

## INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DERIVADA: UN DISEÑO EXPERIMENTAL CON ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE HUMANIDADE

Juan Carlos Sandoval Peña  
 Universidad San Ignacio de Loyola  
 sandovaljc007@gmail.com, jcsandoval07@hotmail.com

Perú

**Resumen.** La investigación presenta una propuesta didáctica sobre el aprendizaje de la derivada, a través de las relaciones entre pendiente y razón de cambio, conceptos que permitirán al estudiante construir un sistema de representaciones más sólido para acceder al estudio variacional. El estudio tiene el propósito de aminorar las dificultades que estos estudiantes enfrentan al realizar el estudio de las derivadas, dificultades como: la comprensión del concepto derivada, la relación entre la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantáneo, concebir a la derivada como una función y deducir información relevante de situaciones gráficas, entre otros. Parte fundamental del experimento consiste en recurrir a la noción de representación, pues la función simbólica es la actividad cognitiva, que permite al ser humano acceder al conocimiento. Para desarrollar la investigación nos apoyaremos en algunos aspectos de la teoría de registros semióticos de Duval (2004) y la metodología de diseños experimentales (Cobb, P. Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., Schauble, L. y Hodge, L. 2003).

**Palabras clave:** Derivada, diseño experimental, laboratorio, registros de representación.

**Abstract.** The research presents a didactic proposal about derivative learning, through the relationship between slopes and rate of change, concepts that will allow students to build a more solid representation system to access the variation study. The study aims to reduce the difficulties these students face in the study of derivative, difficulties such as: understanding the concept derived the relationship between the average rate of change and instantaneous rate of change, conceive the derivative as a function and deduce the relevant information from graphs situations, among others. A fundamental part of the experiment consists in using the notion of representation, because the symbolic function is the cognitive activity that allows humans to access knowledge. To develop the research we will rely on some aspects of Duval's theory Semiotic Representation Registers (2004) and the methodology of experimental designs (Cobb, P. Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., Schauble, L. and Hodge, L. 2003).

**Key words:** derived, design experiment, laboratory, representation records.

### Introducción

Los estudiantes de una universidad particular de Lima, del primer ciclo de humanidades, tienen dificultades cuando estudian el concepto de derivada. En ese sentido, nuestra investigación tiene el propósito de dar una alternativa, que permita aminorar dichas dificultades.

Investigaciones en didáctica de la matemática sobre la enseñanza y el aprendizaje de la derivada justifican este estudio, (Azcárate, Bosch, Casadevall y Casellas, 1996; Sánchez- Matamoros, 2004; Sánchez-Matamoros y García, 2008 y Dolores, 2007). Dichas investigaciones muestran diversas dificultades, entre otras: la comprensión del concepto derivada, la relación entre la razón de cambio promedio y la razón de cambio instantáneo, concebir a la derivada como una función y deducir información relevante de situaciones gráficas, uso de la derivada en forma mecánica, entre otros.

Ante esta problemática se plantea la siguiente pregunta de investigación: *¿De qué manera un diseño experimental, en el que se introduzca el concepto de derivada utilizando los conceptos razón de cambio*

*promedio, razón de cambio instantáneo y sus diversas representaciones puede favorecer el aprendizaje de este concepto?*

Para dar respuesta a la pregunta de investigación, tomaremos como marco teórico la teoría de registros de representación semiótica (Duval, 1998, 2004) y como metodología algunos aspectos de Design Experiment (Coob et al, 2003).

Marco Teórico:

Las representaciones semióticas, son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos, medio por el cual un individuo exterioriza sus representaciones mentales.

Duval (1998), se refiere a los sistemas de representación semiótica, como aquellos que tienen características particulares y permiten sostener la conceptualización en la matemática sujeta a la comunicación, así como en la actividad cognitiva del pensamiento.

El mismo autor señala que las representaciones semióticas, deben cumplir las siguientes funciones: a) la función de comunicación (intercambio social), b) objetivación (toma de conciencia) y c) tratamiento (manipulación de la información).

