La Socioepistemología en la Graficación del Discurso Matemático Escolar

Francisco Cordero
Cinvestav del IPN
México
fcordero@cinvestav.mx
Socioepistemología. – Nivel Superior

Resumen
Considerando varias investigaciones sobre la *graficación en el discurso matemático escolar* con la perspectiva socioepistemológica, se destaca cómo es que el estudio de usos y desarrollo de prácticas de la graficación responde a la demanda de hacer funcional al conocimiento matemático. En consecuencia orienta sobre nuevas concepciones de enseñanza y aprendizaje, necesariamente tensando aquellas perspectivas en enfocadas a las habilidades con aquellas, presumiblemente, enfocadas a las resignificaciones.

Introducción

Los sistemas educativos no han logrado hacer de la matemática un conocimiento funcional (en contra parte al conocimiento utilitario). Tal vez porque los modelos del conocimiento que ocupa la didáctica de la matemática están anclados al dominio matemático y en consecuencia a los conceptos del mismo. Sin embargo, el conocimiento, el pensamiento, la comprensión del mundo, a pesar de ser un aspecto necesario de la actividad humana, no logra por sí mismo modificar el objeto. Es algo así como concebir equivocadamente que tal aspecto sea la verdadera esencia de la vida humana. En ese sentido convenimos en dos aspectos: (a) que la matemática funcional es aquel conocimiento matemático que deberá integrarse a la vida para transformarla, reconstruyendo significados permanentemente (continuamente) en la vida. Esta funcionalidad no se podrá alcanzar en el sistema educativo sino se amplían los modelos de conocimiento que ocupa la didáctica de las matemáticas. Es necesario entender que la matemática se ha desarrollado porque ha estado al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia, donde se ha resignificado a ésta. Para ello, debemos incorporar o crear modelos del conocimiento matemático que rindan cuenta de *lo que constituye su contenido* y poner al descubierto las causas reales del desarrollo social de tal conocimiento. Y (b) que el volumen y el carácter de los conocimientos adquiridos por el hombre viene determinado por el nivel de *desarrollo de las prácticas sociales*, es decir, por el grado de su dominio sobre el mundo exterior.

Con esas consideraciones, la problemática de enseñanza y aprendizaje de la matemática genera fenómenos didácticos en torno a la ausencia de marcos de referencia que ayuden a resignificar el conocimiento matemático. Por ello, *la práctica social es fundamental en la socioepistemología*, es un elemento teórico que orienta y norma las epistemologías en cuestión. Constituye el medio para estudiar el conocimiento matemático escolar. Este medio tiene como función señalar otras dimensiones que no son explícitas en la metáfora de la actividad matemática como son *las prácticas en lo social* y *las argumentaciones en lo situacional* (Buendía y Cordero, 2004). En este sentido daremos un ejemplo considerando varias investigaciones sobre la *graficación en el discurso matemático escolar* con la perspectiva socioepistemológica. Destacaremos cómo es que el estudio de usos y desarrollo de prácticas de la graficación nos acerca más a la matemática funcional, pero también nos orienta sobre nuevas concepciones de enseñanza y aprendizaje, necesariamente, tensando el problema de habilidades con el problema de resignificaciones.

El uso de las gráficas. Un ejemplo

Hemos encontrado evidencias sobre prácticas argumentativas gráficas en diversas situaciones, donde son resignificadas al debatir entre la *función* y *forma* de la graficación.

El "hallar la recta tangente", el "predecir la posición de un móvil" y el "dilatar una gráfica" son situaciones donde se resignifica el concepto de derivada, generando prácticas argumentativas gráficas diversas. Tales prácticas se desarrollan al debatir entre *la función* y *forma* de las gráficas. Por ejemplo, el límite de un cociente se resignifica a través de la *predicción*, la *graficación* y la *analiticidad*: la derivada y la recta tangente debaten contra la comparación de dos estados y la sucesión simultanea de las derivadas (Buendía y Cordero, 2004; 2004), pero también debaten contra la variación de parámetros y el comportamiento tendencial (Domínguez, 2003, Campos, 2003, Rosado, 2004). Sin embargo, semejante hecho no componen ningún eje didáctico, ni para las gestiones de situaciones de enseñanza y ni para el currículo escolar.

