Las Funciones de la Demostración en el Aula de Matemática

Cecilia R. Crespo y Christiane C. Ponteville
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V.González" y Universidad de Buenos Aires
Argentina
ccrespo@sinectis.com.ar, chponteville@velocom.com.ar
Pensamiento Lógico – Nivel Medio

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación que pretende analizar la concepción que tienen los docentes de la noción de demostración dentro de la matemática y la influencia en sus prácticas. En él se plantea la necesidad de diferenciar diversas funciones para la demostración en matemática analizando su presencia en las concepciones de docentes y estudiantes del profesorado de matemática. El papel y la función de la demostración en el aula, o ha sido totalmente ignorada o bien se presta como medio de certeza, y en menor medida de explicación. Estas funciones más priorizadas se pueden vislumbrar a través de las respuestas obtenidas.

Antecedentes

Este trabajo forma parte de una investigación (Crespo Crespo, Ponteville 2001, 2003a, 2003b, Crespo Crespo 2003) cuyo objetivo global es analizar las concepciones de los docentes acerca de las ideas matemáticas y su influencia en la práctica docente.

Se apoya en diversas investigaciones de la matemática educativa que señalan que el docente de matemática enseña esta disciplina de acuerdo con sus ideas acerca de la matemática (Ibañes, Ortega 1997). Estas investigaciones señalan que si un profesor piensa que el carácter deductivo de la matemática es su esencia, en sus clases pondrá un gran peso en las demostraciones. Si, por el contrario piensa que la matemática es un conjunto de fórmulas y algoritmos aplicables a diversas situaciones, entonces el alumno ejercitará para adquirir fluidez en su uso.

En la primera etapa de esta investigación, se indagaron las concepciones de los docentes y estudiantes del último año de la carrera de profesorado de matemática acerca de la matemática, su enseñanza y algunos conceptos claves en la manera de abordar la tarea docente. En la etapa en la que nos encontramos, hemos centrado la investigación en el concepto de demostración, su presentación en el aula como problema y un estudio histórico-epistemológico con la finalidad de conocer la evolución del concepto de demostración y sus implicaciones cognitivas, así como los obstáculos que se presentan a los alumnos para lograr un aprendizaje significativo de este contenido.

Las investigaciones que se realizaron hasta el momento, permitieron concluir que la enseñanza de la demostración como contenido matemático no es siempre una problemática asumida por los docentes en forma sistemática, sino en algunos casos de manera intuitiva, tomando como modelo aquel en el que han sido formados. Los docentes diferencian la idea de hacer demostraciones y la de enseñar a demostrar, siendo esto último algo que pocos llevan a cabo en el aula. La falta de presencia explícita dentro de los planes de estudio de las carreras de profesorado de matemática y dentro de las planificaciones de la enseñanza en los distintos niveles de las demostraciones como contenido, hace necesaria la reflexión y abre una brecha muy importante dentro de la investigación en matemática educativa, pues muestra que la demostración, concepto central de la matemática como ciencia, no lo es en la práctica dentro de su enseñanza. A partir de lo que puede observarse en esta investigación, surge la idea de que el concepto de demostración y su enseñanza deben ser tenidos en cuenta como problemática de suma importancia en la formación docente. De esta forma, la demostración como concepto, central en la matemática como ciencia y cuyo valor formativo no es dudado por docentes y futuros docentes, no sea dejada de lado en la enseñanza en los distintos niveles.

Diferentes conceptos vinculados con la demostración

La palabra demostración es utilizada en distintos contextos con diversos sentidos y se la relaciona también con algunos términos que para algunos autores son sinónimos y para otros poseen diferencias fundamentales entre sí. La demostración no es un concepto que pueda ser enseñado ni transmitido del mismo modo en un aula de clase que en un ambiente científico. En la práctica de la enseñanza de la matemática se utilizan equivalentemente los términos explicación, argumentación, prueba y demostración. Aceptarlos como sinónimos constituye un obstáculo epistemológico para el análisis conceptual que estamos realizando, pues esto conduce a fusionar distintos niveles de actividad de los alumnos, impidiendo entender la conceptualización de sus ideas.

Al abordar el concepto de demostración, es de gran utilidad conocer la significación que le otorga Balacheff. Este autor (Balacheff, 1982) utiliza el término *explicación* como idea primitiva de la cual derivan las de prueba y demostración, pretende hacer inteligible la verdad de una proposición ya conocida. No se reduce a una cadena deductiva, sino que se organiza y construye a partir del lenguaje coloquial. Una *prueba* se compone, por su parte, de explicaciones aceptadas por una comunidad dada en un momento dado, lo que hace que pueda evolucionar en el tiempo o ser aceptada por una comunidad determinada y no por otra. Para que una explicación sea una prueba debe ser reconocida por alguien como razón suficiente en el correspondiente marco discursivo.

