INTRODUCCIÓN A LAS COORDENADAS TRILINEALES

Rafael Méndez Romero
Estudiante Escuela Colombiana de Ingeniería
Bogotá D.C, Colombia

Carlos Rodríguez Verján
Estudiante Escuela Colombiana de Ingeniería
Bogotá D.C, Colombia

Resumen

El siguiente texto muestra una introducción a un sistema de coordenadas desarrollado en el año 1860 por William Allen Whitworth de la Universidad de Cambridge. Mediante la utilización de este sistema se pueden estudiar problemas de una manera mucho más sencilla que en los sistemas coordenados tradicionales.

La *geometría analítica* es aquella parte de la matemática que aplicando el método de las coordenadas, estudia los objetos geométricos por medios algebraicos.

1. Preliminares

Quien intentó formalizar un camino entre la geometría con el álgebra fue René Descartes (1596-1650) cerca del año 1637 cuando publicó *La Géométrie* introduciendo el método de las coordenadas cartesianas. Estas permiten resolver problemas geométricos valiéndose de herramientas algebraicas.

Sin embargo esta no es la única forma de asignar números a los puntos para estudiar los lugares geométricos. Existen otros sistemas coordenados como, por ejemplo, el sistema de las coordenadas polares. Es por esto que sería válido decir que la única regla que se debe tener en cuenta para estudiar los lugares geométricos, mediante procedimientos algebraicos, es que la asignación de los números tiene que ser una asignación metódica ya que en caso contrario podría llegarse a una imposición aleatoria que imposibilitaría el estudio. Por esto se puede concluir que las formas de abordar un problema geométrico no son únicas y que sólo queda en manos del estudiante el escoger el sistema más apropiado.

Nuestras explicaciones de los sistemas tradicionales de coordenadas (rectangular y polar) están basadas en el libro Geometría Analítica[1] de Charles H. Lehmann y tienen algunas adaptaciones para darle agilidad al texto ya que no constituye la parte central de este trabajo. El texto base de estudio de las coordenadas trilinales, estudiado por nosotros, fue escrito en el año 1860 en Londres por Willian Allen Whitworth, su nombre: *Trilinear coordinates and other methods of modern analtical geometry*.

2. Sistemas coordenados estándar

Los sistemas de coordenadas cartesianas y polares son conocidos como los *sistemas de coordenadas estándar* debido a que son los que más desarrollo han tenido históricamente. A continuación haremos un acercamiento a ambos.

2.1. Sistema de coordendas cartesianas

Este sistema, indicado en la *Fig. 1* consta de dos ejes $(X - Y)$ llamados ejes de coordenadas, perpendiculares entre sí con un punto de intersección O, el origen. Estos ejes coordenados dividen el plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes, numerados tal como se indica en la *Fig. 1*. La dirección positiva del eje X es hacia la derecha; la dirección positiva del eje Y hacia arriba.

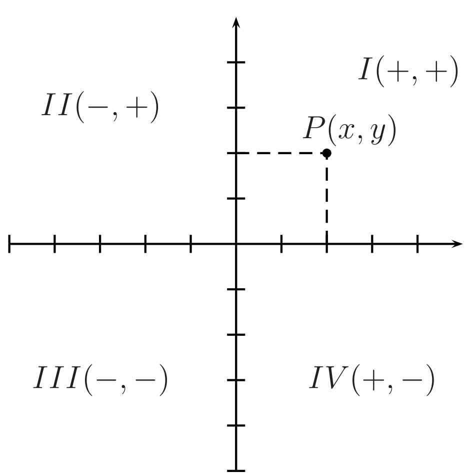

Fig. 1

[1] LEHMAN, Charles.(2.002) *Geometría Analítica.* Editorial Limusa S.A.

Todo punto P del plano puede localizarse por medio del sistema rectangular. En efecto, se traza PA perpendicular al eje X y PB perpendiculara al eje Y. La longitud del segmento OA se representa por x y se llama abscisa de P; la longitud del segmento OB se representa por y y se llama ordenada de P. Los signos de las coordenadas en los cuatro cuadrantes están indicados en la *Fig 1.*

Es evidente que a cada punto coordenado del plano le corresponde uno y solamente un par de coordenadas (x, y). Recíprocamente un par de coordenadas (x, y) cualesquiera determina uno y solamente un punto en el plano coordenado por lo cual se puede decir que el sistema coordenado rectangular en el plano establece una correpondencia biunívoca entre cada punto del plano y un par ordenado de números reales.

