Incremento, Diferencial y Aproximación Lineal

José Ismael Arcos
Facultad de Ingeniería, UAEM
México
iarcos@fi.uaemex.mx
Revisión histórico-didáctica – Nivel Superior

RESUMEN

En los orígenes del Cálculo el *diferencial* de una variable se definió como un incremento infinitesimal de la misma, idea que ha prevalecido en muchos textos de ciencias básicas y de la ingeniería. Sin embargo, cuando los infinitesimales fueron desechados del Cálculo, se hizo lo mismo con la concepción infinitesimalista del diferencial, y ahora, como sabemos, se presenta en los textos de Cálculo como una cantidad finita que resulta del producto de la derivada de la función en un punto y el incremento (finito) de la variable, lo que da lugar a la idea de la *aproximación lineal*, la que también resulta muy útil. En este documento se describen y comentan, desde la perspectiva de la enseñanza, algunas de las diferentes concepciones del diferencial que se han tenido desde los orígenes del Cálculo, a finales del siglo XVII hasta la segunda mitad del XIX.

El diferencial en el Cálculo leibniziano

A fines del siglo XVII, el Cálculo leibniziano se presentaba generalmente en un contexto geométrico, aunque desde los primeros escritos de Leibniz se manifestaba ya la potencialidad de la nueva herramienta para abordar y resolver problemas de la física, particularmente del movimiento. En cuanto al concepto de diferencial, podemos ver, en la definición 2 del *Análisis de los infinitamente pequeños* de L'Hôpital lo siguiente:

> La parte infinitamente pequeña en la que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente es llamada la *Diferencia*… (L'Hôpital, 1696)

En esta definición podemos observar que la diferencial[1] (o diferencia) de una variable era la medida de un cambio infinitesimal de la misma, y que la variación continua de una variable se podía interpretar como una variación con "saltos" infinitesimales. Esta situación se describe claramente en el *Cálculo infinitesimal* de Bezout, escrito a mediados del siglo XVIII, pero publicado medio siglo después. En este texto, en el que el estudio del Cálculo se consideraba necesario para aprender Mecánica, se define diferencial como sigue:

> Cuando se considera una cantidad variable que crece por grados infinitamente pequeños y se desea conocer el valor de esos incrementos, lo que se presenta como más natural es determinar el valor de esa cantidad para un instante cualquiera y el valor de esa misma cantidad para el instante inmediatamente siguiente; entonces, la diferencia de estos valores es el incremento (o el decremento) que recibe esa cantidad: a esto es a lo que se llama *diferencial* de esa cantidad. (Bezout, 1760 ?)

[1] Obsérvese que el término *diferencia* indica justamente la medida del cambio. Sin embargo ese término podría también aplicarse a un cambio finito, de manera que con el tiempo se conservó el término *diferencial* para especificar que se trataba de un cambio infinitesimal, tal como se observa en la referencia dada.

Así pues, de acuerdo con esta definición, podemos pensar en un eje temporal en el que el tiempo transcurre gradualmente, con grados de tamaño infinitesimal *dt*. Siendo *a* un instante dado, entonces $a - dt$ es el instante anterior a *a* y $a + dt$ el instante siguiente de *a* (ver figura 1).

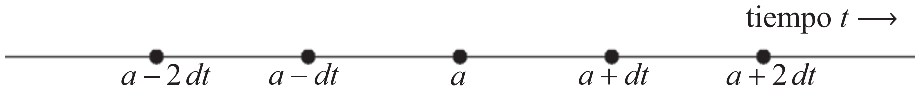

Fig. 1

De esta manera, suponiendo una cantidad *x* que varía con el tiempo, el diferencial de *x*, correspondiente al instante *a*, será: $dx(a) = x(a + dt) - x(a)$. Esta definición, por supuesto, puede generalizarse a cualquier cantidad variable que depende (como una función) de otra; así, si $y = f(x)$, $dy(a) = f(a + dx) - f(a)$.

Ahora bien, a fines del siglo XVII, una curva era considerada como una poligonal con una infinidad de lados, cada uno de ellos uniendo dos puntos infinitamente próximos entre sí. Esta manera de ver las curvas permitía, entre otras cosas, ubicar fácilmente la recta tangente. Por ejemplo, Leibniz, en su "nuevo método de máximos y mínimos...", decía:

> Encontrar la *tangente*, es trazar una recta que une dos puntos de la curva, separados una distancia infinitamente pequeña, o bien, prolongar el lado de un polígono de un número infinito de ángulos, lo que para nosotros es equivalente a una *curva*... (Leibniz, 1684)

