Un Estudio del Teorema Fundamental del Cálculo en el Contexto Área Bajo la Curva

María Antonieta Aguilar
Instituto Tecnológico de Pachuca, CICATA - IPN
México
auva5404@prodigy.net.mx
Gráficas y Funciones – Nivel Superior

Resumen

La presente investigación esta situada en el marco de las investigaciones socioepistemológicas, por tanto, los conocimientos generados permitieron concebir a la matemática, de las relaciones entre la derivada y la primitiva (El Teorema Fundamental del Cálculo) como un conocimiento con significados propios que se construyeron y reconstruyeron en el contexto mismo de las actividades realizadas por los estudiantes. Abordamos aspectos como la relación entre las prácticas sociales y los saberes involucrados como son; función creciente y decreciente, máximos y mínimos, puntos de inflexión, que pudieron ser resignificados considerando el "área bajo la curva". Damos cuenta de cómo los estudiantes hicieron uso de herramientas y argumentaciones en ambientes gráficos.

Introducción

La aproximación socioepistemológica y la Teoría de Situaciones Didácticas Brosseau, G. (1986, 1997, 2000) constituyen nuestro marco teórico, como metodología utilizamos a la Ingeniería Didáctica Artigue, M.(1995).

Analizamos las relaciones que establecen los estudiantes entre la primitiva y la derivada en el escenario gráfico, específicamente la relación del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), en el cual, la función área esta representada de la manera siguiente $A'(x) \sim f$, que puede leerse como "el área bajo la curva de la derivada es a la gráfica de la primitiva" y damos cuenta de cómo los estudiantes descubren dicha relación a través de las interacciones con diversos tipos de funciones y que son aplicadas a la resignificación en Física, por ejemplo, cuando se manejan conceptos inherentes al movimiento rectilíneo, uniformemente acelerado o tiro parabólico.

Otro escenario consiste en discutir aspectos de la función primitiva a través de la información gráfica de la función derivada sin considerar explícitamente las expresiones de las funciones, y ha sido analizado en el trabajo de Cordero (1994).

Postulamos que cuando los estudiantes interactúan en ambientes gráficos, reconstruyen significados (aquí existe una epistemología), justamente la perspectiva esta en la argumentación que se encuentra en dicho ambiente gráfico Aguilar, M.A.(2002,2003). Consideramos que los estudiantes reconstruyen significados a través de asociar prácticas, las cuales provienen de la actividad humana, la cual concebimos como el conjunto de actividades que realiza un individuo en una situación concreta, en nuestro caso tratase de el estudiante, el cual se encuentra inmerso en el proceso de construcción o reconstrucción de su conocimiento, en este caso, la relación entre F y F' que es el (TFC). El proceso de construcción y reconstrucción que se da en la actividad humana, genera las argumentaciones, en nuestro caso Comportamiento Tendencial de las Funciones (ctf) y Teorema fundamental del Cálculo (TFC).

La actividad humana entonces es fuente de la reorganización de la obra matemática, para que ello ocurra el estudiante deberá interactuar con las gráficas de las funciones en situaciones específicas y esto le permitirá la reconstrucción de significados que se da en el salón de clases.

Desarrollo

Se inicia con el diseño de la situación ***Estudio del TFC en el contexto área bajo la curva*** que permitió la resignificación de ciertos tópicos de las relaciones entre la primitiva y derivada, como se muestra en las secuencias 1 y 2 referentes a la situación de la contextualización "área bajo la curva". En estas secuencias se muestra la aplicación a la Física con el movimiento Rectilíneo uniforme y el tiro parabólico.

Aplicación 1. Movimiento rectilíneo uniforme

Se pide a los estudiantes:
Si la rapidez media (dada en m/seg.) con la que se mueve una partícula puede representarse con la gráfica que tiene marcada el área bajo la curva:

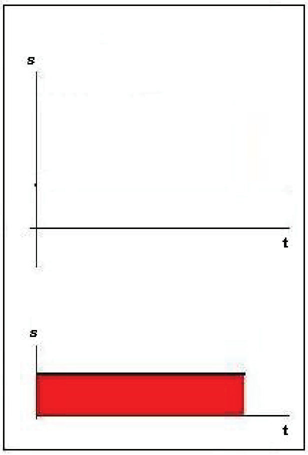
i) dibuje la gráfica de la función primitiva
ii) ¿Cómo expresaría la posición de la partícula (S (t)) en cualquier t?
iii) ¿Cómo expresaría la Velocidad de la partícula en (V(t)) en cualquier t?