2.2. Sistema de coordenadas polares

En el sistema polar, un punto se localiza especificando su posición con respecto a una recta fija y a un punto fijo de esa recta. La recta fija se llama eje polar; el punto fijo se llama polo. Sea *(Fig. 2)* la recta horizontal OA el eje polar y el punto O el polo. Sea P un punto cualquiera en el plano coordenado. Trazemos el segmento OP y asignemos su longitud por r. Llamemos C al ángulo AOP.

Evidentemente, la posición del punto P con relación al eje polar y al polo es determinada cuando se conocen r y C. Estas dos cantidades se llaman las coordenadas polares del punto P; en particular, r se llama radio vector y C ángulo polar, ángulo vectorial o argumento de P. Las coordenadas polares de un punto se indican dentro de un paréntesis escribiéndose primero el redio vector. Así, las coordenadas de P se escriben (r, C). La línea recta que pasa por el polo y es perpendicular al eje polar se llama el eje a 90º.

El ángulo polar C se mide en trigonometría considerando el eje polar como lado inicial y el radiovector como lado final de ángulo, es decir, partiendo del eje polar hacia el radio vector; se considera positivo o negativo según que el sentido seguido sea opuesto a las manecillas de un reloj o el mismo. Algunos autores, siguiendo los convenios hecho en trigonometría consideran que el radio vector nunca debe ser considerado como negativo; otros autores, en cambio, admiten que el radio vector puede tomar todos los valores reales. Nosotros seguiremos este último convenio. Según esto si un punto tiene un radio vector negativo, se mide primero el ángulo polar de la manera ordinaria, y después se toma el radio vector en la prolongación del lado final. Así, un punto P de coordenadas $(-r, C)$ se localiza como se indica en la Es evidente que un par de coordenadas (r, C) determina uno y solamente un punto en el plano coordenado. El recíproco, en cambio, no es verdadero, porque un punto P determinado por las coordenadas (r, C) está también determinado por cualquiera de los pares de coordenadas representados por $(r, C + 2n\pi)$ en donde π está en radianes y n es un entero cualquiera. El punto P puede determinarse también por cualquiera de los pares de coordenadas representadas por $(-r, C + n\pi)$ en donde n es un entero impar cualquiera.

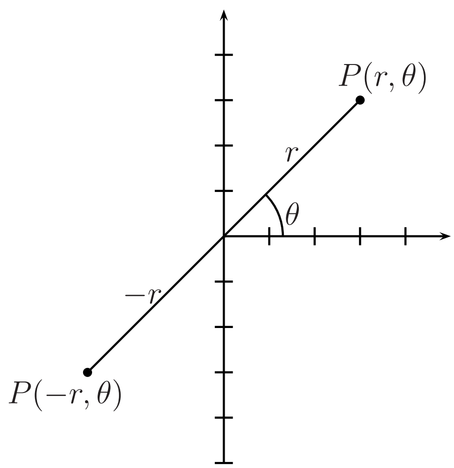

Fig. 2

Mientras que el sistema rectangular establece una correpondencia biunívoca entre cada punto del plano y un par de números reales, esta correpondecia no es única en el sistema polar, porque un punto puede estar representado por uno cualquiera de un número infinito de pares de coordenadas polares. Es esta carencia de reciprocidad única en el sistema polar la que nos conduce, en algunos casos, a resultado que defieren de los obtenidos en el sistema rectangular.

3. Otros sistemas de coordenadas en el plano

Como anteriormente lo dijimos no existe una única forma de asignarle números a los puntos en un plano. Existen tantos sistemas como uno quiera, la diferencia radica en la utilidad que estos sitemas cumplen en la solución de problemas.

3.1. Sistemas de coordenadas oblicuas

El plano oblicuo está formado por dos ejes que se intersecan formando un ángulo, al que llamaremos C. Vale la pena anotar que el sistema cartesiano resulta ser un caso particular de este sistema coordenado, sencillamente cuando C es recto.

Seguidamente enunciaremos diferentes formas de asignarle números a los puntos.

