

# Conflictos Epistémicos en un Proceso de Estudio de la Noción de Función. Implicaciones para la Formación de Profesores

Juan D. Godino, Miguel R. Wilhelmi y Delisa Bencomo

Universidad de Granada, Universidad Pública de Navarra y Universidad Nacional

Experimental de Guayana

España y Venezuela

jgodino@ugr.es

Gráficas y funciones – Nivel Superior

## Resumen

La intención última de la investigación en didáctica de las matemáticas (DM) es encontrar dispositivos “idóneos” para la enseñanza y el aprendizaje de nociones, procesos y significados de objetos matemáticos. De esta manera, un objetivo para la DM debe ser la descripción y la valoración de la pertinencia de un proceso de instrucción matemática efectivo; asimismo, es necesario determinar pautas para la mejora del diseño y la implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. Estas implicaciones para la docencia no tienen carácter normativo o técnico (obtención de un listado de prescripciones “a ejecutar”), sino explicativo. En este trabajo analizamos la idoneidad de la dimensión epistémica de un proceso de instrucción sobre la noción de función con estudiantes universitarios.

## Criterios de idoneidad de un proceso de instrucción matemática

La intención última de la investigación didáctica es encontrar dispositivos “óptimos” para la enseñanza y el aprendizaje de nociones, procesos y significados de objetos matemáticos, teniendo en cuenta las restricciones institucionales de las dimensiones cognitiva, epistémica e instruccional. La *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989) articula el papel de las producciones de los investigadores con las necesidades de acción en los procesos de enseñanza, permitiendo la evolución de una didáctica explicativa hacia una didáctica normativa o técnica (apoyada en una teoría y contrastada experimentalmente). Esta evolución es compleja y costosa, por supuesto. Pero además, la aplicación de los productos técnicos está mediatizada por la formación matemática y didáctica de los profesores, que son quienes en última instancia deben poner en marcha dichos recursos. Por ello, es necesario poder valorar la práctica docente de los profesores y, a partir de esta valoración, determinar pautas para la mejora del diseño y de la implementación de procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos.

El objetivo en este trabajo es, pues, en cierta forma, inverso al de la ingeniería didáctica: partiendo de realizaciones efectivas<sup>1</sup>, evaluar la idoneidad y pertinencia de un proceso de instrucción matemática. Apoyándonos en la propuesta elaborada por Godino (2003) proponemos evaluar la idoneidad de los procesos de instrucción matemática según tres criterios:

---

<sup>1</sup> Por realizaciones efectivas nos referimos tanto a la actividad matemática desarrollada por los estudiantes como a las acciones reguladoras, normativas o de institucionalización realizadas por el profesor en un proceso de estudio que ya ha tenido lugar.

1. *Idoneidad epistémica*: adaptación entre los significados institucionales implementado y de referencia, que, en particular, supondría la elaboración de una transposición didáctica *viable* (capaz de adaptar el significado implementado al pretendido) y *pertinente* (capaz de adaptar el significado pretendido al de referencia).
2. *Idoneidad cognitiva*: el “material de aprendizaje” está en la *zona de desarrollo potencial* (Vygotski, 1934) de los alumnos; con otras palabras, que el desfase entre los significados institucionales implementados y los significados personales iniciales sea el máximo abordable teniendo en cuenta las restricciones cognitivas de los alumnos y los recursos humanos, materiales y temporales disponibles.<sup>2</sup>.
3. *Idoneidad instruccional*: las configuraciones y trayectorias didácticas posibilitan que el profesor o los alumnos identifiquen conflictos semióticos *potenciales (a priori)*, *efectivos* (durante el proceso de instrucción) y *residuales (a posteriori)*, para resolver dichos conflictos mediante la *negociación de significados* (utilizando los recursos disponibles, que determinan restricciones institucionales de carácter matemático y didáctico).

Vamos a aplicar y desarrollar estas nociones al análisis de la idoneidad de un proceso de instrucción sobre la noción de función para un grupo de estudiantes universitarios de primer curso de ingeniería. La pertinencia del análisis de este caso se fundamenta en su representatividad de un tipo de comportamiento instruccional más general implementado según un enfoque “constructivista ingenuo”.

Para cumplir los objetivos esbozados, en la sección 2 describimos el proceso instruccional observado; en la sección 3, introducimos la noción de conflicto epistémico; en la sección 4 discutimos la idoneidad de la dimensión epistémica del proceso instruccional; y, por último, en la sección 5, hacemos una breve síntesis del estudio realizado y resaltamos algunas implicaciones del mismo.

