Análisis del Desarrollo de la Puesta en Escena de una Situación Didáctica "La Función Exponencial 2^x" con Estudiantes de Bachillerato

Jorge López y Javier Lezama
Escuela Normal Superior del Estado de México y CICATA del IPN
México
joselo26@correo.unam.mx, jlezama@ipn.mx
Pensamiento Matemático Avanzado – Nivel Medio

Resumen

La investigación "Análisis del desarrollo de la puesta en escena de una situación didáctica", cuyos propósitos están encaminados a identificar los efectos didácticos que se producen en el escenario cuando los estudiantes de bachillerato emplean criterios geométricos para construir segmentos y localizar algunos puntos de la función exponencial 2^x; tiene como Marco Teórico la Teoría de Situaciones de (Brousseau, 1993) y la Teoría de la Transposición Didáctica de (Chevallar, 1991). Como metodología de investigación la Ingeniería Didáctica que se caracteriza por tener un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase. Los estudiantes mostraron una gran variedad de acciones al resolver la actividad matemática que se les propuso, siendo en ocasiones contrastante.

Introducción

Este trabajo forma parte de un proyecto de investigación en Didáctica de la Matemática, donde una de las finalidades que se persiguen con la experiencia de reproducir la situación didáctica, es el de identificar los efectos didácticos que se producen en los distintos escenarios, a que fueron creados (Lezama, 1999).

El concepto de función, es una de las principales nociones en la matemática actual, puesto que se encuentra en todo plan de estudios del nivel medio superior y superior. Existen varias investigaciones que muestran como la enseñanza de los principios de cálculo (entre los que destaca el de función) es problemática. Asimismo, la enseñanza tradicional, aún teniendo otras ambiciones, tiende a centrarse en la práctica algorítmica y algebraica del cálculo, siendo necesaria una propuesta de cambio en su modelo de enseñanza y aprendizaje con la finalidad de mejorar este proceso.

Usualmente en la bibliografía, para abordar la función logarítmica lo hacen a través de la función exponencial, pues se define la una, como la inversa de la otra, relegando así a la función exponencial a un papel intermediario; como los enfoques aritmético y funcional para las funciones a las que se hace referencia, se muestran ajenos, se requiere el establecimiento de un puente entre un concepto y otro, previo a ello es necesario construir alguna de las dos como funciones y es justamente ahí en donde incide la importancia del presente trabajo. Se hace una construcción para el caso particular de la función exponencial 2^x vía una secuencia didáctica.

El propósito está encaminado a que el estudiante aprenda la noción de función exponencial, invitándolo a que él realice las acciones, las cuales desarrollará paso a paso a partir de criterios geométricos, localizando puntos en el plano cartesiano, observando las dificultades para obtenerlos, llenando tablas, identificando regularidades que propicien la generalización. Confrontar la idea espontánea de que 2^x es evaluable solo cuando x es un número entero.

Formulación del problema

A partir de mi experiencia de haber resuelto la secuencia de actividades de la ingeniería "Un estudio didáctico de la función exponencial 2^x" para conocerla, discutirla y analizarla; con el propósito de reproducirla con estudiantes de bachillerato, me propongo responder las siguientes preguntas:

¿Cómo afecta la estructura de la situación didáctica, en la actividad matemática de los estudiantes, al trabajarla en equipo, incluyendo la interacción de un profesor-monitor?

¿Qué tipo de obstáculos matemáticos enfrentan los estudiantes y la forma en que logran superarlos cuando se apropian del saber en juego?

¿De qué forma los estudiantes, solicitan la ayuda del profesor-monitor para aclarar sus dudas, desbloquear o validar sus procedimientos y resultados?

Marco teórico conceptual

Para el análisis de la información vertida por los estudiantes, respecto a la solución de la actividad matemática, se hace uso de las categorías de la Teoría de situaciones Didácticas (acción, formulación, validación, contrato didáctico, devolución de situaciones adidácticas); ésta adopta un enfoque sistémico, ya que considera a la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos con el objeto de optimizar los modos de apropiación de ese saber por el sujeto (Brosseeau, 1993).

Alrededor de un saber se forma un contrato didáctico, que ese saber como objeto de un proyecto compartido de enseñaza y aprendizaje y que une en un mismo sitio a profesores y estudiantes. Y por un estrato que (Chevallard, 1991), denomina la noosfera del sistema didáctico.

Un contenido de saber que ha sido designado como saber enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adoptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. "El trabajo que transforma de un objeto de saber a enseñar, en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica" (Chevallard, 1991).

Con base al diagnóstico que se realiza a los estudiantes que resuelven la situación, se tienen las siguientes predicciones:

- En la construcción de segmentos, los pueden proponer en el plano cartesiano (es lo recomendable), o decidir hacerlo en hojas blancas que se les proporciona, pero se corre el riesgo que modifiquen la unidad a realizar cada trazo requerido.
- En la construcción de segmentos de longitud $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ puede ser posible que empleen distintos segmentos como la unidad.
- Puede ser posible que no hagan uso adecuado del algoritmo de la semejanza de triángulos para obtener los productos $(\sqrt{2})(\sqrt{3})$ y $(\sqrt{3})(\sqrt{5})$.