Aplicación 2. Tiro parabólico

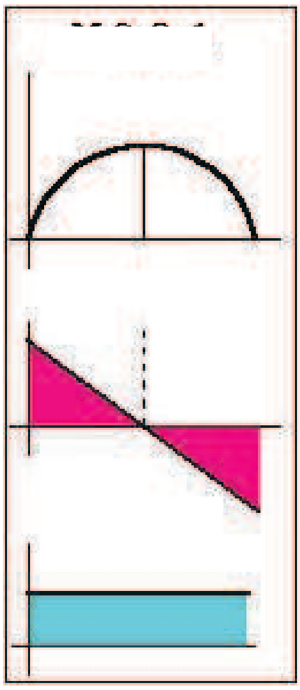
Un proyectil sigue la trayectoria que se muestra en la figura, revise todo el gráfico y en base a los datos ahí plasmados conteste:

i) Escriba una expresión analítica para las funciones de posición, velocidad y aceleración del proyectil
ii) ¿En que momento la velocidad del proyectil es igual a cero?
iii) ¿Cuál es el valor de la aceleración?
iv) ¿Qué relación existe entre función primitiva creciente y la velocidad del proyectil?
v) ¿Qué relación existe entre función primitiva decreciente y la velocidad del proyectil?

Aplicación 1



Aplicación 2



Análisis

Como señala la ingeniería didáctica, un análisis a priori, es conveniente, en nuestro caso intervienen como fundamentos la aproximación socioepistemológica y la teoría de situaciones didácticas. Hacemos notar que tales aproximaciones teóricas van estrechamente relacionadas con la metodología.

En la aproximación socioepistemológica**,** la fuente de abstracción se encuentra en la esfera de la actividad humana. Justo en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), las secuencias involucradas contienen actividades correspondientes a dicha esfera. Podríamos decir que la coexistencia entre la aproximación socioepistemológica y la Teoría de Situaciones Didácticas, es precisamente la actividad humana que además resulta ser el punto común de ambas. Tomamos de la aproximación socioepistemológica, las actividades o prácticas sociales y de la TSD, las actividades presentes en las secuencias de la situación; estudio del Teorema Fundamental del Cálculo en el contexto área bajo la curva.

Esas actividades son parte de nuestro objeto de estudio, y las vemos plasmadas en las respuestas que los estudiantes dieron al ser entrevistados. Es por eso que en este trabajo consideramos a las prácticas sociales como la base del desarrollo en el conocimiento matemático.

De acuerdo a lo anteriormente tratado, una de las tareas primordiales de la aproximación socioepistemológica es la identificación de esas prácticas sociales las cuales han favorecido y favorecen la construcción del conocimiento matemático y justamente las detectaremos en el análisis de las respuestas que dieron los estudiantes y que se llevan a efecto en el salón de clases pues resultan ser nuestras evidencias.

Este momento al igual que el anterior es un momento de aplicación de los conocimientos en particular al movimiento rectilíneo. Generalmente en los cursos de Física y en los textos no hay congruencia entre los fundamentos teóricos y la aplicación de formulas, axiomas, teoremas o principios.

Vemos, justamente, el enlace entre la parte teórica y la parte de aplicación ya sea a ejercicios escolares o a la vida cotidiana; pensamos que ello se logra con el diseño de situaciones con secuencias como las que se presentan en este tipo de actividades.

Cuando a las estudiantes se les pidió dibujar la gráfica de la función primitiva dibujaron casi automáticamente una línea recta correspondiente a una función lineal y cuya área bajo la curva corresponde al área acotada por una función constante, como se muestra:

Avril *dibuje la grafica de la función primitiva*
Cecy *esa ya la teníamos, ya la hicimos*
Rosa *nada mas analicen, desde el origen*
Avril *como expresaría la posición de la partícula s(t) en cualquier t, la posición constante, no?*
Rosa *la constante es la velocidad, es lineal . . . .*
Avril *pero si es constante?*
Rosa *a que es igual s(t)*
Avril *puede ser 2x?*
Rosa *un 2, 3 o k*
Cecy *entonces s(t) = kx como . . . . . v(t) = k*
Avril *v(t) = k*

Cuando se les pidió que expresaran la posición de la partícula S(t) en cualquier t, escribieron S(t)= k x, lo mismo hicieron para la expresión de la velocidad V(t) = k. Las estudiantes realizaron estas actividades muy seguras de sí mismas, confiadas y satisfechas, creemos que esto fue así porque sintieron que construían su propio conocimiento a través de la resignificación pudiendo relacionar el contexto gráfico con el analítico.

