¿QUÉ APRENDIZAJES EVIDENCIAN LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA AL INGRESAR AL CÁLCULO INICIAL?

Marvin Mendoza V., Leonora Díaz M.
U. Nacional Autónoma de Honduras Honduras
U. de Los Lagos Chile
vinmar28@hotmail.com, leonora.diaz@ulagos.cl

Resumen. Este reporte da cuenta de un estudio exploratorio que proporciona evidencias, en relación a debilidades y falencias que presentan los estudiantes en algunas de las temáticas que anteceden al cálculo inicial. Esta investigación se realizó con estudiantes de primer año universitario que han aprobado álgebra y geometría analítica, requisitos para el cálculo inicial en carreras de ingeniería en la UNAH. Investigaciones sostienen que los contenidos que se desarrollan antes de iniciar cálculo son fundamentales para el abordaje del mismo, puesto que el cálculo se desarrolla a partir de los conceptos de números reales, funciones y otros subtemas vinculados a éstos.

Palabras clave: Enseñanza, Aprendizaje, Dificultades, Categorización de errores

Abstract. This report is an exploratory research that provides evidence of the weakness and shortcomings that students have in topics related to calculus. This research takes as sample college freshman that have already approve algebra and geometry. These classes are requirements to study calculus in careers such as engineering. Other investigations provide evidence that the subjects students take before calculus are fundamental to understand it. This because the calculus used previous knowledge of: Real numbers, functions and other sub-topics related to them.

Key words: Teaching, Learning, Difficulties, Categorization of errors

Introducción

Artigue (1995), sostiene que las dificultades en la enseñanza del cálculo provienen de a) la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo; b) la conceptualización y formalización de la noción de límite en el núcleo de su contenido y su tratamiento en la enseñanza; y, c) la ruptura álgebra / cálculo, la brecha entre el pensamiento analítico y el algebraico.

El primer aspecto que menciona Artigue, es el punto que deseamos focalizar en este estudio. Para la autora, al iniciar la enseñanza del cálculo, los conceptos preliminares juegan un rol fundamental en la conceptualización del cálculo inicial: los números reales, funciones y situaciones que requieran de la aplicación de estas, y ecuaciones e inecuaciones de diferente naturaleza, entre otros.

En sus investigaciones, Artigue (1995) afirma que existen dificultades en relación a la temática que precede al cálculo y debe ser abordada a profundidad en los diferentes niveles de escolaridad, principalmente en el nivel medio donde se desarrollan las bases para la enseñanza del cálculo.

En el medio hondureño y en el latinoamericano, la realidad no es diferente de lo Artigue menciona con respecto a las dificultades, falencias que presentan los estudiantes al ingresar al cálculo, reportes de la Universidad Nacional Autónoma de Honduras del año 2010 y 2011, así lo reflejan.

Antecedentes

Chávez (1998) encontró dificultades asociadas con el concepto de función. Entre éstas destacan, la comprensión del concepto de variable; la distinción entre variable dependiente e independiente; la comprensión del concepto de función y los subconceptos de dominio y rango; las gráficas de funciones; el tránsito entre diferentes sistemas semióticos de representación, por ejemplo, del gráfico al numérico, del numérico al algebraico, del algebraico al gráfico, del verbal al algebraico. También se evidencia que los estudiantes no establecen con claridad las relaciones existentes entre los diferentes conjuntos de números. En ese sentido los estudiantes no comprenden los conjuntos numéricos (los enteros, las fracciones, los decimales, los números que se expresan con radicales y otros como π), todas estas categorías tienden a confundirse en la asociación entre número real y número decimal, de igual manera, se encontró que la asociación de los reales con la recta numérica que se promueve en los estudiantes no corresponde con la visión del continuo numérico de la matemática.

Respecto a la función, Artigue (1995) afirma que las investigaciones en funciones se identifican a través de categorías. La primera de estas es *la determinación de dificultades con la identificación de lo es una función*. En esta línea, las investigaciones realizadas mostraron la brecha existente entre las definiciones dadas por los estudiantes, de un lado, y los criterios utilizados en las tareas de reconocimiento de objetos funcionales o de clasificación de funciones y no funciones dadas en registros diferentes, del otro lado.

La segunda categoría está relacionada con *la flexibilidad proceso-concepto*. Los hallazgos encontrados en las investigaciones en esta dirección, detectaron dificultades para desarrollar la flexibilidad entre la función vista como un "proceso" y la función vista como una "entidad conceptual", se apoyaron en la distinción entre los dos status de los objetos matemáticos: el status operacional, dinámico y el status estructural, estático.

La tercera categoría se refiere a *las articulaciones de los registros simbólicos*. En esta línea, se encontraron dificultades para articular los diferentes registros simbólicos de las ex-presiones de la noción de función. En ella se muestran las dificultades cognitivas para transformar de un contexto matemático a otro con la finalidad de construir el concepto de función. En las de esta categoría se presentan conclusiones que los estudiantes privilegian lo algebraico ante los demás contextos matemáticos.