Duval distingue entre explicación y argumentación. En la *argumentación* se trata de mostrar el carácter de verdad de una proposición, mientras que en la *explicación* los enunciados tienen una intención descriptiva de un fenómeno, resultado o comportamiento (Duval, 1999).

Tanto Balacheff como Duval utilizan el término *demostración* con significados similares, como una secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas. El concepto de demostración también está muy ligado al de verdad. Para Duval el objeto de una demostración es la verdad y, por tanto, obedece a criterios de validez, mientras que la argumentación se propone lograr la convicción del otro o de sí mismo, obedeciendo a criterios de pertinencia. Las demostraciones son pruebas que se han codificado, pero algunos pasos pueden no estar explicitados.

Otros autores (Godino, Recio, 2001) consideran que la idea de explicación de Balacheff puede asimilarse a la noción de *argumentación* de Duval. Utilizan el término *demostración* para referirse de modo genérico al objeto emergente del sistema de *prácticas argumentativas* (o argumentaciones) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, o sea situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción.

En matemática, desde el punto de vista formalista, una demostración en una teoría es una secuencia de proposiciones, cada una de las cuales o bien es un axioma, o bien una proposición que ha sido derivada de los axiomas iniciales por las reglas de inferencia de la teoría. Desde esta óptica, un teorema es una proposición así derivada por una demostración. Esta concepción de las demostraciones, se basa en aspectos sintácticos, haciendo hincapié en la aplicación de reglas de inferencia precisas y a veces sin hacer uso de la intuición. Desde esta perspectiva, la verdad se reduce a la coherencia dentro de un sistema axiomático.

Las demostraciones ocupan una posición central en la actividad matemática, ya que constituyen el método de prueba de las afirmaciones de esta ciencia, en contraposición, por ejemplo de lo que ocurre en la física o en otras ciencias experimentales o sociales, en las que el método de verificación de las afirmaciones consiste en su contrastación con la realidad.

Las funciones de la demostración

La demostración matemática es básicamente un proceso validativo que siguen los matemáticos para justificar las propiedades de sus teorías. Aunque existen otras opciones, el modelo actual dominante de demostración, dentro de la institución matemática, es la demostración lógico-formal.

Sin embargo, esta no es la única, ni la más importante de las funciones de la demostración en matemática. Algunos autores (de Villiers, 1993), presentan un modelo en el que se evidencian las siguientes funciones:

- *Verificación o convicción*: establece la verdad de una afirmación. Se piensa a las demostraciones como autoridad absoluta para establecer validez de conjeturas y se considera detrás de teoremas la presencia de una secuencia de transformaciones lógicas. Normalmente se busca la demostración después de haber tenido la convicción de validez.
- *Explicación*: exhibe los por qué de la verdad. En resultados evidentes o apoyados en evidencia cuasiempírica, la demostración explica causas.
- *Sistematización*: organiza diversos resultados en un sistema que incluye axiomas, conceptos básicos y teoremas. Esta función ayuda a identificar inconsistencias y razonamientos circulares. Simplifica teorías integrando conceptos y proporcionando una visión global de la estructura subyacente.
- *Descubrimiento o creación*: permite llegar a nuevos resultados. Esta función se apoya en la idea de que no todas las propiedades se descubren por intuición sino que algunas pueden ser el producto de la demostración misma.
- *Comunicación*: transmite el conocimiento matemático. En este punto se considera a las demostraciones como forma de discurso, de intercambio basado en significados compartidos.

Este modelo busca exponer algunas de las funciones de la demostración dentro de la actividad matemática científica pues permite vislumbrar las posibilidades de modificar algunas prácticas vinculadas con la demostración en el aula evitando caer en la función formalista de verificación que se reconoce generalmente en la enseñanza de la matemática en las aulas.

Resultados de la investigación

En el análisis cualitativo realizado a partir de encuestas y entrevistas a 12 docentes de nivel medio y 40 estudiantes del último año de la carrera de profesorado de matemática, surge que para ellos no existen distintos niveles de demostraciones ni de argumentaciones. Por otra parte, se evidencia una concepción de la matemática como única e intemporal, si bien se reconocen distintas maneras de realizar demostraciones para una propiedad dada. Esto se pone de manifiesto pues en ninguno de los casos aparece explícitamente la aceptación de una comunidad para aceptar una demostración, no existiendo ningún reconocimiento de la matemática como una construcción social.