### Descripción del proceso instruccional observado

El objetivo de la enseñanza observada consiste en que los estudiantes recuerden, interpreten y formalicen las definiciones de correspondencia, función, rango, dominio y tipos de funciones, aplicándolas en una situación que pone en juego conocimientos de la física: el lanzamiento vertical hacia arriba de una pelota con una velocidad inicial (tabla 1). Se supone que los alumnos han estudiado previamente las definiciones de dichas nociones y se acepta que la tarea matemática es un “ejercicio de aplicación”. Implícitamente, el profesor presupone que los estudiantes son capaces de interpretar estas definiciones, de realizar una *generalización disyuntiva* (Tall, 1991, p.12) y, de esta forma, identificar los componentes esenciales de la función parabólica que modeliza la situación física y utilizar el significado aprendido como instrumento para la realización de la tarea propuesta.

---

<sup>2</sup> En el análisis de la dimensión cognitiva es preciso tener en cuenta los procesos sociales de construcción y comunicación de los objetos matemáticos. Las restricciones institucionales (de personal, materiales y de tiempo) determinan un marco para el análisis y la determinación de la dimensión cognitiva: “lo cognitivo” no es sinónimo de “proceso mental”.

Se arroja una pelota directamente hacia arriba con una velocidad  $v_0$  por lo que su altura  $t$  segundos después, es  $y(t) = v_0 \cdot t - g \cdot t^2 / 2$  metros, donde  $g$  es la aceleración de la gravedad. Si se lanza la pelota con una velocidad de  $32 \text{ m/s}$  y  $g = 10 \text{ m/s}^2$  (aprox.):

1. Determinen la altura máxima que alcanza la pelota, construyendo la gráfica de  $y(t)$ .
2. ¿Es  $y(t)$  una relación o una función? Si es una función, ¿cuál es su dominio, codominio y rango?
3. ¿Es  $y(t)$  una función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva?
4. Si  $w(t) = 10 - 2t$  es la velocidad de desintegración de la pelota, ¿a qué altura llegará, ahora, al cabo de tres (3) segundos? Calcule la función compuesta  $(y \circ w)(3)$ .
5. Al cabo de cuanto tiempo regresará la pelota al lanzarla con una velocidad de  $32 \text{ m/s}$ ?
6. ¿Qué velocidad hay que dar a la pelota para que alcance una altura máxima de  $100 \text{ m}$ .
7. ¿Qué altura alcanzará la pelota y qué velocidad hay que imprimirle para que regrese a los seis segundos?

Tabla 1: Cuestiones propuestas a los estudiantes

Para trabajar las cuestiones propuestas se dedicaron cuatro clases de 45 minutos. El profesor organizó el proceso de estudio dividiendo la clase en equipos de cuatro alumnos, asignando a cada uno de ellos una parte de la tarea. Un alumno de cada grupo explicó al resto de la clase la solución encontrada en el seno del grupo. El profesor completaba o corregía la explicación del alumno. La *trayectoria didáctica implementada*, es decir, la secuencia de modos de gestión de los significados implementados a propósito de un objeto matemático específico (modelización de una situación física mediante una función), incluye, por tanto, configuraciones de tipo *cooperativo*, *dialógico* y *magistral* (Godino, 2003, pp.202–204).

### Conflictos epistémicos en un proceso de instrucción matemática

Para valorar la idoneidad y pertinencia de un proceso de estudio matemático tenemos en cuenta tres dimensiones: *epistémica* (relativa a los significados institucionales), *cognitiva* (relativa a los significados personales) e *instruccional* (relativa a las intervenciones del director de estudio y a la disponibilidad y utilización de recursos materiales y de tiempo).

Un proceso de instrucción es idóneo desde el punto de vista epistémico si el significado implementado es fiel al significado pretendido y éste, a su vez, lo es al de referencia. En muchas ocasiones, en un proceso de estudio matemático, es posible identificar algún desajuste fundamental entre los significados institucionales de referencia y pretendido con el implementado, que no han sido previstas *a priori* como constituyentes del proceso instruccional y que representan decisiones didácticas desafortunadas.<sup>3</sup>. Llamamos *conflictos epistémicos* a todos estos desajustes, los cuales condicionan el proceso de estudio y los aprendizajes de los estudiantes.<sup>4</sup>.

<sup>3</sup> Estas decisiones son de tres tipos según el agente gestor del significado: el *director de estudio* (en la implementación del significado institucional), la *institución* (en la determinación del significado pretendido a partir del de referencia), la *noosfera* (en la identificación del significado de referencia a partir del significado cultural asociado al objeto matemático —noción, propiedad, argumento, etc.).

<sup>4</sup> De manera similar, teniendo en cuenta la definición de idoneidad de cada una de las dimensiones, se define “conflictos *cognitivo*” y “conflicto *instruccional*”.