Por su parte, Vrancken, Gregorini, Engler, Müller y Hecklein (2009), sostienen que los conocimientos no se almacenan unos encima de otros. Para estas autoras, un aprendizaje significativo implica rupturas cognitivas y acomodaciones. La construcción del conocimiento no es un proceso continuo, surge de desequilibrios, rupturas de conocimientos anteriores y reconstrucciones.

Desde la perspectiva de las autoras se puede afirmar, que todo aprendizaje significativo supone una construcción que se realiza a través de procesos complejos que llevan a estructurar un conocimiento nuevo. Según estas investigadoras, aún prevalece la tendencia a la enseñanza algorítmica y algebraica en los cursos previos al cálculo. Además, ellas mencionan que ante la emergencia de errores en el registro algebraico, no se les explica a los estudiantes las causas de sus errores y se apelan a que se hace necesario utilizar diferentes representaciones para abordar los problemas de manera más eficiente. A modo de ejemplo, de utilizar un registro gráfico, en lugar de usarlo como apoyo para comprender un error, éste se usa de manera muy limitada y en desconexión a lo algebraico.

Justificación

Este reporte de investigación tiene sus bases en diferentes problemáticas, entre las que concurren las investigaciones revisadas, rendimiento académico estudiantil y el interés por conocer diferentes aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del cálculo inicial en carreras de ingeniería. Las investigaciones mencionadas en los antecedentes, colaboraron para comprender la importancia de la temática preliminar antes de los conceptos de cálculo inicial. En ese sentido este trabajo va dirigido a analizar los entendimientos estudiantiles de temas que anteceden al cálculo.

El segundo aspecto para la realización de este trabajo de investigación lo constituye los informes en torno al cálculo inicial del 2010 y 2011, el cual refleja que los índices de reprobación en los cursos de cálculo inicial de la UNAH, y ese sentido hay una preocupación del profesorado para conocer a profundidad la complejidad de la problemática. Un tercer aspecto que da sustento a este trabajo, fue los resultados obtenidos de la investigación de realizado por Mendoza y Díaz en el 2012 con estudiantes de primer año de ingeniería de la UNAH, en donde se abordó la construcción del concepto de límite desde un contexto de geometría sintética. La investigación abrió el espacio para analizar los conceptos previos que los estudiantes ponen en escena cuando se enfrentan al cálculo inicial.

Objetivos del Estudio

Esta investigación se propone caracterizar las estrategias estudiantiles en la resolución de problemas que involucren funciones, modelación de funciones, representación de funciones, entre otros. Particularmente analizar los desempeños que presentan los estudiantes, cuando resuelven situaciones con funciones, diferentes marcos matemáticos. También interesa conocer las dificultades y falencias que presentan los estudiantes en las temáticas antes señaladas.

Marco Teórico

En este apartado de la investigación, se considerará dos elementos: los errores y algunos elementos de la teoría semiótica de Duval. Respecto al primero, en educación matemática los errores se abordan de diferentes perspectivas, una de estas es que los errores se presentan como una fuente de información valiosa que debe considerarse para construir y reconstruir aprendizajes.

Socas (1997) menciona que el error se debe tomar como la presencia de un esquema cognitivo no adecuado y no como consecuencia del desconocimiento de un saber específico.

Para Brousseau, Davis y Werner (1986) consideran que los errores se provocan a raíz de un procedimiento sistemático imperfecto que el alumno utiliza de modo consistente y con confianza.

Por su parte Mulhern (1989, citado en Rico 1995), señala características de los errores: Tienen su origen por lo general, de manera espontánea y sorprenden al profesor, son persistentes y difíciles de superar, son sistemáticos o por azar, y d) frecuentemente los alumnos no toman conciencia del error dado que no comprenden el significado de los símbolos y conceptos con que trabajan.

Actualmente se le considera al error parte medular e inseparable del proceso de aprendizaje. Pues a partir de ellos se puede diagnosticar, tomar partida de ello en el estudiantado, discutir con ellos sus errores, y presentarles situaciones que les hagan reflexionar y asumir nuevos retos cognitivos para sobrepasar los errores, construyendo de este modo nuevos esquemas y caminos cognitivos.

Un segundo aspecto que el marco teórico ha considerado, es la Teoría de las Representaciones. Según Duval (1999), se tiene acceso al conocimiento matemático a través de distintas representaciones. Este investigador distingue entre representaciones semióticas y mentales. "Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica...) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los otros. Las representaciones semióticas estarían, pues, subordinadas por entero a las representaciones mentales y no cumplirían más que funciones de comunicación" (Duval, 1999, pág.14).