La idea de demostración va unida a la presentación de teoremas en clase y se evidencian algunas de las funciones de la demostración. Por ejemplo, surge la idea de la importancia de las demostraciones en el aula para justificar la validez o convicción de los teoremas:

> *"Las demostraciones son importantes para que los alumnos sepan que las propiedades o teoremas se cumplen no porque el profesor lo dice, sino porque tienen una validez más rigurosa, que se obtiene con la demostración: Además pienso que los alumnos quedan "maravillados" al ver que las cosas no son porque sí".*
> *"Es importante demostrar en la clase de matemática porque es lo que diferencia a la matemática de otras ciencia y le da validez. Por la forma de trabajo que ella implica, ordenada y justificando cada paso a seguir, fomenta una forma de pensar y de realizar la tarea".*

Paralelamente, también surge la idea de la demostración como un modo de explicar los conceptos matemáticos:

> *"La demostración ayuda a los alumnos a la comprensión de los temas y a su vez sirve como repaso de ideas ya vistas en clase. De esta manera se ve que los conceptos matemáticos no son cosas inventadas, sino cosas comprobables".*
> *"Es importante demostrar, a veces sí y a veces no. Si la demostración aclara y ayuda a entender, vale hacerla, pero si dificulta la enseñanza y el aprendizaje, no".*

En algunas respuestas se evidencian ambas maneras de ver las demostraciones: como proceso de validación y de explicación:

> *"Es importante demostrar, ya que muchas veces los alumnos se preguntan de dónde salen las fórmulas o por qué se deben hacer de tal manera los ejercicios".*

Todos los encuestados reconocen la importancia de la demostración tanto en la matemática como en el aula, si bien algunos no manifiestan explícitamente las razones de dicha importancia. Un grupo numeroso apoya su argumentación sobre la importancia de la demostración en argumentos de tipo actitudinal o procedimental:

"Es importante demostrar en el aula porque crea un hábito".
"Ayuda a trabajar en forma ordenada y responsable".

En algunos casos los docentes entrevistados identifican que en el aula los alumnos no asumen la necesidad de demostrar, sino que creen que es suficiente el estudio de algunos casos particulares. En las entrevistas surge la conciencia en la mayoría de los docentes en ejercicio de crear en los estudiantes noción de la necesidad e importancia de las demostraciones para que comprendan la esencia de las demostraciones como procedimientos que otorgan validez a los resultados en la matemática.

A través de estas argumentaciones es posible reconocer dentro de las preguntas que se referían a la importancia de la demostración en matemática y la demostración en el aula de matemática la presencia de algunas de las diferentes funciones atribuidas a la demostración por de Villiers. Algunos de los encuestados reconocen varias de las funciones, otros, ninguna.

Las respuestas obtenidas, pueden ser organizadas de la siguiente manera:

	Función reconocida a la demostración en la matemática		Función reconocida a la demostración en el aula de matemática	
	Estudiantes	Docentes	Estudiantes	Docentes
Verificación	42,5 %	33,33 %	10 %	33,33 %
Explicación	35 %	33,33 %	47,5 %	66,66 %
Sistematización	7,5 %	0 %	10 %	0 %
Descubrimiento	2,5 %	16,66 %	2,5 %	0 %
Comunicación	0 %	0 %	0 %	0 %

Una conclusión interesante que puede extraerse del cuadro anterior es que la función de verificación de las demostraciones es reconocida sobre todo en la matemática, mientras que en el aula la función que se reconoce como predominante es la de explicación.

Comentarios finales

Según los resultados obtenidos en la investigación que estamos realizando, se observa que la demostración en el aula, o ha sido totalmente ignorada o bien se presta como medio de certeza, y en menor medida de explicación. Estas dos funciones se pueden vislumbrar en las respuestas obtenidas. Sin embargo, las de sistematización, descubrimiento y comunicación prácticamente no aparecen. Aunque reconocemos que el rol de sistematización puede dejarse para niveles superiores por su grado de complejidad teórica, el desarrollo de los de descubrimiento y comunicación permiten la formación del concepto de demostración.

En conclusión, teniendo en cuenta que la enseñanza de la matemática debe reflejar la naturaleza de esta ciencia y su ejercicio profesional y que los alumnos requieren, como los matemáticos, de actividades significativas para su desarrollo, se requiere una mirada y un proceso más comprensivo de las funciones y del papel de la demostración que el que se le da en forma tradicional en las aulas.

Referencias Bibliográficas

Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques 3*(3), 261-304.

Crespo, C. (2003). *Las demostraciones como contenido matemático*. Documento presentado en la VII Escuela de Invierno y VII Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Chilpancingo, Guerrero, México.

Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2001). *La influencia de las concepciones de los docentes y los estudiantes acerca de la matemática en la enseñanza de esta ciencia*. Documento presentado en la XXIV Reunión de Educación Matemática. Unión Matemática Argentina, San Luis, Argentina.

Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2003a). Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol. 17, Tomo 1, pp.39-44). México.

Crespo, C. y Ponteville, Ch. (2003b). *Las demostraciones como problema.* Documento presentado en la XXV Reunión de Educación matemática. Unión Matemática Argentina, Río Cuarto, Córdoba, Argentina.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon 26*, 15-30.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Godino, J. y Recio, Á. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias 19*(3), 405-414.

Ibañes, M. y Ortega, T. (1997). La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria. *Educación Matemática 9*(2), 65-104.