LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS EN EL ESTUDIO DE LA VARIACIÓN Y EL CAMBIO

Silvia Vrancken, Mariana Schmithalter, Adriana Englery Daniela Müller.
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral Argentina
svrancke@fca.unl.edu.ar, schmithaltermariana@hotmail.com, aengler@fca.unl.edu.ar, dmuller@fca.unl.edu.ar

Resumen. En este artículo presentamos los resultados de una experiencia realizada en el marco de un proyecto de investigación cuyo objetivo general es favorecer el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en estudiantes de primer año de la universidad.

Diseñamos y pusimos en práctica una secuencia de actividades que permite, a partir de la construcción y/o interpretación de las gráficas de funciones, dar una descripción cualitativa y cuantitativa de las variaciones y cambios involucrados, favoreciendo la visualización y la utilización de distintas representaciones.

Su resolución permitió que los estudiantes generaran ideas variacionales valiosas para una construcción significativa del concepto de función.

Palabras clave: pensamiento variacional, visualización, funciones

Abstract. In this paper we present the results of an experience carried out in the framework of a research project whose overall objective is to promote the development of variational thought and language in first year college students.

We designed and implemented a sequence of activities that through the construction and / or interpretation of function graphs, it enables a qualitative and quantitative description of the variations and changes involved, favoring the visualization and the use of different representations.

Its completion allowed students to generate valuable variational ideas towards a meaningful development of the concept of function.

Key words: variational thinking, derivative, representations

Introducción

Las funciones describen situaciones diversas y se constituyen en un recurso importante para el estudio de numerosos problemas donde aparece la idea de cambio de una variable con respecto a la otra. Las magnitudes que caracterizan un fenómeno están relacionadas de manera que algunas de ellas quedan determinadas por los valores de las demás. De este modo la noción de variación constituye el origen y la base del concepto de función.

Distintos investigadores (Sosa y Aparicio, 2009; Dolores, Chi, Canul, Cantú y Pastor, 2009) expresan que la naturaleza del concepto de función exige que los alumnos desarrollen ideas y estrategias variacionales. Supone básicamente poner atención en la identificación de qué cambia, cómo y cuánto cambia lo que cambia, a través del análisis de la variación de los valores de las variables que intervienen. Esto permite describir las variaciones (directa, inversa, periódica, constante, creciente, decreciente, etc.) y, consecuentemente, caracterizar los distintos tipos de funciones.

Sin embargo, los mismos investigadores, así como nuestra experiencia docente nos muestran que el estudio de la variación, tanto en la escuela media como en la universidad, es muy limitado. Al abordar el estudio de las funciones se privilegia por lo general una actividad matemática en la que abundan los procedimientos y algoritmos, poniendo como marco general la noción de correspondencia entre conjuntos. Los alumnos que recibimos en primer año de la universidad recurren habitualmente a la utilización de tablas y fórmulas, presentando dificultades para interpretar y vincular distintas representaciones.

En el marco de un proyecto de investigación que tiene como objetivo general favorecer el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en nuestros estudiantes de Ingeniería Agronómica, decidimos diseñar y poner en práctica secuencias de actividades que favorezcan el aprendizaje significativo de función, articuladas en torno a la idea de variación y cambio.

Como parte del pensamiento matemático, el término pensamiento variacional, se utiliza con la intención de profundizar un poco más lo que se refiere al aprendizaje y manejo de funciones. Se trata de desarrollar una forma de pensamiento que identifique, de manera natural, fenómenos de cambio y que sea capaz de modelarlos y transformarlos.

Cantoral y Farfán (2000) sostienen que para acceder al pensamiento y lenguaje variacional, se precisa entre otras cosas, del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende. La visualización juega un papel fundamental en el desarrollo de las estructuras cognitivas del alumno y del pensamiento matemático. Se reconoce su valor no sólo como un apoyo en la enseñanza de la matemática, que favorece la intuición y formación de los conceptos, sino especialmente en el descubrimiento, descripción y justificación de resultados. Farfán y Cantoral (2011) manifiestan la necesidad de propiciar la visualización en las clases de matemática "…con la intención de favorecer diversas formas de representación tanto de ideas como de conceptos y lograr con ello explorar otro tipo de argumentaciones" (p. 11).

