por 3.5cm/seg = 27.02cm, el nivel del agua es 100+ 27.02= 127.02.

Si leemos de otra manera el procedimiento sería: ***n*** (27.72)= *n*(20+7.72)=*n*(20) +*n*(7.72) = 100 + (7.72) $(\frac{35}{10})$ = 100+27.02 = 127.02 , $n(27.72) = n(20) + \frac{\Delta n}{\Delta t} 7.72$.

Ellos están empleando un método que está basado en la serie de Taylor de primer orden

$$n(t_0 + h) = n(t_0) + \frac{dn}{dt} h .$$

Uno de los métodos de predicción que utilizan los actores al modelar es la serie de Taylor de primer orden.

Conclusiones

Los profesores recurren a algoritmos de predicción que utilizan en la modelación lineal. Estos algoritmos son el de puntos medios y regla de tres entre otros.

A partir de lo expuesto en este reporte, es importante señalar que al invitar a los estudiantes a realizar la experiencia de modelación surgen, al menos, dos conclusiones. La primera se relaciona con los tipos de razonamiento que emergen a partir de la exposición al modelo. El primer razonamiento surge a partir de las producciones de E1 y en el cuál identificamos claramente que no tiene conocimientos de lo cuadrático, pero que sin embargo, logra resolver el problema planteado en la experimentación. E1 desarrolla un tipo de razonamiento, en cual busca relaciones entre los componentes de la tabla, con una clara preocupación por los datos que se entregan en ella. E1 nunca pierde de vista la situación a la que ha sido invitada a experimentar. Esta capacidad holística, le permite visualizar de mejor manera la problemática, construir una solución y encontrar un resultado satisfactorio.

Un segundo tipo de razonamiento lo podemos visibilizar en los estudiantes que si tienen conocimientos vastos de lo cuadrático, tal es el caso de E2, E3 y E4. Los estudiantes aquí mencionados no logran resolver la problemática, aun cuando manifiestan conocimientos en el tema, desde nuestra perspectiva una de las causales de esta situación puede relacionarse con el uso de algoritmos de forma mecánica, lo que no les permite visibilizar ciertos comportamientos de las tablas entregadas.

Referencias bibliográficas

Alcaraz, R. (2006). Lo periódico una construcción a partir de la numerización del movimiento. Tesis de Maestría no publicada, Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero., México.

Arrieta, J. (2003).Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis doctoral no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Pedagógico Nacional, México.

Bassanezi, R. C. (1994). Modelling as a teaching-learning strategy. For the learning of mathematics, 14(2), 31-35.

Blomhoj, M. (2004). Modelización Matemática. Una teoría para la práctica.

BlomhØj, M. (2009). Different Perspectives in Research on Teaching and Learning Mathematical Modelling. Categorizing the TSG21 Papers. In Blomhøj, M. & S. Carreira, (eds.) (2009). Mathematical applications and modeling in the teaching and learning of mathematics.

Proceeding from topic study group 21 at the 11 International congress on Mathematical education in Monterrey, México.

Biembengut, M. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos de Enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16 (002), 105-125.

Castro, G. (2007).La analogía en la construcción del conocimiento, construyendo lo inversamente proporcional. Tesis de Maestría no publicada, Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. México.

Cortés, G. (2003).Relaciones cuadráticas entre las variables desde la Perspectiva matemática a partir de observaciones. Tesis de Maestría no publicada, Unidad Académica de Matemáticas de la U.A.G., México.

Galicia, A. (2004).La construcción de lo exponencial, a partir de las prácticas sociales de modelación. Tesis de maestría no publicada, Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerreo, México.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. ZDM, 38(3), 302-310. Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. ZDM, 38(3), 302-310.

Méndez, M. (2006).Las prácticas sociales de modelación multilineal: Modelando un sistema de resortes. Tesis de Licenciatura no publicada, Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autonoma de Guerrero, México.

Mochón, S. (1997). Modelos Matemáticos para Todos los Niveles. En R. M. Farfán, J. Lezama, A. Arellano, E. Oaxaca (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica. 11,42-45.

Suárez, L., & Cordero, F. (2005). Modelación en Matemática Educativa. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18(1), 639-644.

Villa, J. A. y Ruiz, M. (2009). Modelación en Educación Matemática. Una mirada desde los lineamientos y Estándares Curriculares Colombianos. Revista Virtual Universidad Católica del Norte (27), 1-21.