Mecanismos para la Difusión del Discurso Matemático Escolar

Apolo Castañeda
Cicata-IPN[1]
México
acastane@ipn.mx
Pensamiento Matemático Avanzado- Nivel Superior

Resumen

La idea de *tránsito* se introduce en el estudio de las derivadas sucesivas como un argumento que permite establecer coordinación entre los distintos órdenes de derivadas. Logra crear puentes de comunicación entre la función y las derivadas a través de la información que se obtiene del análisis al comportamiento variacional de la curva en diversos puntos. Este acercamiento hace necesario un estudio de las curvas, en el que se logren desarrollar habilidades de análisis y predicción de formas, además con la posibilidad de coordinar esta información con los ámbitos numérico y gráfico

Antecedentes

La investigación socioepistemológica relativa a la caracterización de la evolución didáctica del punto de inflexión (Castañeda, 2004), dio cuenta también de los mecanismos institucionales para la difusión del conocimiento y de las prácticas asociadas estudio del punto de inflexión dentro del ámbito de las diferencias infinitesimales.

La difusión del cálculo (como fenómeno de divulgación del saber) con fines didácticos se originó a partir de la necesidad de compartir los nuevos saberes que Leibniz, y por otra parte Newton, formularon. Pero el desarrollo de este proceso tuvo intérpretes que aportaron una versión, si bien fiel a las ideas, ordenada y con una secuencia que atendía a la lógica evolutiva de las ideas, entre estos matemáticos identificamos la obra del Marqués de L'Hospital y de María de Agnesi.

Las obras de estos personajes se publicaron cuando aún el cálculo estaba en un proceso de construcción. El papel de las obras se reconoce en dos sentidos; al aportar una aproximación del nuevo cálculo intentando clarificar las ideas y como medio difusor de un nuevo saber a través de un discurso especialmente escrito para fines didácticos o de difusión. Este último rasgo los define como los primeros libros de texto de cálculo de la historia y se reconoce en ellos un primer esfuerzo por estructurar un *curso escolar del cálculo.* En este ejercicio de organización y de formulación de un nuevo discurso se ha identificado el papel argumentativo de la geometría así como un acercamiento al cálculo basado en explicaciones geométricas también con carácter infinitesimal, es decir, que rompían con la axiomática de la geometría euclidiana.

Por otro lado, esa investigación mostró la existencia de ciertas prácticas que caracterizan saberes, como el punto de inflexión, a través de situaciones en donde se *hace necesario* ese saber. Estas prácticas se identificaron integradas al discurso que proponen los libros antes citados, en ellas se observa que el acercamiento a la ideas matemáticas se da a través de modelos

[1] Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

geométricos en los que se representa la variación (como el caso de la variación máxima de la subtangente), así las *aproximaciones sucesivas sobre una curva* representa una *actividad* específica que permite caracterizar la inflexión en una curva.

Estrategias en la investigación epistemológica; revisión de libros de Texto [2]

En una obra se puede identificar una *intencionalidad* del autor de *difundir* sus ideas, es en esta circunstancia que un análisis socioepistemológicos no sólo deben atender el contenido matemático se que dice y se *transpone*[3], sino también analizar las formas y procedimientos por los que éste conocimiento se comparte; las formas en las que se explican las ideas, los ejemplos que propone, la organización de la información, en suma, caracterizar la estructuración del saber que se expone.

Este ejercicio de análisis del *discurso* (Van Dijk, 1998) permite el reconocimiento de varios niveles; los procedimientos de difusión, los procedimientos de comunicación, las características del receptor, la intencionalidad del emisor, incluso algunos que son implícitos como la ideología que se desea transmitir.

Nos apoyamos en las explicaciones de la teoría socioepistemológica, la cual aborda desde una perspectiva sociocultural el problema de estudio de las matemáticas y permite explicar la *naturaleza de un discurso* y mostrar evidencias de cómo se construye el conocimiento (en este caso; el matemático escolar ó de difusión) a partir de una intencionalidad didáctica (Castañeda, 2002; Castañeda, 2000), así como aquellos aspectos de socialización de las ideas, como parte de un proceso por el que se de la ampliación del cuerpo teórico de la matemática.

Entonces a través de un estudio al *discurso matemático escolar*, se puede identificar el tratamiento que ofrece el autor de libro de texto a las ideas, a fin de establecer su naturaleza epistemológica e identificar los procedimientos de comunicación de las ideas matemáticas.