En este contexto se resalta la importancia del estudio de las gráficas de las funciones en la construcción de conocimiento matemático relacionado a la variación y el cambio. Suárez y Cordero (2008) destacan la necesidad de diseñar situaciones de aprendizaje que involucren la graficación. Tal diseño debe partir de un conjunto de significados de referencia, propiciando la aparición de razonamientos y argumentaciones.

Lo expuesto anteriormente nos llevó a concebir actividades para favorecer la visualización, centrando la atención en la variación y el cambio, como una manera de dar significado al concepto de función. Presentamos algunos aspectos de la experiencia relacionados con el diseño de la secuencia, su puesta en práctica y una valoración de los resultados.

La propuesta

Para el diseño tuvimos en cuenta una serie de estudios preliminares que nos permitieron indagar acerca de los errores y dificultades relacionados al concepto de función, además del estudio de investigaciones relacionadas con el aprendizaje y la enseñanza de este concepto (Vrancken, Engler y Müller, 2010).

La idea básica fue analizar el comportamiento de las funciones e identificar sus propiedades a partir de sus comportamientos gráficos. Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) señalan que los procesos relacionados a las gráficas se refieren básicamente a su construcción e interpretación. La interpretación se relaciona a las habilidades necesarias para dar sentido y significado a una gráfica, teniendo en cuenta tanto sus aspectos locales como globales; mientras que la construcción se refiere a la generación de algo nuevo, como el trazado de puntos a partir de datos, una ley o una tabla de valores y el dibujo de una curva.

A partir de la construcción y/o interpretación de las gráficas, las actividades diseñadas requieren la descripción cualitativa y cuantitativa de las variaciones y cambios involucrados. Se busca que los alumnos generen ideas y estrategias variacionales. Esto significa, según Cantoral, Molina y Sánchez (2005), que hagan uso de maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejen y expresen el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando.

Se favorece también la conversión y el tratamiento en otros registros (verbal, numérico, algebraico), lo cual resulta fundamental para el reconocimiento de distintos rasgos característicos del comportamiento variacional de las funciones, permitiendo el desarrollo de procesos cognitivos que van más allá de la memoria y la algoritmia.

La secuencia se llevó al aula con los alumnos cursantes de Matemática II de la carrera Ingeniería Agronómica de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad Nacional del Litoral, antes de comenzar con el estudio de la razón de cambio y la derivada. Los alumnos ya habían trabajado en el primer cuatrimestre los contenidos referentes a funciones. Buscamos que hagan uso de sus conocimientos previos, replanteándolos en cada situación propuesta, de manera que tomen nuevos sentidos y se profundice en su significado. Teniendo en cuenta la importancia de las interacciones sociales en la construcción del conocimiento, resolvieron las actividades en grupos de a dos. Al finalizar, se revisaron las distintas actividades promoviendo la discusión con la clase completa.

Presentación de las actividades y análisis de los resultados

Por razones de extensión enunciamos sólo dos de las actividades propuestas y analizamos algunos aspectos de las respuestas de los alumnos, sobre un total de 40 trabajos.

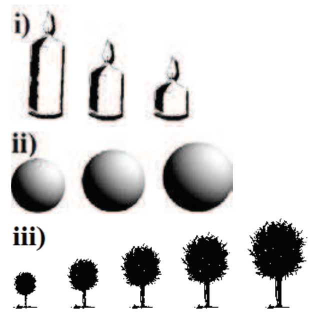
En la primera actividad se presentan representaciones pictóricas de tres situaciones de cambio. A partir de su interpretación, los alumnos deben responder a una serie de preguntas que involucran tareas diferentes. La idea se basa en las actividades presentadas por Sosa y Aparicio en el taller "Estudio de funciones mediante actividades de modelación en ciencias" dictado en el marco de la Vigésimo tercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 23, 2009).