3.1.1. Sistema de coordenadas oblicuas paralelas

La manera para saber las coordenadas de un punto en el plano es la siguiente: Teniendo un punto P arbitrario se trazan paralelas a los ejes. La primera componente es la distancia del punto P al corte con el eje X y la segunda del punto P al corte con el eje Y.

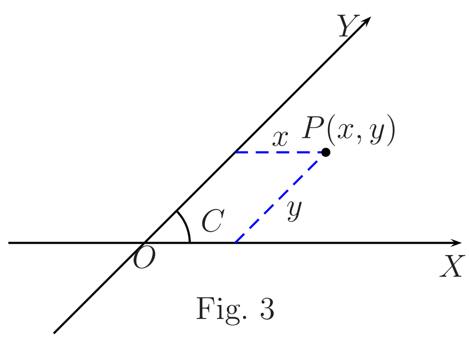

Fig. 3

3.1.2. Sistema de coordenadas oblicuas perpendiculares

La manera para saber las coordenadas de un punto en el plano es la siguiente: Teniendo un punto P arbitrario se trazan perpendiculares a los ejes. La primera componente es la distancia del punto P al corte con el eje X y la segunda del punto P al corte con ele eje Y.

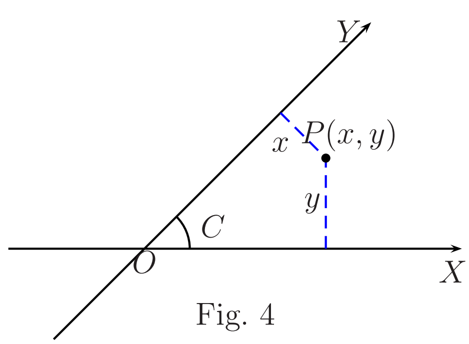

Fig. 4

3.2. Cambio de coordenadas

La manera de pasar de un sistema a otro es haciendo uso del cambio de coordendas. A continuación mostraremos la relación que se puede establecer entre los números que se le han asignado a un punto en un sistema y en otro.

Una de los procedimientos más útiles que se pueden utilizar cuando se están resolviendo problemas en geometría analítica es el cambio de coordenadas pues este nos permite trabajar sin ningún problema en cualquier sistema de coordenadas.

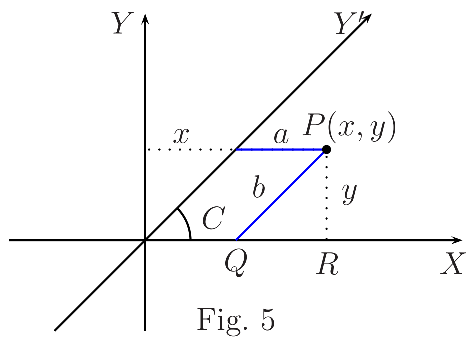

Fig. 5

El primer cambio de coordenada que vamos a realizar es el cambio del sistema cartesiano al sistema de coordenadas oblicuas paralelas. Teniendo un punto P de coordenadas cartesianas (x, y) tenemos que descubrir las coordenadas oblicuas paralelas (a, b). Para eso podemos establecer la siguiente relación:

$$\sin \angle PQR = \frac{y}{b}$$

debido a que $\angle PQR = \angle C$ tenemos que $b = y \csc C$. Por otro lado vemos que $a = x - \overline{QR}$, pero $\overline{QR} = b \cos C$ por lo tanto $a = x - b \cos C$. De esta manera tenemos las relaciones del sistema de coordenadas cartesianas y el sistema de coordenadas oblicuas paralelas; que era nuestro objetivo.

Por otra parte: teniendo como la forma de asignar números a los puntos en el sistema de coordenadas cartesianas y la forma en que definimos el sistema de coordenadas perpendiculares podemos utilizar la siguiente deducción para hacer un paralelo entre los dos sistemas.

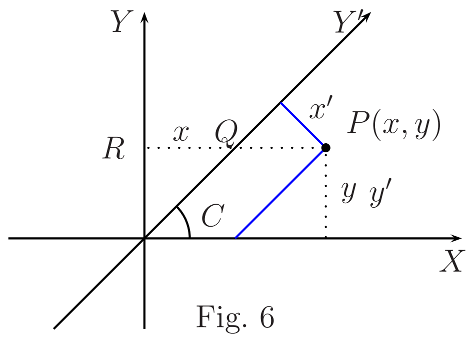

Fig. 6

Dado un punto de coordenadas (x, y) en el sistema de coordenadas cartesianas, encontrar las coordenadas (x', y') en el sistema de coordenadas oblicuas perpendiculares.

