La Función Logaritmo bajo la Perspectiva de la Construcción dada por Agnesi (1748)

Renata Ivonne López y Marcela Ferrari
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México
renata_ivonne@yahoo.com.mx
Socioepistemología – Nivel Medio

Resumen

Apoyados en un análisis del discurso matemático escolar, contenido en libros de nivel bachillerato y licenciatura, observamos que la forma de introducir la gráfica de la función logaritmo es realizada mediante: simetría, área bajo la curva o una tabla, lo cual es presentado sin argumentos suficientes que nos permita deducir y entender la construcción de la función logaritmo (López et al., 2003). En general, los logaritmos son presentados en un sentido algorítmico o incluso, axiomático, más que como resultado de un razonamiento o una construcción (Ferrari, 2001). En el presente trabajo, basándonos en los supuestos de la socioepistemología, buscamos evidenciar que utilizar una herramienta distinta permitirá generar significados más allá de aquellos logrados actualmente.

Introducción

El presente trabajo de investigación tiene como propósito identificar cualidades en las ideas de Agnesi, que usando una herramienta geométrica nos permita diseñar otra forma para introducir la gráfica de la función logaritmo, distinta a la propuesta en los libros de texto.
Así, en contraposición a las herramientas usuales tales como: tabulación, graficadoras, nuestra propuesta, desarrollada con la ingeniería didáctica (Artigue, 1995), considera herramientas fundamentadas en la construcción de Agnesi (1748) que considera tres elementos: geometría plana, continuidad y covariación.

Basta mirar los índices y resúmenes de las distintas revistas científicas y de difusión de nuestra disciplina, para observar la profusión en el abordaje de la problemática de la apropiación de la noción de función. En efecto, la importancia conferida a la misma desde el paradigma euleriano, al convertirla en eje del estudio de las matemáticas, y las dificultades propias de una noción que admite varias concepciones y representaciones, se ve reflejada en el interés por su estudio de investigadores de la más diversa índole. Nuestro interés por el estudio de los logaritmos partió, en un inicio, del hecho que, según se reportara en Ferrari (2001), la manipulación errónea de los mismos da cuenta de la no apropiación de la noción logaritmo, producto de no ser construida escolarmente. En ese trabajo se reportó la dislexia escolar producto del quiebre entre la presentación operativa de los logaritmos y la presentación funcional de los mismos.

Consideramos que estudiar a profundidad la problemática propia de la noción de función resta importancia o pertinencia a hacerlo con funciones particulares. Al cuestionar esto desde nuestra investigación y adherirnos a la idea de que es vital reconocer la naturaleza de cada función para abordarla, nos vemos obligados a reflexionar y analizar las propuestas que existen en el medio sobre la covariación como una manera alternativa de abordar el tema de función. La pertinencia de esta idea radica en la hipótesis epistemológica surgida del análisis preliminar que se realizara en Ferrari (2001), a saber: "el uso explícito de la covariación de progresiones geométricas y aritméticas podría constituirse en un importante elemento de resignificación de los logaritmos.

Sustento teórico

Así, nuestro trabajo se enmarca en la *socioepistemología*, o epistemología de las prácticas sociales relativas al saber, es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar con los fenómenos de producción y difusión del saber desde una perspectiva múltiple, pues articula en una misma unidad de análisis a las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza (Cantoral, 2004)

En este sentido, encontramos en el análisis socioepistemológico de los logaritmos reportado en Ferrari (2001). Se distinguen tres etapas en la consolidación de esta noción dentro del discurso matemático al tomar como eje central las relaciones entre las progresiones aritméticas y geométricas, argumento utilizado por Napier para su primera definición. Como primer momento, consideramos a *los logaritmos como transformación numérica*. Se desarrollan fundamentalmente en el contexto numérico comenzando con ideas intuitivas de transformar para facilitar operaciones intentando regresar a la aritmética, es decir, utilizar sólo sumas y restas. Así, de la influencia de las primitivas formulaciones de las progresiones y de las relaciones entre ambas surge la definición de los logaritmos.

Como segundo momento se define, *los logaritmos como modelizadores*. En esta etapa se determinan sus características geométricas; logran pertenecer al discurso matemático de principios del siglo XVII; se les dota de una gráfica al adecuarlos al nuevo registro "algebraico-geométrico"; logran completar un modelo matemático de la cuadratura de curvas representativas de funciones potencia; permiten describir fenómenos físicos y se descubren nuevas formas para calcularlos en series de potencias todo lo que permite que accedan al discurso matemático del siglo XVIII y adquieran el status de función.