Actividad

I) Observe las situaciones que se presentan en las siguientes ilustraciones. Luego conteste para cada una lo que se solicita.

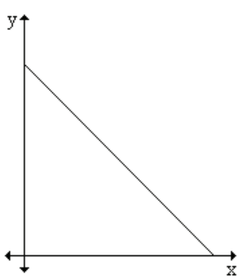
a) ¿Qué es lo que cambia en cada una de las situaciones?

b) Exprese qué cambia y con respecto a qué cambia.

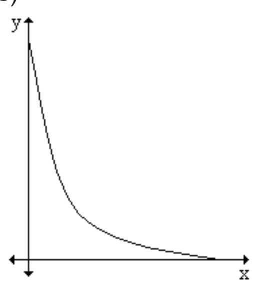


II) Se presentan tres gráficas para cada una de las situaciones. Analice si alguna o algunas pueden corresponder al modelo presentado. Indique qué representan x e y.

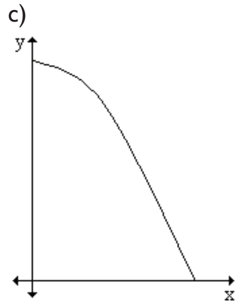
i)a)



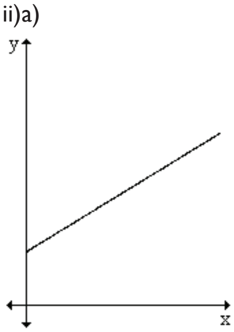
b)



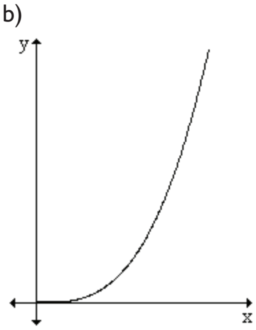
c)



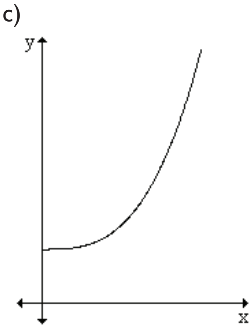
ii)a)



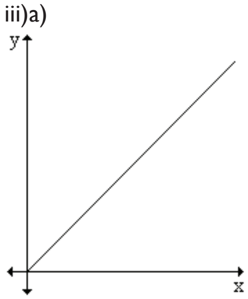
b)



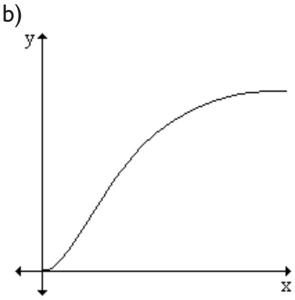
c)



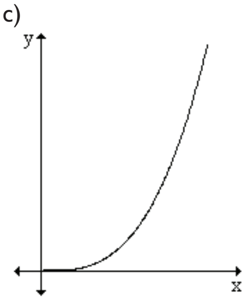
iii)a)



b)



c)



III) Explique qué hace diferente cada una de las gráficas en cada situación.

La primera de las tareas (ítem I) consiste en la identificación de las variables involucradas. Requiere la interpretación del fenómeno y lo que se puede representar en cada uno de ellos.

En el inciso a), una buena cantidad de grupos (19) respondió de manera general para las tres figuras, que lo que cambia es el tamaño. Como respuestas más específicas aparecieron, para la primera figura, cambia la altura de la vela (11 grupos), para la segunda figura, cambia el volumen (10 grupos) y cambia el diámetro de la esfera (seis grupos), mientras que para la última imagen, seis grupos escribieron que cambia la altura de los árboles.

Con respecto al inciso b), 23 grupos respondieron en los tres incisos que lo que cambia, lo hace con respecto al tiempo, mientras que otros diez grupos señalaron que cambia respecto del tiempo al menos para una de las figuras.