La valoración de la idoneidad de un proceso de instrucción matemática requiere disponer de información detallada de los hechos que ocurren y elementos de referencia que autoricen a emitir los juicios de adaptación, pertinencia o eficacia correspondientes a la dimensión evaluada. Uno de los objetivos de la modelización mediante procesos estocásticos y sus correspondientes estados que propone Godino (2003) es ayudar a identificar conflictos epistémicos, cognitivos e instruccionales, que son origen de desajustes entre el diseño del proceso instruccional y su puesta en escena. La identificación de estos conflictos y su descripción permite emitir un juicio de valor sobre la idoneidad de un proceso de instrucción matemática.

La valoración de la idoneidad de un proceso instruccional requiere registrar un complejo de informaciones sobre el estado y evolución de los distintos componentes y dimensiones que lo definen. Es necesario, por tanto, usar diversos métodos y técnicas de observación, registro y medida de datos (cuestionarios, entrevistas, grabaciones audio-visuales, etc.) y determinar los estados cognitivos de los estudiantes en diferentes momentos del proceso instruccional.

Los datos de que disponemos para el análisis del proceso instruccional que usamos como ejemplo ilustrativo son: por un lado, el programa general de la asignatura y libros de texto recomendados (*significado institucional de referencia local*); por otro lado, la guía de tareas a realizar (*significado institucional pretendido*); y, por último, la grabación audio-visual del desarrollo de las cuatro clases (*significado institucional implementado*). Basándonos en este material, y utilizando la metodología descrita en Godino (2003), analizamos la idoneidad epistémica del proceso instruccional observado.

## **Idoneidad epistémica**

### **Tipos de conflictos epistémicos**

Según la especificidad del conflicto epistémico con relación al sistema de prácticas operativas y discursivas relativas al objeto matemático que se desea introducir o desarrollar, los conflictos los clasificamos en generales y específicos. Se tiene un *conflicto epistémico general* cuando se refiere a un proceso matemático (definición, demostración, interpretación, etc.) no específico de la clase de problemas de la que emerge el objeto. En caso contrario, llamamos *específico* al conflicto epistémico.

La identificación de un conflicto, general o específico, supone la observación de un desajuste fundamental entre dos *entidades praxémicas* (problemas o acciones), entre dos *entidades discursivas* (conceptos, propiedades o argumentos) o entre dos *juegos de lenguaje* que se introducen o desarrollan en dos marcos institucionales relacionados. Estos desajustes se identifican en la utilización (*acción*), la construcción (*acciones-argumentaciones*) y la comunicación (*lenguaje-argumentación*) de nociones, proposiciones y problemas. De hecho, los problemas, acciones, lenguaje, nociones, proposiciones y argumentos (como entidades constituyentes de los significados institucionales y personales) son los *observables* que permiten hacer operativos los criterios de idoneidad y, por lo tanto, valorar un proceso instruccional. Además, estos desajustes se pueden describir en términos de las cinco *facetas cognitivas duales*: personal -

institucional, ejemplar - tipo, ostensivo - no ostensivo, elemental - sistémico, expresión - contenido<sup>5</sup>

En la trayectoria epistémica se distinguen secuencias en las cuales existen conflictos epistémicos, que no obedecen a intervenciones establecidas a priori por el profesor y cuyo objetivo podría ser que los estudiantes superaran un *obstáculo cognitivo* o *epistemológico*. A modo de ejemplo, identificaremos dos conflictos en la experiencia observada.

## **Dos ejemplos de conflictos epistémicos**

### *Conflicto 1: pretendido-implementado, específico, problema y ejemplar-tipo*

El principal conflicto epistémico es la relación que se establece entre la elección y formulación de la tarea matemática propuesta a los alumnos para el estudio de la noción de función y el uso que se hace de la misma (dentro del proceso de estudio): se plantea una problemática de naturaleza formal-discursiva que es ajena al problema de modelización.

Teniendo en cuenta la clasificación de los conflictos introducida, este conflicto queda identificado por los cuatro descriptores siguientes: *pretendido-implementado* (puesto que se produce en este momento del proceso adaptativo de los significados institucionales), *específico* (porque es consustancial a la tarea solicitada), *problema* (la principal entidad primaria involucrada es la situación propuesta) y *ejemplar-tipo* (la función cuadrática es representativa de la noción genérica de función; el profesor acepta, implícitamente, que la transferencia del caso particular a la noción formal de función es transparente).

### *Conflicto 2: de referencia-pretendido, general, propiedades y ejemplar-tipo*

P: “Una correspondencia. No puede ser función. Esto es una correspondencia”.

Toda función es una correspondencia; de la misma forma que todo cuadrado es un rectángulo o que toda sucesión es una función. La práctica matemática tiende a identificar con el nombre la característica que discrimina al objeto dentro de una clase más amplia. De esta forma, se fuerza en el lenguaje la exclusión de familias de objetos contenidos en clases más extensas: “es una función, no una correspondencia”, “es un cuadrado, no un rectángulo”, “es una sucesión, no una función”, etc.

