

Geometría para Armar

Cristina Ferraris

Centro Regional Universitario Bariloche Universidad Nacional del Comahue
Argentina

cferrari@crub.uncoma.edu.ar

Capacitación para el trabajo, Formación de profesores, Pensamiento geométrico –
Nivel Básico, Medio y Superior

Resumen

Taller destinado a docentes en ejercicio y en formación de los distintos niveles de escolaridad, en el que las actividades están dirigidas a trabajar particularmente los contenidos procedimentales. Las unidades, *Mirar para ver, Papel, Mover los cuerpos, entrar a la cancha y utilizar espejos, Cubo, Sólo con regla y compás*, están diseñadas sobre la base de los recursos a utilizar, lo que las hace muy diversas en cuanto a los contenidos conceptuales que se abordan, permitiendo que éstos actúen como disparadores de otras actividades y exploraciones, trascendiendo el recurso propuesto. Se propone así fomentar la exploración por parte de los participantes y la utilización de sus propias estrategias, potenciando la posibilidad de discutir y compartir el modo de tratamiento de los temas según el nivel de escolaridad en el que se desee trabajar en el aula.

Introducción

En el proceso de construir el conocimiento matemático, los problemas son un buen vehículo para que el que aprende explore en lo procedimental.

Para el tratamiento de distintos temas de geometría, se presentaron actividades en forma de guía de problemas con el propósito de crear espacios para dar lugar a una actualización de los conocimientos y recursos en general y proveer sugerencias para el trabajo en el aula.

De este modo, a los modelos de problemas para trabajar algunos conceptos geométricos, se agrega una modalidad para realizar la tarea que induce a lo procedimental en el sentido amplio, como observar, describir, organizar, y también en lo que se refiere a los procedimientos de la matemática misma: conjeturar, demostrar, clasificar, etc.

La propuesta estuvo dirigida a docentes en formación o en ejercicio, de los distintos ciclos de escolaridad, con recursos de fácil obtención de modo que la reflexión sobre lo trabajado hiciera posible su posterior puesta en aula.

Los problemas o situaciones problemáticas tenían como objetivo permitir no sólo pasar de lo simple a lo más complejo, sino también que cada participante pueda desarrollarlo con la profundidad que sus propios recursos le permitieran, o sea, según cómo estuviera equipado para la tarea.

Las direcciones temáticas propuestas abordan distintos contenidos conceptuales, donde la secuencia no queda determinada por los mismos, si no por los recursos que se utilizan.

Creemos que el trabajar los temas de la matemática del modo en que lo haría un especialista, esto es, poniendo en juego los contenidos procedimentales propios de la ciencia, permite a los participantes una incursión en los conceptos específicos con un aprovechamiento mayor de los

recursos cotidianos, tanto de los propuestos en el taller como de los aportados por los participantes durante su desarrollo.

Se pretende brindar la posibilidad de reconocer ciertas propiedades geométricas como parte de lo cotidiano, utilizando los temas de la Geometría escolar como medio de iniciación en actividades matemáticas tales como sistematizar, conjeturar, clasificar, estimar, observar propiedades, argumentar afirmaciones, justificar, etc.,

Metodología

Sin duda la geometría, sobre todo la del espacio, debe *hacerse*, en lo posible ayudado con las manos y mirando con los ojos bien abiertos: de otra manera, es muy fácil caer en lo que podríamos llamar mitos que sólo podrán ser desmentidos con la investigación, el manipular y el ver, junto a la utilización de procedimientos matemáticos.

En el ámbito de un taller se dan las condiciones de promover la inquietud de investigar, hacer y dar apertura a la creatividad.

La metodología desplegada en este taller propone experimentar en uno mismo, como docente, aquello que queremos llevar a los estudiantes. Por ejemplo, la realización de los cuerpos regulares y de la pelota merece una reflexión acerca de lo que se suele pedir a los niños en el aula, ya que no siempre se tiene tanta habilidad manual para obtener un cuerpo que se vea realmente regular...

Para el desarrollo de las actividades se tuvo en cuenta que cada participante pudiera seguir profundizándolas hasta donde sus conocimientos y la interrelación con el grupo lo permitan.