Por ello estamos proveyendo indicadores para el rediseño del discurso matemático escolar, por una parte, desarrollando situaciones didácticas donde la graficación juega el papel de argumentación matemática (Cordero, 2003; Rosado, 2004; Campos, 2003; Domínguez, 2003), y por otra parte, fundamentando epistemologías donde la graficación es apreciada como una práctica social que genera conocimiento del Cálculo (Cordero, 2003). Las investigaciones al respecto se han enfocado al estudio de uso de las gráficas en la obra matemática y en el discurso matemático escolar. El nivel de avance hasta el momento ha consistido en analizar ciertos aspectos de la obra de Oresme (1379) (Suárez, 2002) y de Euler (1748), y de los libros de matemáticas del Nivel Básico, Medio Superior y Superior (Flores y Cordero, 2004). A continuación señalamos una serie de resultados significativos al respecto.

a) Graficación-Modelación-Predicción. Se han logrado relacionar las prácticas de graficación, de modelación y de predicción, donde el comportamiento de las curvas o funciones anticipa tendencias de comportamiento tanto localmente como globalmente: la derivada es resignificada en la linealidad del polinomio (Rosado, 2004), la asintoticidad es resignificada a través de comparar las formas de comportamiento entre dos funciones ($\lim_{x\to\infty}(f-g)=0$) y comparar la "rapidez" de comportamiento entre dos funciones ($\lim_{x\to\infty}\frac{f}{g}=1$) (Domínguez, 2003), así como resignificar a las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes como un modelo de estabilidad (Solís, 2002), y el movimiento local es resignificado en el movimiento periódico (Buendía y Cordero, 2004).

b) Situación de la linealidad del polinomio. La situación destaca el uso de la graficación de los participantes, cuya epistemología modela la práctica de graficación y no el concepto de derivada (ver figura 1). La *función* de la gráfica en la situación consiste en generar el comportamiento tendencial determinado por la parte lineal del polinomio, lo que viene siendo la resignificación de la derivada. El procedimiento generado consiste en, primero, trazar la recta (parte lineal del polinomio) y después la curva buscando el comportamiento tendencial del polinomio con relación a la recta trazada. Tal procedimiento debate contra el trazo de la recta tangente, cuya *forma* consiste de una secuencia de conceptos: dibujar la gráfica de la función, señalar un punto sobre la gráfica y trazar la recta tangente en ese punto (Rosado, 2004 y Cordero, 2004).