Además sostiene que no es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento, sin recurrir a la noción de representaciones, porque no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar, sin una actividad de representación.

Los conceptos matemáticos admiten una gran variedad de registros de representación; este trabajo se interesa en analizar los distintos registros, que se abordan en la aprehensión del concepto de derivada, el cual se puede analizar al menos de tres representaciones, como: lo gráfico, lo simbólico y lo natural.

En el esquema de la Figura 1, se muestra cuatro sistemas de representación que generan las posibles conversiones de un sistema a otro o tratamientos dentro de cada sistema.

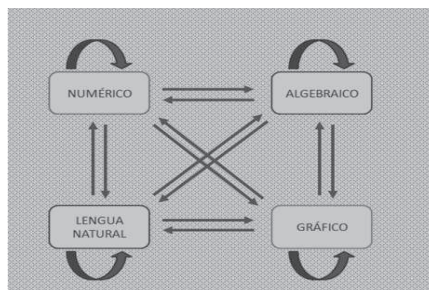


Figura 1. Relación entre los registros

Duval (2005) afirma que la originalidad de la actividad matemática está en movilizar simultáneamente, al menos dos registros de representación al mismo tiempo, o la posibilidad de cambiar todo el tiempo de un registro de representación.

Existen dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas que son radicalmente diferentes: los tratamientos y las conversiones. Por eso, cuando se describe la resolución de un problema de matemática y en el análisis de la producción de los estudiantes, nadie se hace cargo de distinguirlos.

El *tratamiento* de una representación lo cual significa, la transformación de la representación en el mismo registro, de acuerdo con las únicas reglas propias del sistema, debemos pensar en una transformación que se lleva a cabo dentro del mismo registro donde ha sido formada dicha representación. El tratamiento, es una transformación interna a un registro.

La *conversión* de una representación de un registro a otro manteniendo la totalidad o parte de la representación inicial, es decir, la conversión es una transformación externa al registro de partida. La conversión es una actividad cognitiva diferente e independiente del tratamiento. Son operaciones de conversión la traducción, la ilustración, la transposición, la interpretación, la codificación, entre otras.

En lo que se refiere a la parte didáctica, las carreras de humanidades se apoyan en textos de *matemáticas para la administración y la economía* (estudiantes de negocios, economía y ciencias sociales), que básicamente desarrollan temas de nuestro interés, como el cálculo de una variable. Por otra parte realizan problemas aplicados y que a menudo se dan argumentos intuitivos e informales.

Para esta investigación tomaremos a tres textos que cumplan con la descripción anterior, (Arya y Lardner, 2009; Haeussler, Paul y Wood, 2008 y Hoffman y Bradley, 1995).

### Metodología

Dado lo relevante de la investigación acerca de la comprensión de la derivada y su naturaleza, utilizaremos algunos aspectos del *Design Experiments* (D.E.) (Coob et al ,2003). Así, el D.E. señala que la investigación tiene como foco entender e interpretar datos y discursos, cuando se trata de grupos de estudiantes, razón por la cual se vale de la observación tanto del docente-observador como del investigador.

Se puede sintetizar las características de *Design Experiments* que utilizaremos en el experimento así tenemos: el papel del investigador y su rol en la actividad, el tiempo que puede variar de acuerdo a

los resultados que se van logrando, la colección de datos y la refinación de datos, que consiste en volver a realizar un experimento, si no se logra la información esperada.

Además, para el registro y colecta de información, utiliza varios instrumentos como fichas de observación, fichas de actividades, y grabaciones de audio y video que ayudan al registro de los datos del experimento.

### El experimento

EXPERIMENTO	
Lugar	Universidad particular de Lima
	3 alumnos de carreras de humanidades
Sujetos	1 docente-investigador
	2 docentes-observadores
Tiempo	4 semanas
Nro. de fases	2 fases
Nro. de sesiones	2 sesiones por fase
Instrumentos	- Prueba diagnóstica
	- Fichas de actividades
	- Videos y cuestionarios
	- Fichas de observación

Figura 2. Experimento sobre la comprensión de la derivada

El experimento consiste en desarrollar actividades relacionadas con la comprensión de la Derivada (ver Figura 2) donde se analiza el uso de diversos registros de representación tanto tratamientos como conversiones, lo que nos llevará a la conclusión de un uso apropiado acerca de la comprensión de la Derivada.