A partir de las respuestas de esta primera parte, los alumnos debían, en el ítem II, seleccionar una de tres representaciones gráficas. El análisis está ligado a cómo cambian las magnitudes involucradas, lo que lleva a centrar la atención en su crecimiento o decrecimiento, en la determinación si el crecimiento es o no lineal, y, en este último caso, su concavidad. Leinhardt et al. (1990) expresan que la interpretación cualitativa de una gráfica requiere mirar toda la gráfica o parte de ella, y darse cuenta del significado de la relación entre las dos variables y, en particular, su patrón de variación conjunta.

Analizando las respuestas a la situación i), encontramos que 23 grupos seleccionaron la primera gráfica. Algunas justificaciones fueron: "*La gráfica a corresponde a la situación de las velas, ya que tienen un decrecimiento progresivo constante*", "*La vela se va consumiendo proporcionalmente a medida que pasa el tiempo*".

Pero también una buena cantidad de grupos (9) señaló que la más adecuada es b). El argumento de uno de los dos grupos que justificaron, es el que se presenta en la Figura 1.

(II) Para el caso 1, eligimos la opción b, ya que y sería la altura y x el tiempo, decimos que los primeros cambios son notorios y luego la variación no es tan grande.

Figura 1.

Otros 8 grupos eligieron la gráfica c). Una de las explicaciones fue:

Ya que la vela en un principio quema lentamente y luego más rápido.

Observamos que, en todos los casos, dan argumentos con respecto al comportamiento en relación a la situación y a la forma de la gráfica.

Con respecto al ítem III, no fue contestado por ocho grupos y la mayor cantidad hizo referencia sólo al crecimiento o decrecimiento de las gráficas. Sólo siete grupos se explayaron más, señalando un aumento o disminución de tamaño, aceleración, velocidad, crecimiento o decrecimiento lento o rápido. En la Figura 2 se presenta la respuesta de un grupo para la primera situación.

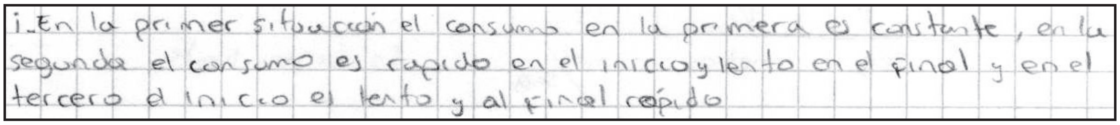

i_En la primer situación el consumo en la primera es constante, en la segunda el consumo es rapido en el inicio y lento en el final y en el tercero el inicio el lento y al final rápido

Figura 2.

Respuestas como estas nos permitieron trabajar en el debate grupal aspectos relacionados a *cómo cambia* un fenómeno cuando se presenta su representación gráfica, qué significa en cada situación que la función crece o decrece y, profundizando un poco más, cómo es el crecimiento o decrecimiento de la curva, lo que lleva al análisis de la concavidad y se relaciona al comportamiento de la velocidad de cambio.

Actividad. Realice una gráfica que le permita comunicar a sus compañeros el movimiento detallado a continuación: Una persona se ubica a un metro de un punto de referencia r y camina a paso constante durante cinco segundos alejándose de r cuatro metros. a) ¿Cuáles son las variables que intervienen en la situación? b) ¿Cómo es el comportamiento de la gráfica cuando la persona se aleja a paso constante del punto de referencia? c) Suponiendo que t representa el tiempo transcurrido y s la posición en determinado instante, el modelo algebraico para la situación presentada es $s(t)=\frac{1}{2}t+1$. ¿Corresponde a la gráfica realizada? d) Analice el comportamiento de la función del inciso c) completando la siguiente tabla y respondiendo las preguntas:

Intervalo $t_1 \le t \le t_2$	$t_2 - t_1$	$s_2 - s_1$	$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$
$0 \le t \le 1$			
$1 \le t \le 2$			
$2 \le t \le 3$			
$3 \le t \le 4$			
$4 \le t \le 5$			

Determine las unidades en que se expresan los valores de cada columna. ¿Qué representan en términos del problema los valores $t_2 - t_1$ y $s_2 - s_1$? ¿Y los valores de la última columna? ¿Cuál es la interpretación geométrica de cada uno de esos valores? (Ayúdese marcando las distintas medidas en la representación gráfica, por lo menos para uno de los intervalos).