En esta perspectiva teórica se considera que los objetos matemáticos se refieren a signo, concepto que aparece en la actividad matemática y del que se conocen sus propiedades, operaciones, teoremas, entre otros; por ejemplo, los números enteros, las funciones, los límites, los polinomios, las matrices. Estos objetos matemáticos a su vez tienen diferentes registros de representación, tales como: Gráfico o geométrico, numérico, analítico o algebraico, pictórico, lenguaje natural, entre los cuales puede ocurrir la actividad llamada **tratamiento**. Esta actividad comprende acciones o manipulaciones sobre un objeto que pueden ser operaciones, procedimientos de tipo aritmético, gráfico, en registro natural, entre otros, sobre ese objeto al interior del registro. Si por el contrario se realizan acciones entre un registro y otro se realiza conversión.

Metodología

Se seleccionó una muestra de 30 estudiantes de Ingeniería del segundo semestre de 2011 de la UNAH, que matricularon cálculo. Antes de desarrollar el contenido de cálculo, se elaboró una prueba con 12 preguntas con base a contenidos que anteceden al cálculo. En la etapa de elaboración y diseño de la prueba, así como también en la recolección de la información y en el análisis de reactivos se utilizó metodología cualitativa. En el análisis de la información, se utilizó un análisis mixto: metodología cuantitativa para ilustrar algunos resultados mediante tablas, y cualitativa en el levantamiento de categorías. Para valorar los desempeños de los estudiantes, se elaboraron los indicadores o criterios de Resuelto completamente (RC) para los ítems que se resolvieron cumpliendo los objetivos señalados en cada grupo de reactivo, Resuelto Incompleto (RI) para los ítems que no resolvieron completamente de acuerdo a esos objetivos, Resuelto Incorrecto (RIC) para los ítems que no cumplieron ninguno de los objetivos trazados, No Resuelto (NR) para los ítems dejados en blanco.

Diseño de la prueba

Interesa determinar la posición de los estudiantes en relación al status absoluto de los entendimientos que se miden. En el análisis que se utiliza interesa responder qué porcentaje de ejecución alcanza el criterio por parte del desempeño del estudiante evaluado. Los diseñados consideraron temáticas de álgebra, geometría y trigonometría, que preceden al cálculo inicial.

Los reactivos del uno al cinco de la prueba diagnóstica, requieren la elaboración de modelos matemáticos de triángulo, rectángulo, cubo, ventana normanda y paralelepípedo sin tapa, atendiendo a ciertas condiciones. Los reactivos seis y siete, solicitan la construcción de una gráfica en un contexto cotidiano. El octavo se refiere al cálculo de imágenes de una función y el noveno solicita que se encuentre el dominio de una función. En el décimo reactivo el estudiante debe trazar tanto la gráfica de funciones, como identificar dominio, rango, intercepto, intervalos de crecimiento, intervalo de decrecimiento entre otros. En los reactivos onceavo y doceavo deberá identificar en un registro gráfico elementos de la función. En la tabla uno, se especifican los subgrupos de ítems descritos.

Subgrupo	Temática	Propósitos
Uno al cinco	Expresiones algebraicas de una cantidad de magnitud en función otra, para las figuras de triángulo, rectángulo, cubo, ventana normanda y paralelepípedo sin tapa.	• Analizar situaciones que involucran áreas y volúmenes. • Reconocer los elementos que intervienen para expresar áreas de triángulos, rectángulos y ventanas normadas, y, volumen de un paralelepípedo sin tapa. • Expresar áreas y volumen como relaciones funcionales de acuerdo a las condiciones enunciadas.
Seis y siete	Construcción de una gráfica dada una situación en contexto cotidiano.	• Reconocer una función de acuerdo a situaciones de contexto.
Ocho	Cálculo de imágenes de una función	• Calcular las imágenes de diferentes valores de una función cuadrática.
Nueve	Dominio de una función	• Determinar el dominio de dos funciones reales, una racional y otra irracional.
Diez	Función, clasificación y elementos tales como dominio, rango, interceptos, intervalos de crecimiento, intervalo de decrecimiento entre otros. Además de gráfica de funciones.	• Determinar diferentes elementos tales como dominio, rango, intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento de funciones lineales, cuadráticas, valor absoluto, y funciones definida a trozos. • Construir la gráfica de funciones lineales, cuadráticas, valor absoluto y definido a trozos.
Once y doce	Reconocimiento de diferentes elementos de una función dada su representación gráfica.	• Obtener diferentes elementos de la función dada su gráfica. • Determinar dominio, rango, imágenes, pre imágenes, intervalos de crecimiento, intervalos de decrecimiento de la función dada su representación gráfica. • Determinar los puntos de intersección dada dos gráficas de funciones.

Tabla 1. Subgrupo de actividades, temática y propósitos en la prueba diagnóstica.