Se considera muy importante propiciar el trabajo grupal a fin de lograr un ámbito de cooperación y comunicación, de modo que el desarrollo de las actividades permitiera la incorporación de los distintos aportes, estimulando el desarrollo de los pertinentes, y se enriquezca con la discusión en cuanto al problema propuesto y a su posible puesta en aula.

Teniendo en cuenta que la propuesta apunta a llevar a la escuela los recursos trabajados y atendiendo a que los participantes suelen venir equipados con recursos muy variados, se tiende a incorporar el lenguaje y los elementos (concretos o conceptuales) que utilizan los distintos participantes en su ámbito cotidiano.

La manera de abordar los problemas se dejó abierta, tanto en el orden de los mismos como en la profundidad de su tratamiento, de modo de permitir regular los tiempos de cada participante y realizar un trabajo grupal con el mayor aprovechamiento en cuanto al trabajo de las distintas actividades.

Desarrollo

Las unidades, *Mirar para ver*, *Papel*, *Mover los cuerpos*, *entrar a la cancha y utilizar espejos*, *Cubo*, *Sólo con regla y compás*, están diseñadas sobre la base de los recursos a utilizar, lo que las hace muy

diversas en cuanto a los contenidos conceptuales que se abordan, en la creencia de que esta organización permite a dichos contenidos actuar como disparadores de otras actividades y exploraciones, trascendiendo el recurso propuesto.

La unidad *Mirar para ver*, se propone trabajar con estimaciones; construcción de poliedros; conteo de caras, aristas y vértices. En otras palabras, varias propiedades geométricas que tienen mucho que ver con observar de manera directa o a través de la construcción de los objetos geométricos.

La unidad que hemos llamado *Papel*, consiste en utilizar éste elemento para investigar acerca de distintas propiedades como la duplicación del cuadrado, la construcción de distintos tetraedros, la notable propiedad de la cinta de Möebius, relación entre volúmenes, el infaltable teorema de Pitágoras y las plantillas pertinentes para la construcción del cubo.

Mover los cuerpos, entrar a la cancha y utilizar espejos es la unidad que atiende a los movimientos o isometrías tanto del plano como del espacio: se proponen actividades dirigidas para ver las rotaciones posibles de un prisma (envases de leche), otras que trabajan las simetrías que proveen los espejos, se plantean preguntas acerca de la orientación. Esta unidad se cierra con un baile en parejas con la propuesta de imitar los movimientos del compañero, a fin de que sea tomado como posible motivación para el estudio de las simetrías, especialmente la de espejo.

La unidad *Cubo* aprovecha la familiaridad con este cuerpo platónico y se ocupa de una serie de actividades que permiten observar, discutir y anotar varias de las muchísimas propiedades de este cuerpo geométrico que son de fácil comprobación, planteando también la temática de orientación en el espacio, por ejemplo al observar las dos formas de “fabricar” dados.

La unidad *Construcciones con regla y compás* permite discutir de algún modo la problemática planteada por los griegos antiguos, haciendo referencia a puntos obtenidos por intersección de rectas con rectas, rectas con circunferencias y circunferencias con circunferencias. El tema merece un comentario particular, tanto por su significado histórico como por su atractivo al momento de realizar diseños armónicos y de fácil construcción. Hay una mención especial al número de oro y las construcciones relacionadas con él y su utilización en distintas actividades humanas.

Algunos ejemplos de cómo se presentaron las actividades que conforman las distintas unidades de la guía del taller

Ejemplo I - Construir en cartulina los cinco poliedros regulares, contar en cada uno el número total de caras, de aristas, de vértices y de caras o aristas por vértices.

a) Completar un cuadro con los siguientes datos: Número de caras, número de aristas, número de vértices y número de Euler para cada uno de los cuerpos. Se sugiere numerar las caras, tener en cuenta que cada arista es compartida por dos caras, que para cada cuerpo el número de aristas que concurren a un vértice se repite en todos los otros vértices, similar para caras por vértice.

Fórmula para calcular el número de Euler:

$$\varepsilon = c + v - a$$

(¿Qué pasó con la última columna?)

b) Discutir los resultados del cuadro en cuanto a

i) comparación del número de caras y de vértices de cubo con octaedro y dodecaedro con icosaedro

ii) observación de la última columna. ¿Será así para cualquier poliedro?. Calcular el número de Euler para otros poliedros que se presentarán en la oportunidad. Rescatar datos históricos sobre estos temas (Euler y cuerpos platónicos).