De manera más propia debiera decirse: “es una función, un tipo particular de correspondencia”, “es un cuadrado, un tipo particular de rectángulo”, “es una sucesión, un tipo particular de función”, etc.

El conflicto queda identificado con los descriptores siguientes: *de referencia-pretendido* (el significado pretendido establece la siguiente afirmación categórica: el conjunto de las funciones y el de las correspondencias son disjuntos), *general* (se excluye a una clase de objetos identificada —funciones— del resto de objetos del universo de referencia —correspondencias), *propiedad* (para identificar una clase de objetos —funciones— dentro de una clase más amplia —correspondencias— se utiliza una única característica necesaria —si

---

<sup>5</sup> De esta forma, los conflictos se pueden clasificar, al menos de forma teórica, en 120 tipos diferentes (no disjuntos entre ellos).

$f(a) = b$  y  $f(a) = b'$ , entonces  $b = b'$  — que no es suficiente) y *ejemplar-tipo* (la función es un ejemplar de una clase más amplia denominada correspondencia).

## **Reflexiones e implicaciones**

Desde el punto de vista educativo, no es suficiente un conocimiento formal del objeto función, centrado en el componente discursivo; el diseño de las tareas instruccionales y la implementación de una *trayectoria didáctica* idónea requiere del profesor un conocimiento profundo de los diversos significados de los objetos matemáticos.

El análisis de la dimensión epistémica que hemos realizado del proceso de enseñanza y aprendizaje de la noción de función ha mostrado la utilidad y pertinencia de las herramientas teóricas aplicadas. La noción de idoneidad didáctica, y sus tres dimensiones principales — epistémica, cognitiva e instruccional (Godino, 2003; Wilhelmi, Bencomo y Godino, 2004)— permite centrar la atención del análisis didáctico en las interacciones entre los significados institucionales y personales, en el contexto de un proyecto educativo. La comparación entre el significado de referencia de la noción de función y algunos elementos del significado implementado en el proceso instruccional nos ha permitido identificar las concordancias y desajustes (conflictos epistémicos) entre ambos significados, y por tanto, valorar el grado de idoneidad epistémica.

Teniendo en cuenta los conflictos epistémicos identificados podemos valorar la idoneidad epistémica del proceso de estudio observado como “mejorable”. El desarrollo del proceso de estudio ha tenido numerosos puntos críticos cuando se ha abordado la discriminación del modelo formal de función (correspondencia entre conjuntos) y las relaciones entre este modelo con los modelos tabular, gráfico y expresión analítica. No obstante, nos parece adecuado comenzar con cuestiones de predicción, como motivación primaria de la función, usando el lenguaje gráfico (“*Determinar la altura máxima que alcanza la pelota, construyendo la gráfica de  $y(t)$* ”).

El análisis epistemológico de los objetos matemáticos, realizado con un enfoque y herramientas conceptuales apropiadas, debe ser un objetivo esencial en la formación del profesor de matemática. Las descripciones y las interpretaciones que hemos realizado de los mismos, usando algunas nociones de la Teoría de las Funciones Semióticas (Godino, 2003), tienen consecuencias para la formación de profesores. Es necesario que los profesores planifiquen la enseñanza teniendo en cuenta los significados institucionales que se pretenden estudiar, adoptando para los mismos una visión amplia, no reducida a los aspectos discursivos (idoneidad epistémica). Asimismo, es necesario diseñar e implementar una trayectoria didáctica que tenga en cuenta los conocimientos iniciales de los estudiantes (idoneidad cognitiva), identificar y resolver los conflictos semióticos que aparecen en todo proceso de estudio, empleando los recursos materiales y temporales necesarios (idoneidad instruccional). Estas idoneidades deben ser integradas teniendo en cuenta las interacciones entre las mismas, lo cual requiere hablar de la *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de pertinencia (adecuación al proyecto de enseñanza) de un proceso de instrucción, cuyo indicador empírico puede ser la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes y los significados institucionales pretendidos.

## **Reconocimiento**

Este trabajo se ha realizado en el marco de los proyectos: MCYT-BSO2002-02452, Resolución nº1.109/2003 de 13-octubre de la UPNA y MCYT-HA2002-0069.

## **Referencias Bibliográficas**

- Artigue, M. (1989). Ingenierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(3), 281–308.
- Godino, J.D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Obtenido en mayo 15, 2005, del sitio web de la Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática: <http://www.ugr.es/local/jgodino>
- Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrech, Holanda: Kluwer.
- Vygotski, L.S. (1989). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores* (2a. ed.). Barcelona, España: Crítica-Grijalbo. (Trabajo original publicado en 1934).
- Wilhelmi, M.R., Bencomo, D. y Godino, J.D. (2004). *Criterios de idoneidad de un proceso de instrucción matemática*. Documento presentado en el XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza de la Matemática. Universitat Jaume I y RSME, Castellón, España.