Para desarrollar el experimento se tomo una prueba diagnóstica que nos dio una idea de cómo estaban sus saberes previos para el estudio de las derivadas, en particular sobre el tema nociones básicas sobre funciones. Los resultados proporcionaron una serie de dificultades, que en el transcurso del experimento se fueron modificando, así tenemos que los estudiantes ven a ahora a la pendiente no solo como un simple número si no su interpretación como la medida de la razón de cambio de la variable “y” con respecto al cambio de la variable “x”, reconocen cuando una grafica es función o no, realizan una buena lectura de graficas sobre funciones reconociendo y enunciando sus características.

Luego, describiremos las actividades de la primera fase del experimento (razón de cambio promedio):

Se pasa un video sobre razón de cambio promedio a continuación responden un cuestionario sobre el video, luego los estudiantes reciben una ficha de actividades, en ella encuentran el concepto sobre razón de cambio promedio, así como cuatro situaciones problemas; el primero sugiere una conversión del registro de lengua natural al registro numérico, a continuación se realiza una conversión de un registro numérico a un registro de lengua natural. Situaciones

similares se presentan en las otras situaciones problemas que buscan el manejo de los registros en tratamientos y conversiones.

Para finalizar la sesión, los estudiantes exponen sus ideas y procedimientos en forma voluntaria. Con los resultados en mano se comentan sobre aciertos y errores. El docente cierra el laboratorio *formalizando* el concepto en estudio.

A continuación presentamos dos preguntas del experimento:

En la pregunta (1), se espera que los estudiantes reconozcan y utilicen la definición de Razón de Cambio Promedio, que realicen los cálculos correspondientes, (los estudiantes realizan una conversión, del registro de lengua natural al registro numérico) y finalmente, den el resultado con sus correspondientes unidades, (los estudiantes realizan una nueva conversión, del registro numérico al registro de lengua natural).

**Pregunta 1:**

Un automóvil se encuentra a una distancia  $s$ , en millas, en relación con su punto de partida en  $t$  horas, dado por:  $s(t) = 10t^2$   
 Halle la razón de cambio promedio de la distancia respecto al tiempo, cuando  $t$  cambia de  $t_1=2$  a  $t_2=5$ .

En la Figura (3), se muestra la producción realizada por dos estudiantes:

PRODUCCIÓN DE LOS ESTUDIANTES	ANÁLISIS
<p>Tito:</p> $RCP = \frac{10(5)^2 - 10(2)^2}{5 - 2} = \frac{250 - 40}{3} = \frac{210}{3} = 70 \text{ horas}$	<p>El estudiante aplica la fórmula de RCP; es decir, identifica la variable independiente, reemplaza los valores correspondientes en la función; efectúa operaciones, elabora una diferencia mental en el denominador y obtiene el valor esperado. Como evidencia en la presente figura. Sin embargo, no responde la pregunta del problema, no relaciona las unidades.</p>
<p>Liz:</p> $S(t) = 10t^2 \text{ en } [2; 5]$ $S(t) = \frac{S(x) - S(x_0)}{x - x_0} = \frac{250 - 40}{3} = 70 \text{ p.}$ <p>∴ La RCP de la distancia respecto al tiempo es de 70.</p>	

Figura 3. Producción de los estudiantes de la pregunta 1

En el problema tres se planifica desarrollar una conversión de registro de lengua natural, a registro numérico, luego realiza una conversión del registro numérico, a un registro de lengua natural, el problema muestra dificultad por la unidades y sus operaciones con las fracciones.