- Los alumnos pueden tener dificultades en el manejo adecuado de las propiedades de los exponentes, al transformar de una expresión en forma de radical a la forma exponencial, al descomponer un exponente fraccionario en factores, al no factorizar de forma correcta al momento del llenado de las tablas y como consecuencia no observar el comportamiento creciente de la función exponencial al analizar el llenado de las tablas.

La metodología que se emplea en la investigación, teniendo como referencia que ya ha sido validada al ponerla en escena en otros ambientes escolares del nivel medio superior y superior, es la que propone la Ingeniería didáctica; ésta considera tres etapas para su realización que son:

a) Etapa preliminar (análisis a priori).
b) Etapa experimental.
c) Etapa de información (análisis a posteriori).

Análisis de resultados

La actividad propuesta a los estudiantes consta de tres etapas, la 1ª se trabaja para explorar los antecedentes matemáticos que se necesitan para resolver las otras dos; la 2ª y 3ª etapa que se reportan en la investigación, se desglosa en 14 órbitas, elementos distinguibles que integran el eje conceptual de la situación; con el propósito de diferenciar la actividad matemática a la que se introduce a los estudiantes; disponiendo de 1 hora por etapa para su solución; en la Tabla No.1, se resume lo siguiente:

1) Se muestra la forma en como avanzaron los 3 equipos que participaron en la experiencia, y se exhibe si fue resultado de las acciones exclusivas de los estudiantes y si hubo intervención o no del profesor-monitor.

2) El símbolo ε significa que desde nuestro punto de vista el equipo de estudiantes cumplió con las instrucciones, interpretando más o menos de forma correcta, realizando completa la actividad propuesta, se tienen las evidencias para su análisis e interpretación.

3) El par de símbolos ερ significa que el desarrollo de dicha actividad estuvo influenciada por la intervención de profesor-monitor.

4) El símbolo ρ significa que el observador asumió el rol del estudiante, se puso a realizar las construcciones y contestar la actividad correspondiente.

En los cuadro que se reportan vacíos, no existen evidencias escritas sobre la solución de la actividad propuesta; aunque en sus discusiones grupales y exposición de sus resultados, muestran que las estuvieron explorando.

Núm.	órbitas o actividades													
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}
Equipo 1	ε	ε	ε	ε	ερ		ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε	ε
Equipo 2	ε	ε	ε	ερ	ρ					ε	ε	ε	ε	
Equipo 3	ε	ε	ε	ε	ε	ερ				ε	ε	ε	ε	

Tabla 1. En esta se muestra el avance de los tres equipos en la solución de las catorce actividades, correspondientes a la 2ª y 3ª etapa de la situación didáctica.

Los tres equipos tuvieron un gran avance en la solución de las actividades propuestas, aunque no mostraron un dominio total de los algoritmos geométricos; con unas cuantas sugerencias que les proporcionaba el monitor, eran capaces de recuperarlos y seguir avanzando en la solución de las actividades, al finalizar cada etapa con su respectiva exposición, comentaban que con un poco de más tiempo, tal vez hubieran logrado resolver toda la situación.

Cada equipo afrontó y se responsabilizó de la solución de la actividad matemática, haciendo uso de sus propios recursos, aprovechando la orientación del monitor quien en ocasiones validaba sus planteamientos.

Como se puede observar en la Tabla No. 1; los tres equipos avanzaron en la dirección que les marcaba la situación, si bien, la interpretación de las instrucciones que se indicaban en la hoja de trabajo, no todos le dieron el mismo sentido, los equipos terminaron interpretando las actividades de forma correcta. El manejo de los exponentes fraccionarios suscitó conflictos que en parte fueron superados, fue el momento en que algunos equipos emplearon más tiempo, pero fue el periodo en que generaron las acciones más interesantes al interior del equipo. En este lapso estaban los equipos inmersos en el problema al que la situación los quería llevar.

Los estudiantes al no tener a la mano respuestas concretas a los cuestionamientos, optaron por resolver la situación tratando de dar sentido al conflicto de elevar potencias fraccionarias y realizar las construcciones geométricas de algunos segmentos requeridos; como fue el caso del equipo No.1; donde uno de los estudiantes que se mostró como líder, junto con sus compañeros, al estar resolviendo las actividades de la segunda etapa; emplearon sus propias estrategias geométricas, al estar explorando la forma de construir algunos de los segmentos, les permitió interpretar gráficamente los demás segmentos y avanzar en forma significativa, respondiendo de forma correcta lo que se les pedía en cada actividad, como se muestra en el análisis comparativo de la Tabla No.1.