Este estudio busca también determinar la perspectiva y las concepciones de la matemática que transmite a fin de identificar sus efectos en el aprendizaje. Cabe advertir que aún siendo libros «de cálculo diferencial», el tratamiento de las ideas puede tener un sentido distinto, entre otras cosas, por el enfoque que domina el libro o bien al énfasis en el uso de ciertos instrumentos o ciertas tecnologías.

Caracterización de las formas de *comunicación* de ideas matemáticas; Marco Teórico para el análisis de libros

a. Argumentaciones sobre lo geométrico con apoyo visual

[2] Distinguimos un «análisis **didáctico** a las obras de texto» de un «análisis **epistemológico** a las obras de texto», por las preguntas que guían cada estudio. Para el primer caso, nos planteamos en escenario escolar, el tratamiento de la matemática para un fin específico que es el aprendizaje, en este caso podemos observar en las obras de texto, estrategias de comunicación, ejemplos para introducir el tema, dibujos o metáforas para el tratamiento didáctico de la matemática. En el análisis epistemológico las preguntas se orientan a definir la naturaleza del conocimiento tomando como referencia su marco epistémico, lo que el autor está entendiendo por cierto concepto matemático, el uso que se le otorga al conocimiento mismo y los procedimientos de comunicación de las ideas matemáticas en relación a su propia concepción del contenido matemático.

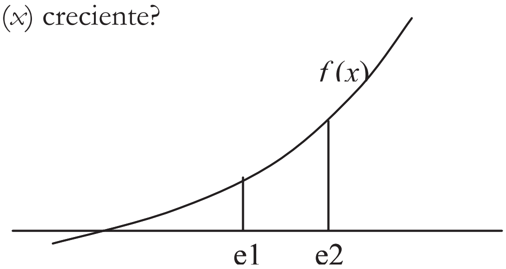
[3] En el sentido de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1991)

Tal y como lo demuestra el trabajo histórico – epistemológico de (Youschkevitech, 1976), la clasificación de las formas gráficas constituye un aspecto importante en el estudio de las funciones. Al respecto uno de los trabajos más trascendentes es el de Descartes, a quien además se le debe el relacionar a una curva algebraica plana con una ecuación. Descartes propuso una clasificación atendiendo a la naturaleza de las gráficas; mecánicas para aquellas cuya forma estaba asociada al movimiento de instrumentos o máquinas y geométricas para aquellas cuyo trazo correspondía a la habilidad humana.

El interés por organizar las curvas se formuló a partir de reconocer que en ellas existe un cúmulo de información el cual ofrece, no sólo un acercamiento a la naturaleza de los fenómenos sino además la posibilidad de determinar comportamientos, alcances, incluso formular predicciones y determinar patrones. Estas habilidades propias de un pensamiento funcional se convierten en herramientas fundamentales para entender los procesos de variación y cambio.

Por ejemplo, determinar si un fenómeno se comporta en forma creciente o decreciente, requiere por parte del lector ciertas habilidades de lectura y el uso de algunos criterios tales como la comparación, identificación de formas, estimaciones y cálculos, por citar algunas.

¿es $f(x)$ creciente?



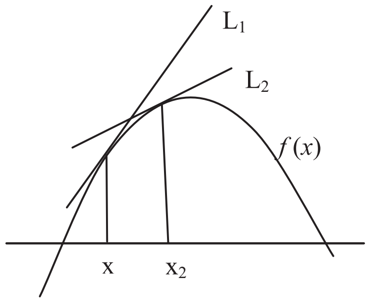
Estrategia

Criterio: comparación de estados
Argumento: Alturas de las ordenadas
Referente: geométrico - visual

El ejercicio visual conduce a distinguir dos puntos sobre el eje *x*, en cada punto una ordenada y finalmente comparar su magnitud. Al usar el criterio de comparación sobre las alturas de las ordenadas viene una conclusión del tipo; e1 < e2, con $|e2 - e1| < \varepsilon$, entonces $f(x)$ es creciente. Todas estas operaciones se integran a una habilidad que tras una breve incursión visual determina si $f(x)$ es creciente o decreciente.

b. Argumentaciones sobre lo geométrico – analítico

A medida que se profundiza en el estudio del cálculo, las construcciones geométricas que parecían más o menos simples, se vuelven complejas debido a que se agregan al escenario de estudio nuevos objetos (tales como la idea de tangente, grado, inclinación) los cuales se construyen a partir de objetos que pueden ser abstraídos de una simple incursión. Veamos por ejemplo una estrategia usada para responder a la siguiente pregunta; ¿ $f'(x)$ es creciente?