Aplicación 3. Movimiento Parabólico

En esta actividad ya no se les pide dibujar el área bajo la curva o bien encontrar la grafica de la función primitiva, porque pensamos que esta bien establecida en el conocimiento y entendimiento de las estudiantes, prácticamente conviene que establezcan relaciones en un área especifica, en este caso el movimiento parabólico.

i) Escriba una expresión analítica para las funciones de posición, velocidad y aceleración del proyectil.
   $S(t) = - k\, t^2 - c$
   $V(t) = - 2k\, t$
   $A(t) = - 2k$
   $= - k$
   $= - 9.81$
ii) ¿En que momento la velocidad del proyectil es igual a cero?
   Cuando el proyectil alcanza la altura máxima.
iii) ¿Cuál es el valor de la aceleración?
   $-9.81\ m/s^2$
iv) ¿Qué relación existe entre función primitiva creciente y la velocidad del proyectil? R es positiva

v) ¿Qué relación existe entre función primitiva decreciente y la velocidad del proyectil? R Es negativa

Las respuestas dadas por las estudiantes fueron contundentes, debido a que establecieron relaciones entre funciones primitivas y derivadas utilizando los contextos gráfico y analítico igual que en la actividad A 2, pero más ampliada puesto que aquí interviene otro factor físico, la aceleración. A ellas no les resulto difícil o tedioso trabajar con estos parámetros, puesto que establecieron relaciones entre ellos como mostramos a continuación:

Rosa s(t) que función nos describe, cuadrática, una parábola
Avril una función cuadrada, puede ser – kt^2 para tener desplazamiento a la derecha
Rosa más algo para tener el desplazamiento
Cecy + c
Rosa la velocidad, que es?
Avril la derivada
Rosa entonces . . . .
Avril -2kt, ahora la derivada otra vez
Rosa mmmjj
Cecy a(t) = -2k
Rosa a que es igual 2k, es una sola constante k, =-k, esa k tiene un valor en todos los formularios
Cecy es la gravead, es que. . . .
Rosa 9.81 m/ seg^2
Avril en que momento la velocidad es cero, en el punto medio
Rosa cuando el proyectil alcance la altura máxima
Avril que relación existe entre función primitiva creciente y la velocidad del proyectil
Karla cuando la posición del proyectil es creciente, la velocidad . . . .
Cecy decrece, no?
Rosa si pero la relación que estamos ocupando es depende al área
Cecy no entiendo, es positiva
Rosa si la función es creciente es positiva y si es decreciente es negativa

Podemos decir que esta es una actividad de recopilación de conocimientos y aplicaciones con significado, por eso las estudiantes lo realizaron con mucha seguridad, confianza y optimismo ya que sintieron que valió la pena realizar actividades convertidas posteriormente en prácticas sociales para la adquisición del conocimiento matemático.

Conclusiones

Las herramientas utilizadas fueron:

La identificación del efecto de los coeficientes en F y F´, b) reconocimiento de patrones de comportamiento gráfico, c) búsqueda de tendencias en los comportamientos y d) establecimiento de relaciones entre F y F´.

Los Argumentos utilizados por los estudiantes

Cuando los estudiantes interactúan con las gráficas de primitivas y derivadas, ellos usan al comportamiento tendencial de las funciones, cuyo estatus lo ubica en ambientes gráficos y al Teorema Fundamental del Cálculo, como argumentos para construir o reconstruir significados Aguilar, M.A. (2004).

Las resignificaciones

Con respecto a las resignificaciones, llamadas así a nociones o conceptos previos que los estudiantes ya poseían pero que al interactuar con las gráficas de F y F´ y las áreas bajo la curva de ésta última entienden significados o los reafirman convirtiéndolos en objetos por ejemplo; máximos, mínimos, puntos de inflexión función creciente o decreciente, ello les permitió construir conocimiento en diversos aspectos tales como: i) los estudiantes hacen uso de modelos globales y no puntuales poniendo en confrontación ambos modelos, ii) la definición del teorema fundamental, en el discurso escolar es aplicable a funciones continuas definidas en todo su dominio, con la resignificación de ciertos tópicos podemos aplicar el Teorema Fundamental, incluso a cierto tipo de funciones no continuas o no derivables, es decir, si una función es no derivable puede ser integrada utilizando estos argumentos gráficos.