Ejemplo II - a) i) Tomar un envase de leche de tipo 1 (corte cuadrado), dibujar el contorno de su base de apoyo en un papel que dejaremos fijo y considerar un lugar como frente de observación. Describir todos los movimientos, incluidos los que cambian la base de apoyo, que muestren las distintas “vistas” de manera tal que la base elegida coincida al apoyarla en el cuadrado dibujado y asignar un nombre a cada movimiento. Identificar los movimientos que, realizados dos veces, dejan el envase en la posición inicial.

IMPORTANTE: para poder reconocer que estamos realizando todos los movimientos posibles, conviene partir siempre de la misma posición, por ejemplo, el envase “al derecho” y con la leyenda principal hacia delante (si hay dos iguales, pintar o marcar una).

A cada uno de los movimientos vistos se los llama rotaciones o giros, y en particular, a los considerados en último lugar, simetrías axiales.

ii) Organizar en una tabla las composiciones de las rotaciones, esto es, el resultado de realizar un movimiento a continuación de otro.

b) i) Tomar un envase de leche de tipo 2 (corte rectangular) y realizar algo similar a lo visto para el otro.

ii) Idem a lo visto en a) ii) para el caso envase de tipo 1.

c) sobre la base de lo realizado en los ítems anteriores, podemos observar que en cada movimiento se realizó un giro alrededor de un eje. Colocar los palitos de brochette para concretar dichos ejes y agrupar los giros que corresponden a cada uno de ellos. Notar que acá ya podemos despegarnos del apoyo sobre la mesa y realizar los movimientos guiados por los ejes. ¿Cuántos ejes de rotación hay en cada caso (tipo 1 y tipo 2)?

Ejemplo III – Cuando Asmodeo sonrío, se le forma un hoyuelo en la mejilla derecha. Sin embargo, su imagen en el espejo le dice que tal simpático rasgo está a la izquierda. Asmodeo puso entonces un segundo espejo para ver en él la imagen de su imagen y sonrió.

¿En cuál mejilla estará el hoyuelo de la imagen de la imagen?

Si se ponen más espejos, digamos 3, 4, 5, etc. de manera de poder ver las distintas imágenes, siempre con Asmodeo sonriendo ¿en cuáles de ellos el hoyuelo estará en la mejilla derecha?

Si Asmodeo se saca una foto sonriendo ¿en qué mejilla (de la foto) estará el hoyuelo?

Con un espejo que te permita mirar tu rostro y una foto tuya de frente (por ejemplo de un documento personal), ver si hay diferencias.

Ejemplo IV – El problema de duplicar el cubo que plantearon los griegos en su época de oro, se refería a duplicarlo en cuanto a su volumen. Veamos aproximaciones a su resolución.

a) Si se corta un cubo por los puntos medios de todos los pares de aristas opuestas, se obtienen cubos más pequeños de volumen igual a un octavo del volumen del original. ¿Cuál es el mínimo de estos cubos pequeños que se deben agregar al cubo grande de modo de obtener otro cubo (un poco más grande, claro)? ¿Qué relación existe entre el volumen del nuevo cubo y el original?

diversas en cuanto a los contenidos conceptuales que se abordan, en la creencia de que esta organización permite a dichos contenidos actuar como disparadores de otras actividades y exploraciones, trascendiendo el recurso propuesto.

La unidad *Mirar para ver*, se propone trabajar con estimaciones; construcción de poliedros; conteo de caras, aristas y vértices. En otras palabras, varias propiedades geométricas que tienen mucho que ver con observar de manera directa o a través de la construcción de los objetos geométricos.

La unidad que hemos llamado *Papel*, consiste en utilizar éste elemento para investigar acerca de distintas propiedades como la duplicación del cuadrado, la construcción de distintos tetraedros, la notable propiedad de la cinta de Möebius, relación entre volúmenes, el infaltable teorema de Pitágoras y las plantillas pertinentes para la construcción del cubo.

Mover los cuerpos, entrar a la cancha y utilizar espejos es la unidad que atiende a los movimientos o isometrías tanto del plano como del espacio: se proponen actividades dirigidas para ver las rotaciones posibles de un prisma (envases de leche), otras que trabajan las simetrías que proveen los espejos, se plantean preguntas acerca de la orientación. Esta unidad se cierra con un baile en parejas con la propuesta de imitar los movimientos del compañero, a fin de que sea tomado como posible motivación para el estudio de las simetrías, especialmente la de espejo.