La idea para esta actividad fue tomada de García y Rivera (2009), aunque la consigna fue modificada y adaptada a nuestro contexto y necesidades. Se presenta una situación muy sencilla que corresponde a un movimiento con velocidad constante. Se completa la actividad con un análisis cuantitativo a partir de la expresión algebraica de la función que modela el movimiento, lo que pretende caracterizar la variación en un modelo lineal.

Todos representaron la situación con un tramo de recta, lo que muestra que relacionan la velocidad constante con el modelo lineal. En la respuesta a cómo es el comportamiento de la gráfica, 21 grupos contestaron que es creciente, y los demás trataron de explicar cómo es ese crecimiento: *"crece de manera constante"*, *"crece proporcionalmente"*, *"aumenta constantemente"* o *"representa un movimiento rectilíneo uniforme"*.

Con las distintas preguntas que acompañan la tabla del inciso d) se fomenta la relación entre la noción de pendiente y la razón de cambio. En general, 9 grupos no respondieron ninguna pregunta. En relación a qué representan en términos del problema los valores t_2-t_1, la mayoría de las respuestas se refirieron al tiempo. Diez grupos lo interpretaron como *cambio o variación del tiempo*. Otros grupos respondieron directamente que representa el tiempo transcurrido mientras que algunos se refirieron al intervalo de tiempo.
Con respecto a $s_2 - s_1$, nueve grupos interpretaron que representa *la variación o el cambio de la posición*, otros que representa la distancia o el espacio recorrido en metros.

Para los valores de la última columna las dificultades fueron mayores. Doce grupos dieron respuestas como "cambio de la posición respecto del cambio del tiempo", mientras que sólo cuatro señalaron que representa velocidad.

En relación a la interpretación geométrica, salvo un grupo que interpretó los tres valores, los demás se refirieron sólo al cociente, de los cuales nueve señalaron que representa la pendiente de la recta. En la Figura 3 presentamos las respuestas de uno de los grupos.

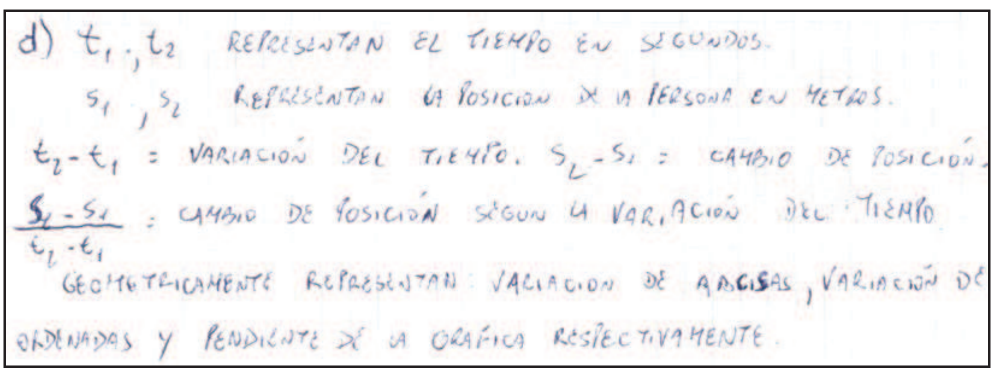

d) t_1 , t_2 REPRESENTAN EL TIEMPO EN SEGUNDOS.
s_1 , s_2 REPRESENTAN LA POSICION DE LA PERSONA EN METROS.
$t_2 - t_1$ = VARIACIÓN DEL TIEMPO. $S_2 - S_1$ = CAMBIO DE POSICIÓN.
$\frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$ = CAMBIO DE POSICIÓN SEGÚN LA VARIACIÓN DEL TIEMPO
GEOMETRICAMENTE REPRESENTAN VARIACION DE ABCISAS, VARIACIÓN DE ORDENADAS Y PENDIENTE DE LA GRÁFICA RESPECTIVAMENTE.