Los obstáculos

Los obstáculos a los que se enfrentaron los estudiantes fueron:
Ellos están acostumbrados a que cuando escuchan o ven "algo igual a cero" lo relacionan inmediatamente con una cantidad. El ambiente gráfico les permite identificar a $F'(x) = 0$ como una función, en donde, para cada valor de x el valor de "y" es cero y dicha gráfica aparece sobre el eje "x". Otro obstáculo consiste en que a los estudiantes les resulta complicado identificar las zonas del "área bajo la curva", esto lo superan después de varias interacciones con diversas gráficas de F y F´.

El estatus de la aproximación socioepistemológica

De acuerdo a Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G. y Suárez, L (2004) ésta aproximación desarrolla estrategias de investigación de naturaleza epistemológica donde, es entendida como el estudio de las circunstancias que favorecen o posibilitan la construcción del conocimiento. Sí la epistemología es entendida a través de la actividad humana, nos permite tomar como objeto de estudio situaciones que no están definidas en una estructura matemática y que, sin embargo, están presentes cuando se estudia al hombre haciendo matemáticas y no solo su producción matemática. Es en este sentido donde los aspectos constructivos del conocimiento son el foco de interés para nuestras investigaciones. El planteamiento anterior deriva en el análisis de la relación entre prácticas sociales y el conocimiento, entendiendo a las prácticas sociales como un conjunto de acciones voluntarias que, intencionalmente, desarrolla el individuo para construir conocimiento. Las investigaciones desarrolladas en este marco se han realizado a través de revisiones históricas y de lo que sucede en los sistemas didácticos, en estas investigaciones se da evidencia de cómo el discurso matemático suele favorecer solo algunos aspectos relacionados con dichos conceptos, dejando de lado elementos presentes en la construcción social del conocimiento tales como los argumentos y las herramientas relacionadas; que son básicamente aquellos factores que facilitan la construcción del conocimiento. Tradicionalmente, la epistemología de conceptos ha permitido explicar las dificultades en la adquisición de objetos estáticos; sin embargo, no ha logrado establecer relaciones, más allá de un nivel utilitario, entre los diferentes tópicos del conocimiento matemático. Nuestra hipótesis básica, consiste en señalar que una epistemología basada en prácticas sociales favorecería un estudio en la construcción social de la matemática a través de la reconstrucción de significados asociado al saber matemático. De esta manera se favorecería el carácter funcional del mismo. Una vez que se reconocen a las prácticas sociales como generadoras de conocimiento, las situaciones que se diseñan fundamentadas en dichas socioepistemologías permiten hacer evidente herramientas y argumentos en los contextos interactivos del salón de clases (Ibíd.). En efecto los planteamientos anteriores se percibieron en el desarrollo de la presente investigación, en donde los estudiantes realizaron lo siguiente:

Desarrollaron actividades tales como; trazar un sistema de ejes cartesiano, dibujar gráficas tanto de F como de F´ (usando herramientas IRBE) para finalmente asociar (estableciendo relaciones), esto les permitió realizar algunas prácticas sociales bien definidas, que a su vez los condujo a ***derivar e integrar*** o ***variar y aproximar***.

Referencias Bibliográficas

Aguilar, M. A. (2002). Relaciones entre F y F´ el papel del registro gráfico. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 15, Tomo II, pp. 1004-1009). México.

Aguilar, M. A. (2003). Reconstrucción de Significados que realizan los estudiantes entre F y F´, cuando interactúan en ambientes gráficos. En J. Delgado (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol 16, Tomo II, pp. 704-709). Chile.

Aguilar, M. A. (2004). Reconstrucción de Significados de la primitiva y Derivada en ambientes gráficos. La argumentación como parte esencial de la actividad humana. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 17, Tomo I, pp. 176-180). México.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G. y Suárez, L. (2004). Las Prácticas Sociales como generadoras del conocimiento matemático. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 17, Tomo I, pp. 418-422). México.

Brosseau, G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathématiques*. EUA: Kluwer Academic.

Brousseau, G. (2000). Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática 12*(1), 5-38.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la Integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar*. Disertación doctoral no publicada, Cinvestav, México.