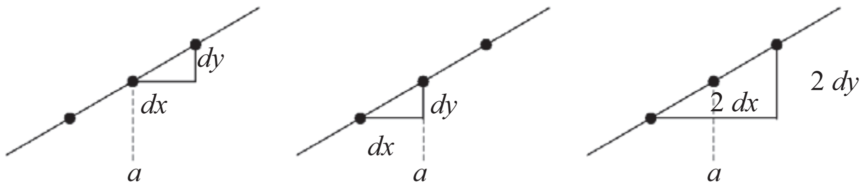

Fig. 2

Esta interpretación infinitesimalista de las curvas simplifica notablemente algunas cuestiones referentes a la recta tangente y a la función derivada; por ejemplo, la pendiente de la recta tangente a una curva definida por $y = f(x)$ (figura 2, izquierda), en el punto de abscisa *a*, estará dada por:

$$m_T(a) = \frac{dy(a)}{dx} = \frac{f(a + dx) - f(a)}{dx} \qquad (1)$$

El diferencial izquierdo de *f*, en $x = a$ (figura 2, centro) será: $df_{-}(a) = f(a) - f(a - dx)$ y el diferencial centrado (figura 2, derecha): $df_c(a) = f(a + dx) - f(a - dx)$. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente, en $x = a$, también se podrá obtener mediante:

$$m_T(a) = \frac{dy_{-}(a)}{dx} = \frac{f(a) - f(a - dx)}{dx} \qquad (2)$$

o $$m_T(a) = \frac{dy_c(a)}{2\,dx} = \frac{f(a+dx) - f(a-dx)}{2\,dx}.$$ [2] (3)

En cuanto al manejo simbólico, también hay simplificaciones. Por ejemplo, si se considera la ecuación $PV = T$, donde P,V y T son cantidades variables (en el tiempo), de manera que un instante después sus valores son $P + dP$, $V + dV$ y $T + dT$ y se desea conocer el incremento infinitesimal dT de la variable T, correspondiente a los incrementos infinitesimales dP y dV de las otras variables, tenemos que $T = PV$, así que

$$dT = (P + dP)(V + dV) - PV = PV + P\,dV + V\,dP + dP\,dV - PV,$$

$$dT = P\,dV + V\,dP + dP\,dV = P\,dV + V\,dP$$ [3]

El diferencial en la segunda mitad del siglo XVIII

Como señalaba Bos (1974), los conceptos básicos del Cálculo leibniziano se presentaban, básicamente, en un contexto geométrico, aunque se abordaron, con éxito, un sinnúmero de problemas en la física. Por otra parte, en el caso de la propuesta de Newton, encontramos una presentación en el contexto del movimiento, aunque se manifestara también un interés particular en el estudio de las curvas:

> Ahora se deben presentar algunos problemas, especialmente los que se refieren a la naturaleza de las curvas, para ilustrar este arte analítico. Primero se observará que todas las dificultades se pueden reducir tan sólo a los siguientes dos problemas:
> 1. Dada de manera continua la longitud del espacio recorrido, esto es, en todo instante de tiempo, encontrar la velocidad de movimiento en cualquier tiempo propuesto.
> 2. Dada de manera continua la velocidad del movimiento, encontrar la longitud del espacio descrito en cualquier tiempo propuesto. (Newton, 1671)

De hecho, como lo plantea Pardo: "Un primer aspecto que se debe consignar es el hecho de que en el siglo XVIII, más que en ningún otro, el trabajo matemático estuvo directamente inspirado por la resolución de los problemas de la física…". (Pardo, 2003)

Así pues, el recurso del Cálculo infinitesimal, sobre todo de la propuesta leibniziana, permitió a los científicos del siglo XVIII abordar y resolver una gran cantidad de problemas de la geometría y la física, desarrollando incluso nuevas ramas del Análisis para tal efecto. Sin embargo, al final de ese siglo los principales matemáticos de la época comenzaron a pensar que ya no había más que descubrir (en las matemáticas). Así, en 1781, Lagrange escribía a D'Alembert:

> "Me parece que la mina de las matemáticas es ya muy profunda, y a menos de que alguno descubra nuevas vetas será necesario, en algún momento, abandonarla. La

[2] Si en estas tres ecuaciones se sustituye el incremento infinitesimal *dx* por uno finito, pero pequeño (por ejemplo, $\Delta x = h = 0.0001$, se obtendrán tres expresiones para aproximar la derivada, llamadas, respectivamente, de diferencias adelantadas, retrasadas o centradas.

[3] En este procedimiento, que podemos encontrar en textos de termodinámica, primeramente se utiliza la definición de diferencial (más claramente expresada por Bezout), y, enseguida, se utiliza una regla básica de la aritmética infinitesimalista, según la cual los infinitesimales de orden mayor resultan despreciables.