Figura 3.

La respuesta a estas preguntas es importante porque, a partir del procedimiento de obtener velocidades por intervalos y asociar la pendiente con la velocidad los estudiantes pueden deducir características del movimiento describiendo la variación de la velocidad en los distintos intervalos del trayecto y asociándolos a la forma de la gráfica correspondiente. El hecho de que los estudiantes logren asociar la pendiente de los distintos intervalos con la velocidad en cada uno de ellos, permite el paso de una descripción cuantitativa de la variación a una cualitativa del movimiento.

Reflexiones

El análisis de las producciones nos permitió observar que los estudiantes utilizaron y generaron, en distintos momentos, ideas variacionales. La discusión de las situaciones permitió introducir el estudio de las razones de cambio y nociones como la de crecimiento, concavidad, extremos y puntos de inflexión.

A pesar de que surgieron dificultades, las situaciones propuestas promovieron la visualización, favoreciendo de esta manera una mejor conceptualización de la función. La interpretación de las gráficas les sirvió como punto de partida para trabajar con otras representaciones, identificando lo que cambia (las variables), realizando descripciones cualitativas de cómo cambia y calculando cuánto cambia. En todo momento se favoreció la aparición de argumentos que involucran la forma de las gráficas y su funcionamiento al representar el cambio, propiciando interpretaciones que dan significado a la matemática e influyendo positivamente en el desarrollo del pensamiento variacional de los alumnos, y también de su lenguaje variacional, en tanto fueron capaces de comunicar sus ideas.

El proceso de aprendizaje fue influenciado de manera positiva por la interacción en el aula. Fue en la discusión en los pequeños grupos donde observamos los mejores intercambios entre los alumnos. Consideramos que, con este tipo de experiencias, facilitamos que nuestros alumnos produzcan conocimiento matemático, reflexionen sobre sus producciones y generen teoría sobre dicho conocimiento. Todo esto deriva necesariamente en aprendizajes significativos.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En R. Cantoral (Ed.). *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8. Sevilla, España* (pp. 69-91). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., Molina, J. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 463-468. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dolores, C; Chi, A.; Canul, E.; Cantú, C. y Pastor, C. (2009). De las descripciones verbales a las representaciones gráficas. El caso de la rapidez de la variación en la enseñanza de la matemática. *Unión 18*, 41-57.

Farfán, R. y Cantoral, R. (2011). El aprendizaje de las matemáticas desde la investigación en matemática educativa. En R. Farfán (coord.). *El desarrollo del pensamiento matemático y la actividad docente* (pp. 1-28). Recuperado el 5 de marzo de 2012 de http://www.proyectosmatedu.cinvestav.mx/situaciones/docs/LIBRO_DPM_2011.pdf.

García, L. y Rivera, M. (2009). Un acercamiento a la variación por estudiantes de nivel medio superior y superior, basado en la modelación del movimiento. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 755-764. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Leinhardt, G. Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research 60*, 1– 64.

Sosa, L. y Aparicio, E. (2009). Interactuando con el concepto función en situaciones de modelación. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22,* 551-560. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Elementos teóricos para estudiar el uso de las gráficas en la modelación del cambio y de la variación en un ambiente tecnológico. *Revista electrónica de Investigación en educación en ciencias, 3(1),* 51-58. Recuperado el 07 de febrero de 2013 de http://www.scielo.org.ar/scielo.php?pid=S1850-66662008000100005&script=sciarttext.

Vrancken, S.; Engler, A. y Müller, D. (2010). Exploración de las concepciones de nuestros alumnos sobre variables, funciones y cambios. En H. Blanco (comp.), *Acta de la VIII Conferencia Argentina de Educación Matemática,* 320-328. Buenos Aires: SOAREM. Sociedad Argentina de Educación Matemática.