

Los Logaritmos a Partir de la Covariación de Sucesiones

Marisol Hernández y Marcela Ferrari

Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero

México

mhs021084@yahoo.com.mx

Socioepistemología – Nivel Medio

Resumen

En este artículo se presenta una propuesta para la introducción al tema de los logaritmos; dicha propuesta se presenta con una secuencia la cual es realizada bajo el marco de la socioepistemología (Cantoral, 2004) y la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue, 1995; Douady, 1995). En esta secuencia se trabajan sólo dos propiedades de los logaritmos, las cuales se abordan con cinco actividades.

Aquí se pretende dar parte del análisis preliminar que se hizo, para poder diseñar la secuencia matemática, junto con el análisis a priori y los resultados de algunas exploraciones que se han llevado a cabo. Dentro de la descripción del análisis preliminar se quiso recalcar el problema que se detectó al abordar el tema de los logaritmos y por el cual se da esta propuesta.

Nuestra propuesta surge a partir de un problema que se observó en la enseñanza de los logaritmos y sus propiedades; esto se ha visto en textos de matemáticas, nivel bachillerato, en los cuales dan una definición “es el exponente al que hay que elevar un número llamado base para encontrar un número”. Luego de dar la definición, se dan algunos ejemplos de notación y se les dan las propiedades enunciadas como teoremas; los cuales se demuestran utilizando la definición y las leyes de los exponentes. Una vez demostrados los teoremas, se les dan una serie de ejercicios en los cuales sólo se tiene que sustituir un valor para encontrar el valor pedido. En general el alumno es sometido a una algoritmia que inhibe dotarlo de significado. En esta propuesta pretendemos que, con la realización de la secuencia, construya la idea de lo que son los logaritmos y dos de sus propiedades; sin embargo esta secuencia sólo se diseña para la introducción a dicho tema.

Una parte muy importante de esta propuesta es el uso de la covariación, ya que para nosotros, la relación entre una sucesión (progresión) geométrica y una aritmética permite hablar de logaritmos, y esta relación es precisamente la covariación (Ferrari, 2004).

Estas ideas están sustentadas en los trabajos de Napier (1616) y de Briggs (1620), entre otros, ya que ellos fueron unos de los primeros en relacionar dichas progresiones; Napier decía que la relación entre cualquier progresión geométrica con una aritmética formaba un sistema logarítmico.

Por su parte Briggs trabajó y criticó las ideas de Napier, ya que construyó ejemplos de relaciones entre progresiones geométricas y aritméticas las cuales no facilitaban los cálculos, por ejemplo:

	A	B	C	D
1	1	5	5	35
2	2	6	8	32
4	3	7	11	29
8	4	8	14	26
16	5	9	17	23
32	6	10	20	20
64	7	11	23	17
128	8	12	26	14
numeri proportion- ales.	Logar.	Logar.	Logar.	Logar.

Sin embargo, Briggs también hizo un gran aporte al proponer utilizar la base 10 y el par 1,0. (Figura 1)

A	B	C	A	B	C	A	B	C
1	0	0000	1	0	000000	1	0	00000000
10	1	1000	3	1	047712	2	1	03010299
100	2	2000	9	2	095424	4	2	06020599
1000	3	3000	27	3	143136	8	3	09030899
10000	4	4000	81	4	190848	16	4	12041199
100000	5	5000	243	5	238561	32	5	15051499
1000000	6	6000	729	6	286272	64	6	18061799

Figura 1

Material que se usa para la secuencia

Para la presentación de la secuencia se utilizan una especie de fichas de dominó en las cuales se observa, en la parte superior, una progresión geométrica y en la inferior una aritmética (como se muestra en la figura 2); esto es con el fin de que relacionen las dos progresiones y no las tomen como cosas separadas y además que se lleven una idea de que son pares ordenados de la función logaritmo.

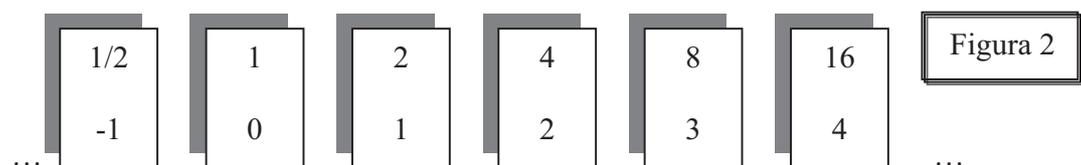


Figura 2

Fases de la secuencia y análisis a priori

Como ya se mencionó nuestra propuesta se presenta con una secuencia que a su vez está dividida en tres partes

- Observar las progresiones
- Observar las propiedades
- Usar las propiedades

La primera parte de la secuencia se aborda con tres actividades, en las cuales precisamente el objetivo es que observen cuales son las progresiones que contiene nuestras fichas, es decir que encuentren el patrón de dichas fichas y las puedan relacionar.