> Física y la Química ofrecen ahora una explotación más rica y más fácil; también el gusto de nuestro siglo parece ir en esa dirección y no parece imposible que las cátedras de Geometría de la Academia, se conviertan algún día en lo que las cátedras de árabe son actualmente en las Universidades". (Citado en Pardo, 2003)

Así pues, se comenzó a sentir la necesidad de descontextualizar el Análisis para que éste adquiriera mayor "libertad" y pudiera crecer por sí solo, lo que, a su vez, requería de una profunda revisión de sus fundamentos. Para entonces se tenían ya varias presentaciones del Cálculo, y cada una de ellas tenía sus partidarios y sus particulares características. A pesar de ello, Carnot, en sus *Reflexiones sobre la Metafísica del Cálculo infinitesimal* (1813) indicaba que todas las presentaciones conocidas hasta entonces eran equivalentes entre sí, no siendo más que distintas versiones del método de exhaución de los antiguos griegos.

Sin embargo, parece ser que era la falta de rigor, presente en las "viejas presentaciones" lo que se señalaba como grave deficiencia. Así, en su *Teoría de las funciones analíticas* (1813), Lagrange promete que su propuesta "contiene los Principios del Cálculo diferencial, liberados de toda consideración de los infinitamente pequeños, de los evanescentes, de los límites y las fluxiones, y se reducen al análisis algebraico de cantidades finitas".

En cuanto al concepto de diferencial, en su *Teoría*, Lagrange ni siquiera define el diferencial, sin embargo, Lacroix, quien de alguna manera escribe su texto con base en la propuesta de Lagrange (lo que implica el recurso extensivo del desarrollo en series de potencias), indicaba:

> …tomaré como ejemplo la función $u = ax^3$. Poniendo $x + h$ en el lugar de x y restando la cantidad ax^3 del resultado, se ha obtenido, en la expresión
>
> $$u' - u = 3a^2x + 3ax^2 + ah^3,$$
>
> … el primer término $3ax^2h$ de esta diferencia, que no es sino una porción de la misma, se llama diferencial, y se le designa por *du*… (Lacroix, 1837)

Vemos, pues, que se utiliza un desarrollo en serie de potencias (o serie de Taylor) para expresar el incremento de la función (al que llama diferencia), reconociendo al primer término del desarrollo como el diferencial, es decir, viendo a la diferencial como la aproximación lineal del incremento, que es como se presenta en los textos actuales de cálculo.

El diferencial en el Análisis de Cauchy

Con la propuesta de Lagrange, a finales del siglo XVIII, se comenzaron a explorar propuestas del Cálculo en las que dejaran de utilizarse las cantidades infinitamente pequeñas. En la tercera década del siglo XIX, Cauchy escribe su *Curso de Análisis*, en el que utilizaducho la terminología infinitesimalista, sin embargo, el infinitesimal ya no es una cantidad fija, sino una variable que decrece convergiendo a cero:

> Decimos que una cantidad variable deviene infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente de manera a converger al límite cero. (Cauchy, 1821)

De esta manera, el diferencial deberá ser también redefinido:

Sean como siempre $y = f(x)$ una función de la variable independiente *x*, *i* una cantidad infinitamente pequeña, y *h* una cantidad finita. Si se hace $i = \alpha h$, α será también una cantidad infinitamente pequeña y se tendrá la identidad

$$\frac{f(x+i)-f(x)}{i} = \frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha h}$$

de donde se concluirá: $$\frac{f(x+\alpha h)-f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i} h \qquad (1)$$

Cuando la variable α se aproxima indefinidamente a cero y la cantidad *h* permanece constante, el primer miembro de la ecuación (1) converge hacia un límite que es llamado la diferencial de la función $y = f(x)$. Se indicará esta diferencial por la característica *d*, (…) así que $d\,f(x) = h\,f'(x)$. (Cauchy, 1821)

Como puede observarse, esta definición es, prácticamente, la que se da actualmente en los cursos de Cálculo, considerando que la definición de infinitesimal implica un límite cuando una variable tiende a cero. Por otra parte, como lo indica Jean Dhombres, con la propuesta de Cauchy, el Análisis terminó por abandonar el contexto físico:

> En el Análisis algebraico Cauchy no hace ninguna referencia a la física matemática, a pesar de que él mismo la cultivó con mucho talento, y no parece interesarse en el conocimiento del mundo sensible ni en las aplicaciones de la ciencia matemática (…). Si bien no es el primer texto de matemáticas puras, la obra de Cauchy es tal vez la primera, en análisis, que por sus objetivos, no intenta ninguna justificación ajena a las relaciones intrínsecamente matemáticas... (Dhombres, 1994)

A partir de entonces el Cálculo crece de manera independiente y los infinitesimales (fijos) comienzan a ser desechados, al menos en el quehacer de los matemáticos. Sin embargo, desde esa época y aún en nuestros días, cuando el Cálculo se utiliza en otras ciencias básicas o de la ingeniería, los infinitesimales siguen utilizándose.