Estrategia

Criterio: comparación grados de inclinación
Argumento: Inclinación de las rectas tangentes
Referente: geométrico - analítico

En un primer momento se identifican y toman como referencia los puntos x_1 y x_2 sobre le eje *x,* se trazan las ordenadas correspondientes, se determina la recta tangente a cada punto sobre la curva. Entonces es posible determinar cómo es $f'(x)$; L_1 tiene un ángulo mayor que L_2, por lo tanto $f'(x_1) > f'(x_2)$, concluyendo algo como: si $x_1 < x_2$, con $| x_2 - x_1 < \varepsilon$, entonces $f'(x)$ es decreciente.

Observemos que para responder al planteamiento inicial se exige una abstracción sobre los trazos geométricos, ya que éstos por si solos son ahora insuficientes para responder.

c. Argumentaciones sobre lo algebraico

El rasgo más representativo de este escenario es el uso de la manipulación simbólica para expresar situaciones matemáticas.

En relación a este escenario (Douady, 1995), advierte que el desarrollo algebraico sobre un concepto matemático obliga justamente, al olvido del contexto donde se generó. De tal forma que las expresiones algebraicas, tal y como las conocemos, se presentan como una síntesis refinada de las discusiones matemáticas.

Otro de los riesgos, que advierte Douady, es una tendencia natural dentro de los sistemas escolares a reducir el tratamiento algebraico de los conceptos matemáticos a una colección de reglas y procedimientos, provocado fundamentalmente por un manejo de los algoritmos encaminado únicamente a desarrollar y fortalecer habilidades operatorias.

El escenario algebraico describe relaciones numéricas con literales y constantes bajo principios o leyes matemáticas. Veamos por ejemplo en Cantoral, (1998);

> *… una forma de encontrar la derivada de una función de un punto, consiste en desarrollarse en serie de potencias entorno del punto en cuestión. Veamos mediante un ejemplo cómo es que operan estas ideas. Considere la función dada por la expresión $f(x)=x^3$, de la cual quiere conocer la derivada en x., Si seguimos la estrategia de Cauchy tendremos:*

$$f'(x) = \lim_{n\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{n\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{n\to 0}\frac{x^3 - 3x^3h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$
$$\lim_{n\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

Si seguimos en cambio la estrategia de Lagrange, tendremos:

$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$, así que la derivada de *f* es el coeficiente de *h* es decir, $3x^2$

d. Argumentaciones sobre lo Analítico

El escenario analítico tiende a confundirse con el algebraico a consecuencia de una frontera que es muy poco perceptible. Sin pretender una definición; una aproximación analítica involucra funciones mentales avanzadas (como la variación, la predicción) para la determinación de leyes que rigen el comportamiento de un sistema.

Cantoral, (2001), describe algunos acercamientos analíticos en relación a la serie de Taylor, en ellos es posible observar diversos elementos matemáticos que conforman un sistema en el que la *variación* está en el centro del escenario.

> *El modelo de regularidad binomial, se caracteriza por percibir y utilizar una regularidad en los desarrollos binomiales. Centra su atención en los números y las magnitudes variables, aunque de éstas, no precisa su variación sino su semejanza operativa con los números… Entre los resultados característicos se cuentan, Triángulo de Pascal, Binomio de Newton, y fórmula de interpolación de Newton-Gregory. La serie aparece en todos ellos aún cuando no se le reconozca como patrón organizador.*
>
> *El modelo de variable-variación, consiste en reconocer y utilizar sistemáticamente, la idea de que la parte contiene la información del todo, es decir, en tanto que se estudia la variación de unas magnitudes variables respecto de otras ya sea físicas o geométricas, se reconoce que la variación instantánea o puntual proporciona la información integral del fenómeno.*

Otro ejemplo que clarifica una formulación analítica es expresada por el modelo de la *aproximación polinomial.*

> *…resulta muy cercano, a nuestra práctica sobre la Serie de Taylor y se caracteriza por reducir el cálculo de la función, al cálculo de polinomios. Para ello se construye una sucesión de éstos que converja a la función determinada y que hereden el comportamiento puntual de la función, para lo que también se estima el margen de error.*

Se puede observar que no basta reducir el problema a replantear el cálculo de una función al cálculo de polinomios, pues evidentemente no se trata de un ejercicio algorítmico. Existe, desde la perspectiva del autor, un sistema que proporciona un sentido general.