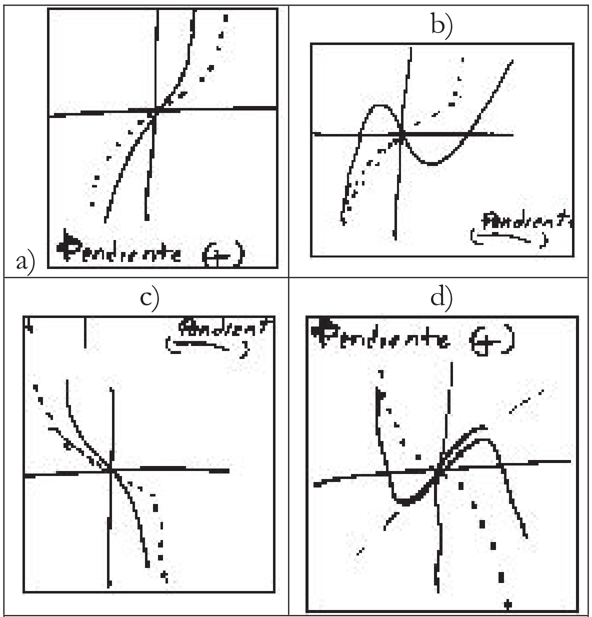


Figura 1.a. Las gráficas y las pendientes de la "parte lineal" del polinomio

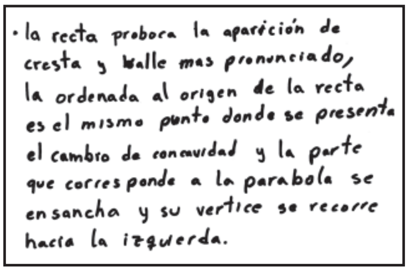


Figura 1.b. Descripción del comportamiento gráfico

Figura 1. Uso de la graficación en la linealidad del polinomio

c) El uso de las gráficas en Oresme. En Oresme, (*Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum: 1379*) encontramos la *función* y la *forma* de la gráfica diferente a la de las gráficas cartesianas (Suárez, 2002). Oresme se propuso representar a través de figuras geométricas (rectángulos y triángulos) el modo en que las cosas varían. Partió de la idea que *el instante de una cantidad continua es representado por un segmento rectilíneo y que la medida de los instantes es representada por la medida de esos rectilíneos de instante*. Además, considera que *toda cosa medible, excepto los números, se puede imaginar como una forma de cantidad continua.* La *función* y *forma* de las figuras (gráficas) no consistía en describir la posición de los puntos respecto de coordenadas rectilíneas, sino que las figuras mismas eran la cualidad de la cantidad continua, en ese sentido las figuras geométricas adquirían un significado global. Las propiedades de la figura podían representar propiedades intrínsecas a la misma cualidad. Tal vez por ello, Oresme resignifica las figuras geométricas para establecer diferentes tipos de variación (figura 2): usa un rectángulo para representar una variación uniformemente uniforme (ver figura 2.a); un triángulo o trapecio para representar una variación uniformemente deforme (ver figura 2.b); y una figura irregular para representar una variación deformante deforma (ver figura 3.c.

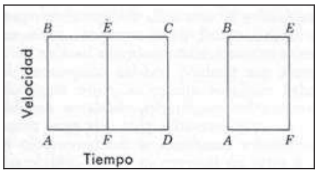
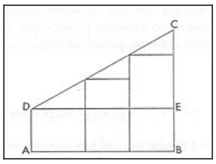
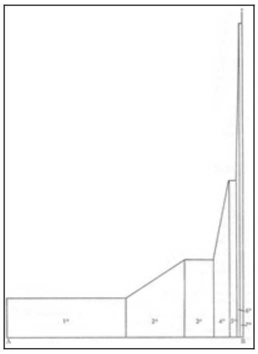
 Figura 2.a. Variación uniformemente uniforme	 Figura 2.b. Variación uniformemente deforme	 Figura 2.c. Variación deformante deforma

Figura 2. Figuras geométricas con cualidad de la cantidad continua

c) El uso de las gráficas en Euler. Euler, en su "Introducción al Análisis del Infinito" (1748), nos ofrece un uso de las gráficas para determinar que las propiedades analíticas de las funciones son intrínsecas a las *curvas*: la función de la gráfica consiste en caracterizar el comportamiento de la curva a través de las formas de las ramas que la componen. Por ejemplo, cuando determina la propiedad asintótica de las funciones, caracteriza a la asíntota con relación a las curvas (Domínguez, 2003). Para ello acude a funciones tales como $z = \frac{C}{t^k}$, para caracterizar el comportamiento de la curva a través de las formas de sus ramas (ver figura 3).

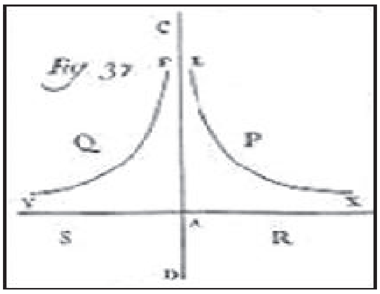


Figura 3. Gráfica de la función $z = \frac{C}{t^2}$

Sí $z = \frac{C}{t^2}$, la curva tiene dos ramas, *EX* y *FY* como en la figura 3, las cuales en los cuadrantes *P* y *Q* convergen a la línea recta *XY*. Lo mismo pasa si *k* es cualquier número impar, pero la convergencia de las ramas es tan rápida como tan grande es *k*. Euler define, por una parte, que cuando las curvas se aproximan a la línea recta del tipo *XY*, las cuales estarán cada vez más cerca de la línea recta, encontrándose sólo en el infinito, se les llaman curvas asintóticas. Y, por otra parte, define que cuando las dos ramas de la curva van al infinito y que cada una se aproxima a la misma recta, a ésta se le llama asíntota. Además, k no sólo da el número de ramas que convergen a la línea recta, sino también el patrón de comportamiento. Euler usa las gráficas como curvas compuestas de ramas con comportamiento y forma. En ese sentido la asintoticidad es un comportamiento al infinito *intrínseco* de las ramas de ciertas curvas. Esto alude a que el comportamiento tiene *forma* y en consecuencia pudiera ayudar a resignificar a la línea recta asíntota como asíntotas curvilíneas. Este aspecto es importante porque el estatus epistemológico de lo asintótico en el discurso matemático escolar advierte del privilegio de la asíntota de una función como una recta (Domínguez, 2003). Cabe señalar que los segmentos como los de la figura 3, *XY* y *CD* no son lo ejes cartesianos para ubicar en el plano a la gráfica de la función $z = \frac{C}{t^2}$, son los marcos de referencia para resignificar el comportamiento de las curvas.