En la actividad 1, se les dan las fichas que en la parte inferior contiene los números del 1 al 6, pero se les dan desordenadas y lo que se les pide que hagan es precisamente que las ordenen como ellos creen conveniente, también se les pide que den una explicación de su forma de ordenarlas.

Lo que pretendemos es que las ordenen de manera ascendente (como la figura 2), para que así puedan reconocer el patrón de las fichas. Sin embargo se cree que los estudiantes tratarán de encontrar diferentes formas para ordenar las fichas; alguna forma podría ser como fichas de dominó o buscando la manera de que los números coincidan sumándolos o restándolos.

En la segunda actividad se les dan seis fichas en blanco, esto es porque se les pide que extiendan la serie de fichas de la primera actividad, es decir, que las fichas que ellos construyan continúen la secuencia de las fichas que ya tienen, tanto para la izquierda como para la derecha. Esta actividad implica el uso de números negativos y fracciones, por lo tanto se cree que habrá dificultades para extender la serie hacia la izquierda; sin embargo si en la actividad uno, observaron bien las dos progresiones, no habrá gran dificultad para extender la serie hacia la derecha.

La tercera actividad es muy similar a la segunda, sin embargo aquí se les presenta una pequeña confusión, es decir, de la serie que ya tienen se toman algunas fichas y se les presentan salteadas y ordenadas, junto con seis fichas en blanco, esto es para que extiendan la serie con fichas salteadas; aquí tendrían que observar un nuevo patrón para continuar la secuencia de las fichas, es decir, tendrán que observar los números por los cuales se multiplica y se suma, respectivamente.

Las actividades dos y tres, son para reforzar las ideas de la actividad uno, en fin, las tres actividades son para reconocer bien las dos progresiones, aun cuando tengan las fichas salteadas, para poder realizar bien las demás actividades.

La segunda parte de la secuencia, la cual es de observar las propiedades, se aborda con la actividad cuatro que a su vez se divide en dos partes, en las cuales se trabajan las propiedades del producto y del cociente. Para llevarla a cabo se les dan tercias de fichas (como se observa en la figura 3), en las cuales una está en blanco y se les pide que la construyan. Para esto se les dice que sólo tienen que multiplicar los números de la parte superior y tienen que buscar, en el conjunto de fichas que tienen de las actividades anteriores, la ficha que corresponde y así comenzarán a percibir la relación entre multiplicar y sumar.

$$\begin{array}{|c|} \hline 1/2 \\ \hline -1 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

Figura 3

Como ya se dijo esta actividad se divide en dos partes, en la primera se trabaja la propiedad del logaritmo del producto y en la segunda se trabaja la propiedad del logaritmo del cociente; estas partes a su vez se dividen en tres incisos cada una.

En un primer inciso de esta actividad, se les dan tres tercias con números pequeños, junto con fracciones y números negativos, para que las fichas que tengan que construir las puedan encontrar en el conjunto de fichas que ya tienen y puedan observar lo que ocurre con la parte inferior de las fichas. También es para que ellos mismos verifiquen sus resultados de las actividades anteriores, es decir, si se equivocaron al extender la serie a la izquierda, en esta parte podrían darse cuenta de su error, sin que la persona encargada de la secuencia los corrija.

En el segundo inciso se les hace una pregunta directa, la cual es para ver si observaron lo que ocurre con los números inferiores de las fichas.

En el tercer inciso se ponen otras tres tercias de fichas pero ahora con números más grandes, esto para que descubran que es más fácil sumar abajo, buscar la ficha correspondiente, y encontrar el número superior sin tener que multiplicar. De manera análoga se trabaja la propiedad del logaritmo del cociente.

En esta parte de la secuencia no se cree que haya grandes dificultades, ya que se tiene el conjunto de fichas como ayuda para resolver con facilidad esta actividad.

En fin con esta actividad se pretende que el alumno construya algunas ideas de las propiedades y de cómo con ellas se pueden facilitar los cálculos.

Para hallar la solución de la tercera parte de la secuencia, uso de las propiedades, se tiene que hacer uso de las otras dos partes de la secuencia, esta se aborda con una actividad que a su vez se divide en dos incisos. En el primero de ellos se les dan otro conjunto de fichas, el cual nos muestra algunos pares de la función logaritmo en base tres, dicho conjunto contiene las fichas con los números inferiores del 0 al 5, excepto la ficha 3,1, la cual precisamente ellos tienen que construir.

Para poder resolver este inciso tendrían que hacer uso de la primera parte de la secuencia, es decir, tendrían que ordenar e identificar el patrón de las progresiones, para así hallar la ficha pedida.

En este primer inciso no se cree que haya gran dificultad para saber que la ficha que falta es la 3,1.

En el segundo inciso se les da una ficha, la cual sólo tiene el número inferior (como muestra la figura 4) y lo que tienen que hacer es encontrar el número superior correspondiente.