Observemos un caso de análisis al punto de inflexión. El libro es Cálculo de Stwart, edición 1998.

Referente: *Geométrico – Visual* Argumento: *Cambio de concavidad* Criterio: *Cambio de forma*	*Un punto P de una curva se llama punto de inflexión si en él la curva pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa.*

Referente: *Geométrico – Analítico* Argumento: *Posición de la tangente sobre la curva* Criterio: *Lugar en donde la tangente cruza la curva*	*En diversos puntos* de una curva *en [a,b], se han trazado tangentes a esas curvas, la curva que queda arriba de las tangentes, se dice que es cóncava hacia arriba en [a,b], la curva que está debajo de las tangentes se dice que es cóncava hacia abajo en [a,b].*
Referente: *Analítico* Argumento: *Cambio de signo de la segunda derivada* Criterio: *Si cambia de positivo a negativo y viceversa*	*…de acuerdo con la prueba de la concavidad, hay un punto de inflexión en cualquier punto donde la segunda derivada* ***cambie*** *de signo.* *PRUEBA DE CONCAVIDAD; Si f tiene segunda derivada en un intervalo I* *a) si f '(x)>0 para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I* *b) Si f '(x)<0 para toda x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I*

En este análisis se observa que se muestran múltiples caracterizaciones de los conceptos, sin embargo, no todos ellos son explícitos ni son de la atención del autor. Obsérvese por ejemplo que la definición «importante» del punto de inflexión recae en el método algorítmico. (tercer cuadro)

Evidentemente no somos de la idea de que un *buen discurso didáctico* sería aquel con el mayor número de caracterizaciones, se requiere de un discurso que atienda las diferencias, que cada contexto de representación expresa así como favorecer el tránsito esas caracterizaciones a través de situaciones, prácticas, usos que hagan visible al objeto estudiado.

Conclusiones

En el contexto del salón de clase, el libro de texto juega un papel importante para la comunicación de un discurso matemático, pues entre otras cosas, tiene la función de validar «lo que el profesor dice».

Sin embargo, nos enfrentamos a reconocer en él una *génesis ficticia* a consecuencia de que la matemática se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares, por lo que su introducción al sistema de enseñanza obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento (Cantoral, 2000), en este proceso las ideas matemáticas son presentadas en forma comprimida y refinada, privadas de sus significados primarios los cuales le son arrancados y aislados, de manera que aquellos contextos y situaciones que les dieron origen, sentido, motivo, son olvidadas.

La forma de legitimar su origen en el salón de clase es creando una *génesis ficticia*, que le proporcione una identidad para que sean estudiados. Al respecto, el programa socioepistemológico de investigación, considera importante problematizar el discurso matemático escolar y proponer, a través de la investigación, la incorporación de situaciones didácticamente robusta para favorecer aprendizajes.

El análisis de aquello que se erige como discurso escolar plasmado en los libros de texto, permiten entender los mecanismos de la adaptación del saber matemático a las prácticas escolares.

De este modo, la forma de enunciar una definición o un teorema depende del paradigma que se quiere reproducir, de la disciplina de aplicación del saber matemático, del uso de ciertos métodos de estudio de la matemática.

Referencias Bibliográficas

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana* ... Tomo I, Publicac. Milano, Italia: nella Regia Ducal Corte,

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa. Un estudio de la formación social de analiticidad.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral R., *et al* (2000). *Desarrollo del pensamiento matemátic*o. México: Trillas.

Cantoral, R. (1998). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: el caso del pensamiento y lenguaje variacional. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativ*a, R*elme-12, Santafé de Bogotá, Colombia.* (12, tomo I, pp. 41-48). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Castañeda, A. (2004). *Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica.* Tesis Doctoral. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN. México

Castañeda, A. (2002). Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. R*evista Latinoamericana de Matemática Educativa* 5(2), 27-44

Castañeda, A. (2000). *Estudio didáctico del punto de inflexión; una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor SA.

Douady, (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Gómez, P. (Ed.) *Ingeniería Didáctica en educación matemática.* (pp. 61-96). Una Empresa Docente. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

L'Hospital, A. (1696). *Analyse des infiniment Petits pour L'intelligence des lignes courbes* (primera reimpresión ,1988). Paris, France: ACL-Editions.

Stewart J. (1998). *Cálculo.* México: Thomson.

Van Dijk, Teun, (1998). *Ideología.* Expaña: Gedisa Editorial.

Youschkevitech, (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Arch. Hist. Exact. Sci.* 16, 37-85