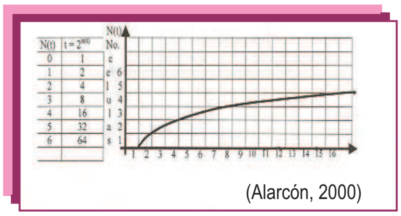
El tercer momento corresponde a la etapa de *los logaritmos como objetos teóricos*, conceptos trabajados en la enseñanza actual y que los encuentra escindidos de las argumentaciones necesarias, las cuales pueden contribuir a dotarlos de un mayor sentido, apartándolos de su tratamiento actual que los reduce a una aplicación algorítmica de sus propiedades apareciendo en el aula sin ningún antecedente analítico que pudieran haber adquirido los estudiantes hasta ese momento.

En nuestro trabajo estamos profundizando el análisis de las herramientas puestas en juego en el siglo XVIII, particularmente por Agnesi, matemática preocupada por la enseñanza del cálculo.

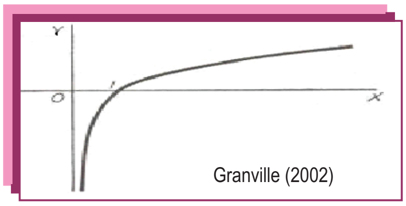
Discusión del análisis de textos escolares

Tres son los argumentos que hallamos al analizar algunos libros de texto de nivel bachillerato y licenciatura, en los que observamos que la forma de introducir la gráfica de la función logaritmo es realizada mediante las duplas: expresión algebraica-tabla, función inversa-simetría, teorema fundamental del Cálculo-área. Todos estos acercamientos son presentados sin elementos suficientes que nos permita deducir y entender la construcción de la función logaritmo, haciéndolo de modo ostensivo.

Varios textos escolares, tanto los utilizados en cursos de Álgebra en el primer semestre del Nivel Medio Superior; como los de Cálculo de quinto y sexto semestre de este nivel escolar y primeros semestres de licenciatura, presentan la gráfica de la función logaritmo como resultado de determinar la expresión algebraica, construir la tabla numérica correspondiente a cierto intervalo (abscisas positivas y en general, enteras), ubicar los puntos en un par de ejes coordenados (de forma explícita auxiliada por una cuadrícula o sólo bosquejada) para, finalmente, unir los puntos seleccionados dando por hecho la continuidad de esta curva.



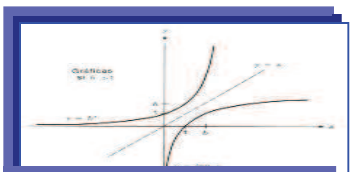
(Alarcón, 2000)

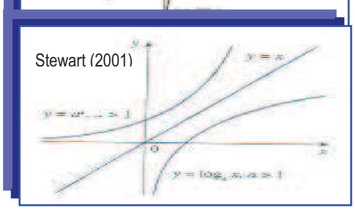


Granville (2002)

El segundo argumento, la dupla función inversa-simetría, aparece luego de haber definido a los logaritmos como la función inversa de la función exponencial (o viceversa).

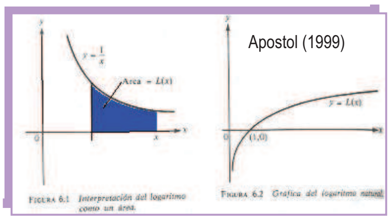
Ejemplo de esto lo hallamos en Rees (1994) y Stewart (2001) que presentan la gráfica como el reflejo de la función exponencial a lo largo de la recta $y=x$, reforzando el hecho de ser inversas.

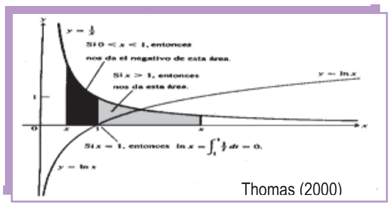




Stewart (2001)

Por último, el tercer argumento, teorema fundamental del Cálculo-área, que hallamos en libros como Apóstol (1999) y Thomas (2000) donde muestran la función logaritmo como el área bajo la curva de la hipérbola equilátera. Se enfatiza así, la utilización de la derivada y la integral como operaciones inversas, pero no se muestra la relación entre una y otra curva como la posibilidad de completar el patrón de las áreas de las curvas x^n (potencias e hipérbolas).