La unidad *Cubo* aprovecha la familiaridad con este cuerpo platónico y se ocupa de una serie de actividades que permiten observar, discutir y anotar varias de las muchísimas propiedades de este cuerpo geométrico que son de fácil comprobación, planteando también la temática de orientación en el espacio, por ejemplo al observar las dos formas de “fabricar” dados.

La unidad *Construcciones con regla y compás* permite discutir de algún modo la problemática planteada por los griegos antiguos, haciendo referencia a puntos obtenidos por intersección de rectas con rectas, rectas con circunferencias y circunferencias con circunferencias. El tema merece un comentario particular, tanto por su significado histórico como por su atractivo al momento de realizar diseños armónicos y de fácil construcción. Hay una mención especial al número de oro y las construcciones relacionadas con él y su utilización en distintas actividades humanas.

Algunos ejemplos de cómo se presentaron las actividades que conforman las distintas unidades de la guía del taller

Ejemplo I - Construir en cartulina los cinco poliedros regulares, contar en cada uno el número total de caras, de aristas, de vértices y de caras o aristas por vértices.

a) Completar un cuadro con los siguientes datos: Número de caras, número de aristas, número de vértices y número de Euler para cada uno de los cuerpos. Se sugiere numerar las caras, tener en cuenta que cada arista es compartida por dos caras, que para cada cuerpo el número de aristas que concurren a un vértice se repite en todos los otros vértices, similar para caras por vértice.

Fórmula para calcular el número de Euler:

$$\varepsilon = c + v - a$$

(¿Qué pasó con la última columna?)

Por último, creemos que el taller nos permitió a todos los participantes disfrutar de la geometría siendo más que espectadores, ya que también se trabajó con profundidad y compromiso.

Referencias Bibliográficas

- Beppo Levi: (1947). *Leyendo a Euclides*. Argentina: Editorial Rosario S. A.
- Fernández, A. (s. f.). *Geometría teórico-práctica para niños*. (10a. ed.). En F. Crespillo (Ed.). Buenos Aires, Argentina.
- Ferraris, C. (1991). *Espacio - Geometría Métrica*. (1a ed.). Río Negro, San Carlos de Bariloche, Chile: Centro Regional Universitario Bariloche – Universidad Nacional del Comahue..
- Ferraris, C. (1995). *Construcciones con regla y compás*. Cuaderno Universitario N° 23. Centro Regional Universitario Bariloche – Universidad Nacional del Comahue. San Carlos de Bariloche.
- Ferraris, C.: (1997). *Una definición geométrica de ángulo-Ordenamiento-Suma-Aplicaciones*. Cuaderno Universitario N° 27. Centro Regional Universitario Bariloche – Universidad Nacional del Comahue. San Carlos de Bariloche.
- Ferraris, C. y Ferrero, M.: (2003). *Geometría para armar*. Cuaderno Universitario N° 47. Centro Regional Universitario Bariloche – Universidad Nacional del Comahue. San Carlos de Bariloche.
- García Ardura, M.: (1968). *Problemas gráficos y numéricos de Geometría*. (15a ed.). Madrid, España.
- Gentile, E.: (1987). Construcciones con regla y compás. *Revista de Educación Matemática* 3(2),15-23.
- Hilbert, D. (1971). *Foundation of Geometry*. (2a ed.) La Salle. Illinois. (Trabajo original publicado en 1897).
- Ghyka, Matilsa C. (1953). *Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Poseidón.
- Ghyka, Matilsa C. (1978). *El número de oro –I los ritos – II los ritmos*. Barcelona, España: Editorial Poseidón.
- Pogorelov, A. V. (1974). *Geometría Elemental*. Moscú, URSS: Editorial MIR.
- Poincarè, H. – Einstein, A. (1948). *Fundamentos de Geometría*. (J. R. Pastor, Trad.). Argentina: Editorial Ibero América.
- Puig, A. (1980). *Curso de Geometría Métrica*. (10a ed.). Madrid, España: Gómez Puig Ediciones.
- Tirao, J. (1979). *El Plano*. (1a ed.). Buenos Aires, Argentina: Editorial Docencia.