d) Uso de las gráficas en los libros de texto. Las gráficas en los libros de texto pasan por diferentes *funcionamientos* y *formas* desde el uso de la hoja de papel en los niveles educativos básicos para establecer orientaciones y simetrías, el uso de las cuadrículas para establecer trayectorias y reproducirlas (Libros de texto gratuito: SEP 2003-2004; Flores, 2004), el uso del plano y de los ejes cartesianos, los privilegios del primer cuadrante, los sistemas autónomos del tiempo, las diferencias de usos entre las curvas y las gráficas de las funciones (Campos, 2003). Las gráficas cartesianas aparecen explícitamente, pero moderadamente, por primera vez en quinto y sexta año de Primaria. En Secundaria se perciben diferentes *funcionamientos* y *formas* de las gráficas. Por ejemplo, considerando la definición geométrica de la recta euclidiana es representada en el plano con ejes cartesianos para favorecer ciertos procedimientos para calcular las pendientes de las mismas rectas, pero también tales gráficas (rectas) son resignificadas para que a partir de cierta relación de datos numéricos se analice su distribución creando procedimientos para determinar si tal distribución es lineal (Flores y Cordero, 2004).

Los usos de las gráficas anteriormente vertidos significan que la graficación pueda llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón o generalización deseable, es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación. La graficación en sí misma es un tipo de modelación que trasciende y se resignifica transformando al objeto en cuestión (Cordero, 2004). La argumentación gráfica en las diversas situaciones de uso permite el continuo, en un sentido epistemológico. Para que no se destruya se requiere alcanzar un estatus cultural de la argumentación gráfica. De aquí la conveniencia de pensar a la graficación como una práctica social y esto es lo que tendremos que saber desarrollar en el sistema educativo. Para ello, hemos logrado ubicar a la argumentación gráfica en una situación de transformación donde los comportamientos de las figuras geométricas, curvas, gráficas y funciones son resignificados generando procedimientos de variación de parámetros y construyendo procesos y objetos de instrucciones que organizan comportamientos (Cordero, 2004; Domínguez, 2003; Campos, 2003; Rosado, 2004; Buendía y Cordero, 2004; y Suárez, 2002).

Conclusiones

El estudio de usos y desarrollo de prácticas de la graficación nos acerca más a la matemática funcional, puesto que nos ofrece indicadores para que el conocimiento se integre y se resignifique permanentemente a la vida para transformarla. Pero para lograr que impacte en el sistema educativo se requiere modificar el modelo de conocimiento que por una parte ha estado enfocado a los conceptos y por otro lado, anclado al dominio matemático. Todo ello, ha soslayado a las prácticas que han generado los conceptos y deja de lado otros dominios de conocimiento que necesariamente intervienen para ampliar los sentidos del conocimiento matemático. El modelo del conocimiento enfocado a las prácticas sociales obligadamente tensará las actuales concepciones de enseñanza y aprendizaje, englobadas en el modelo de los conceptos como un *problema de habilidades para alcanzar los conceptos*, para abrir nuevas concepciones de enseñanza y aprendizaje, donde se construyan los medios adecuados para que se desarrollen las prácticas sociales que generan el conocimiento matemático, y que seguramente surgirán problemáticas en torno a las *resignificación del conocimiento matemático.*

Referencias Bibliográficas

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics 58*(3).

Campos, C. (2003) *La argumentación gráfica en la transformación de funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics education: a vision of its evolution, *Educational Studies in Mathematics 53*(3), 255-270.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del cálculo integral. La noción de acumulación como una argumentación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (en prensa). La modellazione e la rappresentazione grafica nella matematica scolastica. *La Matemática e la sua Didattica.*

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Euler, L. (1990). *Introduction to Analysis of the Infinite* (Libro II). Springer-Verlag (Trabajo original publicado en 1748)

Flores, R. y Cordero, F. (2004). Uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. *Resúmenes de la Decimoctava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, México, 249.

Oresme, N. (1988). *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum.* (P. Souffrin y J.P. Weiss. Trads.). París, Francia: Belles Lettres. (Trabajo original publicado en 1379)

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav, México.

Solís, M. (2002). Las nociones de predicción y simulación en ecuaciones diferenciales a través del comportamiento tendencial de las funciones. En F. Cordero (Ed.) *Serie: Antologías Número 2.* (pp.113-136). México.

Suárez, L. (2002). *Actividades de simulación y modelación en el salón de clases para la construcción de significados del Cálculo.* Manuscrito en preparación.