Resultados

Se presentan resultados sistematizados en categoría los diferentes ítems de la prueba.

Indicador	Cantidad de estudiantes
Resuelto Completamente(RC)	8
Resuelto Incompleto (RI)	12
Resuelto Incorrecto(RIC)	10
No Resuelto (NR)	0

Tabla 2. Resultados de los ítems uno al cinco de la prueba.

Los resultados de la tabla anterior refleja que ocho de los treinta estudiantes desarrollaron los cinco problemas de manera correcta, es decir, que cumplieron los objetivos propuestos en los ítems, doce estudiantes realizaron algunos ejercicios de manera correcta pero no llegaron a terminar todos los ítems y diez estudiantes no desarrollaron ningún ejercicio correctamente. De las dificultades evidenciadas en las producciones estudiantiles, se detectó el problema de relacionar las variables para elaborar un modelo. Se presentaron errores en establecer relaciones de áreas y volúmenes de diferentes figuras.

Indicador	Cantidad de estudiantes
Resuelto Completamente(RC)	2
Resuelto Incompleto (RI)	10
Resuelto Incorrecto(RIC)	10
No Resuelto (NR)	8

Tabla 3. Resultados de ítems seis y siete de la prueba.

Los resultados de estos ítems reflejan que los estudiantes respondieron de manera incorrecta, no respondieron o respondieron incompleto el problema. Estos tres indicadores señalados, denotan que los estudiantes presentan dificultades para construir gráficas, partir de una expresión verbal, tal como señala Duval (1994), el tránsito entre registros, además de la construcción a partir de acciones cognitivas. Además se evidenció las dificultades que alude Artigue (1995) respecto a la construcción de las funciones a partir de situaciones cotidianas.

Indicador	Cantidad de estudiantes
Resuelto Completamente(RC)	4
Resuelto Incompleto (RI)	15
Resuelto Incorrecto(RIC)	6
No Resuelto (NR)	5

Tabla 4. Resultado de ítem diez de la prueba.

Los resultados anteriores revelan que gran parte de los estudiantes presentan dificultades y cometen errores para encontrar dominio de la función, graficar funciones, determinar: intersecciones con los ejes coordenados, intervalos de crecimiento e intervalo de decrecimiento. Además asociar las gráficas con sus expresiones funcionales. Los resultados mostrados en la tabla refleja que solo un pequeño porcentaje de los estudiantes que se les aplicó la prueba diagnóstica, resolvieron de manera correcta todos los elementos solicitados en la misma, mostrando falencias en la comprensión de su expresión funcional de cada gráfica.

Indicador	Cantidad de estudiantes
Resuelto Completamente(RC)	2
Resuelto Incompleto (RI)	8
Resuelto Incorrecto(RIC)	12
No Resuelto (NR)	8

Tabla 5. Resultado de ítems 11 y 12 de la prueba diagnóstica.

Los resultados reflejan que solo dos estudiantes de los treinta estudiantes, pudieron resolver correctamente los dos ejercicios. La mayoría de los estudiantes se ubicó en resolver de manera incompleta, doce estudiantes contestaron de manera incorrecta y ocho no contestaron. En los dos últimos casos, se observa que los estudiantes presentan dificultades para leer e interpretar gráficas, cálculo de pre imágenes, imágenes, estimar soluciones gráficamente, reconocer los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de una gráfica.

Conclusiones

Los resultados del instrumento aplicado a los estudiantes de Ingeniería de UNAH corrobora las dificultades que reporta las investigaciones de Artigue (1995) y Chávez (1998) y Duval(1999) donde se mencionan dificultades del concepto de función y de sus elementos, modelación matemática, relación de dos variables, lecturas, construcción y comprensión de gráfica de funciones. Se observa que los estudiantes en sus desempeños muestran que prevalece el desarrollo algebraico. Se observó errores en cuanto a la identificación del tipo de función, al trazado de gráficas, el cálculo tanto de imágenes como de pre imágenes, es decir en identificar la relación funcional. Se encontraron dificultades para elaborar modelos matemáticos de acuerdo a ciertos parámetros. Los resultados obtenidos reflejan abren posibilidades a otro tipo de intervenciones didácticas para abordar la temática en cuestión.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. En P. Gómez (Ed.). Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 33-59). Bogotá: Iberoamérica.

Chávez, H. (1998) Los problemas alrededor del concepto de límite y su enseñanza a través del uso de la computadora. Memorias IX Seminario nacional microcomputadoras en la Educación Matemática. México.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes.

Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, M., Müller, D., & Gregorini, M. I. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. Union, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 11, 113-132.

Mendoza y Díaz (2012). Significando el paso al límite en estudiantes que inician cálculo. Tesis de maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán. Tegucigalpa, Honduras.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.

Socas Robayna, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. In La educación matemática en la enseñanza secundaria (pp. 125-154). Horsori.