Resulta sumamente interesante lo que ocurrió en el caso de Lagrange. Mientras que en su *Teoría de las Funciones Analíticas* no recurría a las cantidades infinitesimales y, por lo tanto, tampoco al diferencial, al menos en se concepción leibniziana, en su *Mecánica analítica* (que fue escrita en la misma época que la *Teoría*) utilizaba claramente una terminología infinitesimalista:

> Ahora, la fuerza aceleratriz que actúa siguiendo la tangente, y que se llama fuerza tangencial, será toda empleada para alterar la rapidez absoluta del cuerpo, y estará expresada por el elemento de rapidez dividido por el elemento de tiempo. (…) Reduciendo las fuerzas normales a una sola, esta fuerza compuesta se encuentra dentro del plano de la curvatura, y se expresa por el cuadrado de la rapidez dividido por el radio osculador, porque en cada instante el cuerpo puede ser visto como metido en el círculo osculador.
> …la variación de estas coordenadas representarán, evidentemente, los espacios recorridos por el cuerpo siguiendo las direcciones de esas coordenadas; por consiguiente, sus diferenciales segundas, divididas por el cuadrado de la diferencial constante del tiempo, expresarán las fuerzas… (Lagrange, 1853)

Así pues, Lagrange hablaba de un "elemento de rapidez dividido por el elemento de tiempo" (es decir, *ds* entre *dt*), o de las "diferenciales segundas, divididas por el cuadrado de la diferencial constante del tiempo" (es decir, $d^2 s / dt^2$), lo que no puede hacerse sin aceptar a las diferenciales como cantidades infinitesimales (fijas). Por otra parte, al indicar que "en cada instante el cuerpo puede ser visto como metido en el círculo osculador", está recurriendo claramente a un argumento de geometría infinitesimalista.

Como mencioné anteriormente, aún hoy podemos ver un Cálculo más bien leibniziano (o euleriano) en los textos de ciencias básicas y de la ingeniería. Por ejemplo, en el texto de Termodinámica de Wark se indica que: "la variación infinitesimal de una propiedad se indicará con el símbolo de la diferencial *d* antepuesta al símbolo de la propiedad. Por ejemplo, el cambio infinitesimal en la presión de un sistema está dado por *dp*…" (Wark, 1987). Esta situación nos debe llevar a los docentes a preguntarnos sobre la pertinencia de seguir ofreciendo una presentación del Cálculo que resulta claramente inadecuada, al menos en las aulas de las escuelas de ingeniería.

Referencias Bibliográficas

Bezout, E. (1999). *Cálculo infinitesimal.* México: Limusa-IPN. (Trabajo original en francés publicado en el siglo XVIII).

Bos, H. J. M. (1974). Differentials, higher order differentials and the derivative in the leibnizian calculus. *Arch. Hist. Exact Sc. 14*, 1-90.

Carnot, L. (1813). *Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitesimal* (2a. Ed.) París, Francia: Gauthier-Villars.

Cauchy, A. L. (1994). Curso de análisis. C*olección MATHEMA*. México: UNAM.

Lacroix, S. F. (1837). *Traité elémentaire de Calcul Différentiel et de Calcul Integral* (5a. ed.). Paris, Francia: Bachelier.

Lagrange, J. L. (1813). *Théorie des fonctions analytiques* (3a. ed.). Paris, Francia : Courcier.

Lagrange, J., L. (1853). *Méchanique Analytique* (3a. ed.). Paris, Francia.

Leibniz, W. G. (1983). Nouvelle method pour les maxima et les minima. *Oeuvre concernant le Calcul Infinitesimal*. París, Francia: J. P. Blanchard. (Obra original publicada en latín en las actas de Leipzig en 1684).

L'Hôpital, M. de (1998). Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas. *Colección MATHEMA*. México: UNAM.

Newton, I. (2001). Tratado de Métodos de Series y Fluxiones. *Colección MATHEMA*. México: UNAM.

Pardo, V. (2003). Lagrange, la elegancia matemática. *La matemática y sus personajes 14*. España: Nivela.

Wark, K. (1991). *Termodinámica* (2a. ed.). México: McGraw-Hill.