Como se mencionó en el párrafo anterior, este equipo tuvo un desempeño extraordinario desde el punto de vista de las discusiones que se generaron a su interior, lo más excepcional de esta experiencia fue la dinámica y que describimos de forma resumida a continuación:

Al iniciar la 2ª etapa de la secuencia, después de localizar en el plano cartesiano los puntos $(0, 2^0)$, $(1, 2^1)$ y $(2, 2^2)$, se les pidió que localizaran en el mismo plano los puntos $(1/2, 2^{1/2})$, $(1/4, 2^{1/4})$, $(3/4, 2^{3/4})$ y $(5/4, 2^{5/4})$; siguiendo este orden, empleando los procedimientos geométricos que se trabajaron en la etapa de preparación; los estudiantes observaron las coordenadas de los puntos señalados y de acuerdo al orden creciente de las abscisas, a su criterio, plantearon que iba primero el punto $(1/4, 2^{1/4})$, seguido por el punto $(1/2, 2^{1/2})$ y deciden obtener primero las coordenadas del punto $(1/4, 2^{1/4})$, pero no recuerdan el algoritmo geométrico para obtener el segmento de la ordenada requerida. En este momento se encuentran con el primer bloqueo y en su exploración les hace resolver toda la situación, ya que encuentran todas las demás potencias requeridas; descubren que a través del Teorema de Pitágoras pueden encontrar $2^{1/2}$, esto los motiva para buscar $2^{1/4}$ siguiendo el mismo procedimiento geométrico, pero en ese momento no lo logran. Sin tanta dificultad se dan cuenta que $2^{3/4} = (2^{1/2})(2^{1/4})$; $2^{5/4} = (2^1)(2^{1/4})$; $2^{3/2} = (2^1)(2^{1/2})$; $2^{7/4} = (2^1)(2^{3/4})$; en ese momento expresaron, si se conociera $2^{1/4}$ todo estaría resuelto; siguieron insistiendo con el teorema de Pitágoras porque sabían que $2^{1/4} = (2^{1/2})^{1/2}$, deciden explorar el algoritmo geométrico y logran recuperarlo con facilidad, en su desarrollo se dan cuenta que los dos algoritmos se basan en la semejanza de triángulos, e inician el planteamiento para obtener $(2^{1/410})$ que tanto deseaban. Este equipo guiado por su líder, muestra un ejemplo muy interesante de devolución al resolver la situación didáctica, ya que su estrategia de trabajo y de exploración, les permite resolver la mayoría de las actividades propuestas.

Conclusiones

Los estudiantes afrontaron la situación con sus propios recursos. El proceso requirió que el profesor monitor orientara y en ocasiones que validara las afirmaciones que formulaban; en algunos casos los estudiantes realizaron la validación, pero en otros este proceso se logró con la orientación del profesor.

Con respecto a la experiencia, hubo tareas que propiciaron discusiones entre los equipos, debido a las características de la secuencia, pero la forma de responder, el tiempo dedicado a la discusión y las características de las respuestas fueron determinadas tanto por la dinámica de la discusión adoptada por el equipo, como por las intervenciones del profesor.

Esta secuencia de aprendizaje constituye una sucesión de actividades que, a su vez, da origen a otras tareas. No provoca grandes desviaciones, permite que todos los estudiantes pasen por los mismos problemas y ofrece la oportunidad de explorar tanto distintas formas para afrontarlos como argumentaciones para justificar los resultados.

Al término de la solución de la secuencia por los equipos de trabajo y la exposición de sus resultados, con la integración de los profesores como coordinadores en las discusiones, se pudo constatar el logro de las intenciones didácticas propuestas y la cualidad del objeto matemático propuesto, siendo esto justificado en la confrontación entre el análisis a priori y el a posteriori.

Durante el desarrollo de la secuencia, la mayoría de los estudiantes pasaron satisfactoriamente por las fases de acción, formulación, llegando inclusive a la validación que propone ***Brousseau*** para el proceso de aprendizaje.

El objetivo de este trabajo fue la reproducción de la situación didáctica ya validada, se logró desarrollar en los estudiantes, comportamientos matemáticos y cognitivos que no solo le sirvieron para que asimilaran estos objetos, sino también descubrió que existe otra forma de abordar los conocimientos escolares.

La estructura del diseño permite el intercambio de ideas entre los estudiantes al interactuar en la solución; su flexibilidad provoca que el interesado explore e imagine el comportamiento creciente de la función; aunque tenga deficiencias en el manejo de algunos antecedentes requeridos por la situación; la manera ingeniosa y original que presentaron los estudiantes para vencer los obstáculos matemáticos, aportan elementos para la discusión y análisis, logrando interesar a los demás participantes.

Referencias Bibliográficas

Apóstol, T. (1995). *Calculus*. España: Editorial Reverté. (Trabajo original publicado en 1967)

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). Mexico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1993). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Lecturas en didáctica de las matemáticas, Escuela francesa* (pp. 33-115) México: DME, Cinvestav-IPN.

Cantoral, R. (1995). Matemática, matemática escolar, matemática educativa. *Serie Artículos*. México: Programa Editorial AES, DME, Cinvestav-IPN.

Cantoral, R. y Farfán, R.M. (1998). Investigación en didáctica de las matemáticas y profesionalización docente: Retos de la educación superior. *Serie Antologías*. México: Programa Editorial AES, DME, Cinvestav-IPN.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Editorial Aique.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1995). *Estudiar matemáticas, El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. España: ICE-Horsori.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de maestría no publicada, DME, Cinvestav-IPN. México.