**Problema 3:**

Se estima que dentro de  $t$  años la población de cierta comunidad será:

$$P(t) = 20 - \frac{6}{t+1} \text{ Miles de habitantes.}$$

Determine la razón de cambio promedio en el intervalo [2;3]

En la Figura (4), se muestra la producción realizada por dos estudiantes:

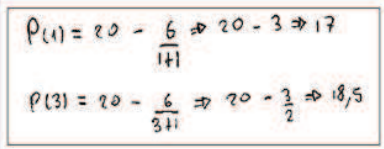
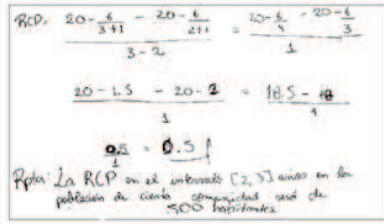
PRODUCCIÓN DE LOS ESTUDIANTES	ANÁLISIS
<p>Tito:</p> 	<p>En este caso Tito, identifica las variables tiempo y cantidad de habitantes. Sin embargo, no reemplaza de acuerdo al intervalo indicado lo hace de <math>t = 1</math> a <math>t = 3</math>. De acuerdo con lo desarrollado, se conjetura que el estudiante no comprendió el problema, lo que podemos constatar en la figura adjunta.</p>
<p>Lucero:</p> 	<p>Reconoce que se trata de una RCP, realiza las operaciones correspondientes, opera sin tomar en cuenta los paréntesis, sin embargo, los resultados parciales son correctos, se presume que los cálculos lo realizó mentalmente, incluso da como respuesta 500 habitantes. Su resultado final es el óptimo dado que da su resultado con unidades incluidas.</p>

Figura 4. Producción de los estudiantes de la pregunta 3

## Reflexiones

Los estudiantes mostraron dificultades, cuando se enfrentaron a situaciones que involucran decimales, números negativos o cantidades grandes, se corrobora dificultades en la parte operativa básica.

Los estudiantes muchas veces relacionan las unidades involucradas en el contexto del problema, sin embargo no lo declaran como parte de la respuesta del problema, porque piensan que es suficiente el resultado numérico, por ello no colocan las unidades como parte de la solución del problema.

Los estudiantes tienen dificultades cuando enfrentan a problemas que involucran a las conversiones. Tienen un mejor desenvolvimiento con los tratamientos.

Los estudiantes muestran mejores resultados en registros algebraicos que en los registros gráficos. Resultado que involucra un uso muy frecuente por parte de docentes y muchos textos de consulta.

Los estudiantes mostraron una mejor comprensión del concepto matemático cuando se realizó el camino didáctico del concepto pendiente a razón de cambio promedio para llegar a una razón de cambio instantáneo que nos conduce a la derivada. Por lo que se propone realizar el estudio de la derivada utilizando este camino didáctico.

## Referencias bibliográficas

Arya, J. y Lardner, R. (2009). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía*. México: Pearson.

Azcárate, C., Bosch, D., Casadevall, M. y Casellas, E. (1996). *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: Síntesis.

Cobb, P. Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. y Hodge, L. (2003). *Design experiments in education research*. *Educational researcher* 32(1), 9-13

Dolores, C. (2007). *Elementos para una aproximación variacional a la derivada*. México:

Universidad Autónoma de Guerrero. Ediciones Díaz de Santos.

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En Hitt, F. (Ed) *Investigación en Matemática Educativa* (pp.173-201), México: Grupo editorial Iberoamericana.

Duval, R. (2004). *Semiósis y pensamiento Humano*. Cali: Universidad del Valle. Grupo de educación Matemática.

Duval, R. (2005). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. *La Gaceta de la RSME* 9(1), 143-168

Haeussler, E., Paul, R. y Wood, R. (2008). *Matemáticas para Administración y Economía*. México: Pearson.

Hoffmann, L. y Bradley, G. (1995). *Cálculo aplicado a administración, economía, contaduría y ciencias sociales*. Colombia: McGraw-Hill.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer año de Universidad sobre la noción matemática de derivada*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Sevilla.

Sánchez-Matamoros, G.; Linares, S. y García, M. (Ed), *Acta latinoamericana de Matemática educativa, La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática*. 11, 267-296. México: Comité Latinoamericana de Matemática Educativa.