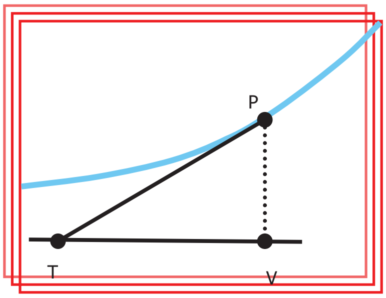


Los tres casos que hemos mostrado nos llevan a aceptar, implícitamente, que es imprescindible conocer la expresión algebraica para obtener la gráfica de una función. Hemos observado también, que estas creencias son fomentadas por el uso de las calculadoras graficadoras ya que la mayoría de las actividades que se diseñan para explorar las funciones y enriquecer el universo gráfico, generan dependencia de las expresiones algebraicas.

Aportes de Agnesi a la discusión escolar de la gráfica de los logaritmos

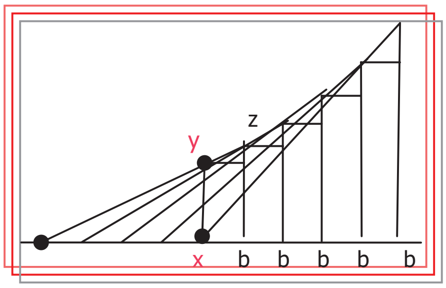
Hasta aquí, hemos presentado los argumentos que actualmente son utilizados en la construcción del discurso matemático escolar poniendo en evidencia de la predilección por herramientas matemáticas que privilegian una visión algebraica. Sin embargo, analizar algunas de las herramientas utilizadas en los siglos XVII y XVIII enriquece los argumentos gráficos permitiéndonos proponer un acercamiento diferente, que pudiera contribuir a la construcción escolar de la noción función logaritmo.

F. Debeaune (1601-1652), luego de leer la geometría en 1637, le propone a René Descartes un problema geométrico: encontrar una curva *y(x)* tal que para cada punto P la distancia ente V y T, los puntos donde la vertical y la línea tangente cortan al eje x, sean siempre iguales.



Según (Hairer, E. y Wanner, G. (1998) este problema permaneció sin ser resuelto, hasta que Leibniz en 1684, casi 50 años más tarde, propone la siguiente solución: Sean *x, y* puntos dados. Entonces, para hallar la curva solicitada basta incrementar *x* por pequeños incrementos de b, de modo que *y* incremente (debido a la semejanza de dos triángulos) por $\frac{yb}{a}$. Repitiendo, este proceso se obtiene las siguientes sucesiones de valores:

y, $\left(1+\frac{b}{a}\right)y$, $\left(1+\frac{b}{a}\right)^2 y$, $\left(1+\frac{b}{a}\right)^3 y$, … para las ordenadas y x, $x+b$, $x+2b$, $x+3b$, … para las abscisas.

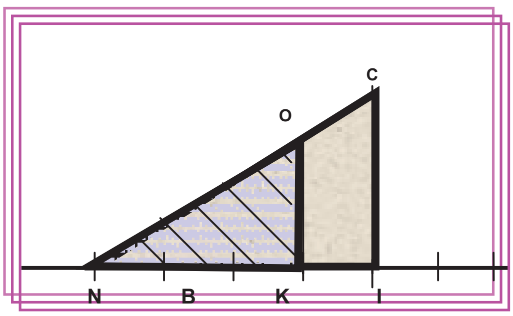


En 1748, María Agnesi interesada en la enseñaza del Cálculo publica una de los primeros libros de carácter didáctico, donde retoma esta gráfica buscando una solución a expresiones como $\frac{ax^{-1+1}}{-1+1}$, que resultan de utilizar la fórmula $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, cuando n = -1.

Señala que en estos casos es necesario recurrir a otros métodos uno, por medio de una curva llamada *Logarítmica* ó *Logística* y otro, mediante series infinitas. En este trabajo nos interesa analizar cómo es que Agnesi propone construir esta curva.

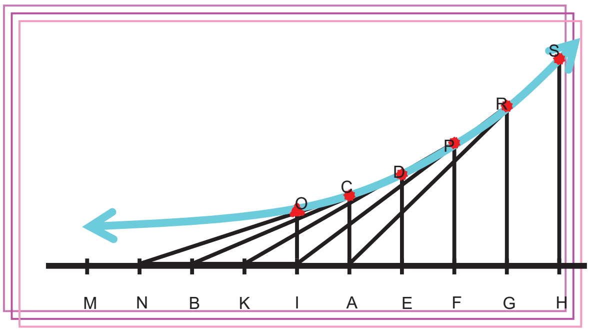
Propone trazar una recta cualquiera MH, a la que se divide en partes iguales MN, NB, BK, etc. y se toma a uno de los segmentos, por ejemplo NI. En el punto I se alza una perpendicular IO del tamaño que se quiera, y de N se traza una recta que pase por O. Luego se traza una perpendicular por el punto A, cuyo encuentro con NO sea C. Es necesario hacer notar que se pretende construir la curva mediante triángulos semejantes como ΔNIO y ΔNAC, donde las alturas originan una progresión geométrica.