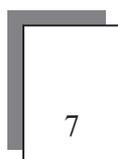


Figura 4

Para esto tendrían que hacer uso de la segunda parte de la secuencia, es decir, hacer uso de alguna de las propiedades para así poder encontrar el número buscado.

Para este caso la ficha se podría construir de dos maneras diferentes, es decir, con las fichas de los números inferiores 5 y 2 ó 4 y 3, sumar estos números y multiplicar los números superiores correspondientes, sin tener que hacer una multiplicación reiterada. Sin embargo se cree que existe la posibilidad que resuelvan este inciso de esa manera.

Como se dijo, en esta última parte se conjuntan las dos primeras partes de la secuencia, entonces esta parte es para reforzar las ideas construidas anteriormente.

Resultados de algunas exploraciones

En esta parte se darán los resultados relevantes de algunas exploraciones que se han llevado a cabo.

Una primera exploración se hizo con alumnos de quinto semestre de la Licenciatura en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero.

Se aplicó a un equipo de tres personas, esto se hizo con la finalidad de ver si se entendían los enunciados y ver cómo funcionaba un primer diseño de la secuencia (el cual no es el descrito en el apartado anterior). Como la secuencia que se les aplico no es la que se esta trabajando, sólo se podría rescatar la primera actividad.

En dicha exploración con este equipo, nos sorprendió mucho que en la primera actividad hubo mucha más discusión que la que habíamos imaginado, ya que buscaron diferentes formas para ordenar las fichas; buscaron una forma de tal manera que los números coincidieran, y también trataron de encontrar una forma de sumar o restar algo para encontrar el número siguiente.

La segunda exploración se hizo con alumnos de la maestría de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero, esta exploración se hizo ya con el diseño descrito en el apartado anterior y fue con la finalidad de que ellos como profesores criticaran la secuencia, sobre todo para que vieran los enunciados y dar su opinión sobre si los alumnos de bachillerato (para los cuales va dirigida la secuencia) podrían entenderlos.

Con el fin de que conocieran la secuencia a fondo, se les pidió que la resolvieran y después dar sus sugerencias, comentarios, etc.

En la realización de la secuencia no hubo dificultades; en cuanto a las críticas, sólo surgió una, esta fue referente a la actividad cuatro, ya que dijeron que se repetía un inciso (el uno con el tres), pero se les explico que era para reforzar las ideas anteriores.

Por otra parte, sobre la claridad de los enunciados de las actividades, opinaron que no había problema.

La última exploración se realizó con alumnos del bachillerato y a continuación se darán algunos resultados interesantes.

En la primera actividad, para ordenar las fichas, se basaron en la progresión aritmética y después de ordenarlas en forma ascendente, querían descubrir lo que ocurría con los números de la parte superior de las fichas, lo cual generó una discusión, pero llegaron a un acuerdo, es decir, que se tenía que multiplicar por dos para encontrar el número siguiente.

En la actividad dos, tuvieron un poco de dificultades para extender la serie hacia la izquierda, sin embargo recordaron como era el patrón de las progresiones y empezaron a buscar los números que lo cumplían.

Al llegar a la actividad cuatro, verificaron sus resultados, es decir, vieron la ficha que contenía el $\frac{1}{2}$ y el -1 y descubrieron que habían extendido bien la serie hacia la izquierda. También esta actividad la resolvieron sin dificultades y al llegar a la pregunta de lo que pasaba con los números inferiores, no dudaron y dijeron que se sumaban; por consiguiente, resolvieron fácilmente el tercer inciso.

En la actividad cinco, en el primer inciso ordenaron sin dificultad y pudieron descubrir cual era la ficha que faltaba. En cambio en el segundo inciso encontraron el número faltante con una multiplicación reiterada y no hicieron uso de la propiedad del logaritmo del producto.

Cabe recalcar que estos alumnos eran del primer semestre de bachillerato y no conocían el tema de logaritmos, sin embargo pudieron resolver la secuencia con los elementos con que ellos contaban.

Referencias Bibliográficas

- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Baldor, A. (1984). *Álgebra*. México: Publicaciones Cultural.
- Briggs, H. (1620). *Aritmética Logarítmica* (I. Bruce, Trad.). Obtenido en marzo 2004, del sitio web <http://www.history.mas.st-andrews.ac.uk/Miscellaneous/Briggs/index.html>
- Caballero, A., Martínez, L. y Bernardez, J. (1971). *Matemáticas tercer curso*. México: Esfinge.
- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. (Vol. 17, Tomo I, pp. 1-9). México.
- Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Ferrari, M. (2004). La covariación como elemento de resignificación de la función logaritmo. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. (Vol. 17, Tomo I, pp. 45-50). México.
- Napier, J. (1616). *A description of the admirable table of logarithms*. Londres, Inglaterra: Nicholas Okes.
- Lehman, C. (2001). *Álgebra*. México: Limusa.