Ahora se traza por B una recta que pase por C y una perpendicular sobre E donde toque a BC determinándose así el punto D.



Se repite este procedimiento hasta el infinito. Los puntos O, C, D, P, R, S estarán en la curva Logarítmica, por que en aquella época cuando se mencionaban progresiones aritméticas y geométricas se estaba hablando de una curva logarítmica.

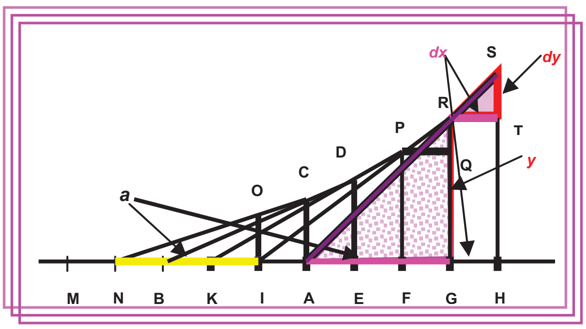
Es importante decir que no había distinción entre uno y otro comportamiento, es decir, no importaba si era progresión aritmética y geométrica ó al revés, por que para ese entonces lo que hoy conocemos como exponencial y como logaritmo, ambas estaban contempladas en el mismo concepto. Por eso no es extraño que la que se ha trazado es la exponencial, sin embargo, con sólo girar el gráfico se obtendría la logaritmo. Otra observación interesante es que en el siglo XVIII sólo se manejaba un eje, el de las X.



Agnesi continúa la discusión de la curva logaritmo partiendo de este grafico para obtener la expresión algebraica, mediante semejanza de triángulos y extendiendo las ideas a los diferenciales.

Para ello traza dos rectas PQ y RT, llamando "*a*" al segmento NI, "*dx*" a cada división de la recta MH, por ejemplo GH=*dx* y las ordenadas GR=*y,* y TS=*dy* .Además RT= GH=*dx* y AG es "a" por similitud de los triángulos SRT y RGA, así $\frac{y}{a}::\frac{dy}{dx}$

por tanto $dx = \frac{ady}{y}$, es la expresión que representa la curva logarítmica.



A manera de conclusión

En este artículo presentamos los aportes que Agnesi nos abriera una fructífera línea de reflexiones sobre la construcción de la curva logarítmica. Agnesi utilizando geometría plana, continuidad y covariación nos propone otra forma de introducir la gráfica de la función logaritmo, dando un soplo fresco al discurso matemático escolar, anclado actualmente en la definición, conocer su notación y expresión algebraica, crear la tabla, graficar los puntos dados y por último unirlos.

Agnesi propone utilizar la semejanza de triángulos, las diferenciales y las progresiones simultáneas como herramientas de construcción, ya que mediante progresiones y semejanza de triángulos construye la grafica para luego, con semejanza de triángulos y diferenciales obtener la ecuación de la curva, que es distinta a la forma que existe en las escuelas.

Nos resta ahora diseñar actividades matemáticas para obtener resultados interesantes sobre este nuevo enfoque de la función logarítmica y por ende de la construcción gráfica de funciones, en respuesta a la hipótesis epistemológica que genero esta investigación.

Referencias Bibliográficas

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventu italiana.* Milán, Italia: Regia Ducal Corte.

Alarcón, G. (2000). *Matemáticas, aritmética y álgebra.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Apóstol, T. (1999). *Calculus.* México: Reverté.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez, (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México: Una Empresa Docente, Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol. 17, Tomo I, pp. 1-9). México.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo.* Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav, México.

Ferrari, M. (2004). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol. 17, Tomo I, pp. 45-50). México.

Granville, W. (2002). *Cálculo diferencial e integral.* México: Limusa.

Hairer, E. y Wanner, G. (1998). *Analysis by its history.* New York, USA: Springer Science.

López, R, Ferrari, M. y García, C. (2003). Propuesta didáctica de la función logaritmo fundamentada en la construcción geométrica de Agnesi. *Resúmenes de la VII Escuela de Invierno y VII Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, México, 64 - 65.

Rees, P. (1994).*Álgebra.* México: McGraw-Hill.

Stewart, J. (2001). *Cálculo.* México: Internacional Thomson Editores.

Thomas, G. (1998). *Cálculo en una variable.* México: Pearson Educación.