Evidentemente $y = y'$. Pero para x' tenemos que:

$$\tan C = \frac{y}{\overline{QR}} \; ; \; \overline{QR} = y \cot C$$

De esta forma: $\sin C = \dfrac{x'}{x - \overline{QR}}$ y $\sin C = \dfrac{x'}{x - y\cot C}$.

Despejamos x' para tener como resultado : $x' = x \sin C - y \cos C$

Por último haremos el paralelo entre las coordenadas oblicuas paralelas y las coordenadas oblicuas perpendiculares. Para esto utiizaremos la siguiente figura.

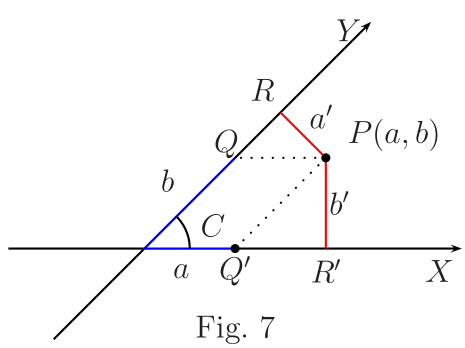

Fig. 7

Se darán las coordenadas oblicuas perpendiculares (a', b') de un punto que tiene como coordenadas oblicuas paralelas (a, b).

Podemos establecer las siguientes relaciones: $b \sin \angle PQ'R' = b'$ y $a \sin \angle PQR = a'$. Con lo que terminamos de establecer las relaciones que nos permitirán trabajar en cualquiera de los tres sistemas de coordenadas.

4. Coordenadas Trilineales

Las Coordenadas Trilineales se refieren a tres ejes no concurrentes *Fig. 5*, llamados los ejes de referencia, según los cuales se ubica un punto y se le confieren unas componentes de una manera metódica. En este caso convendremos en llamar al trinángulo formado por las intersecciones de los ejes de referencia como el triángulo ABC.

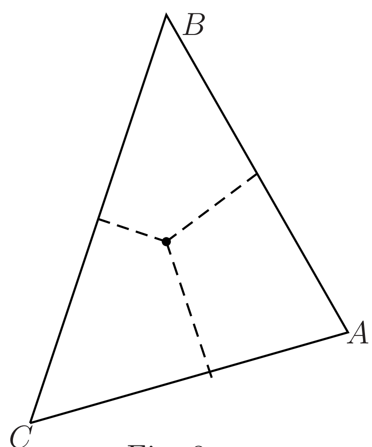

Fig. 8

4.1. Ubicación de un punto

Tendremos que hablar de dos problemas principalmente: el primero es: teniendo un punto en el plano hallar sus coordenadas; el segundo: teniendo las coordenadas, hallar el punto.

Una vez que tenemos un punto P, si queremos hallar sus coordenadas trazamos perpendiulares a los ejes de referencia desde el punto y el valor de las componentes será esta distancia. Así que un punto tiene como coordenadas (α, β, γ) si α es la altura del triángulo BPC, β es la altura del triángulo PCA y γ es la altura del triángulo BPA (Fig. 9).

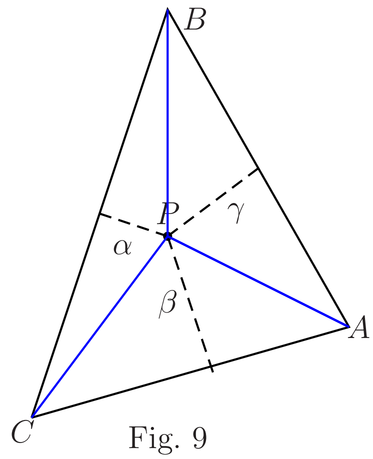

Fig. 9

Ahora bien, una vez que se tengan las componentes del punto, la manera de dibujarlo es trazando una paralela al eje BC a una distancia α y una paralela al eje CA a una distancia β de tal forma que la intersección de estas rectas paralelas a los ejes es el punto sí y sólo sí se encuentra a una distancia γ del eje BA.

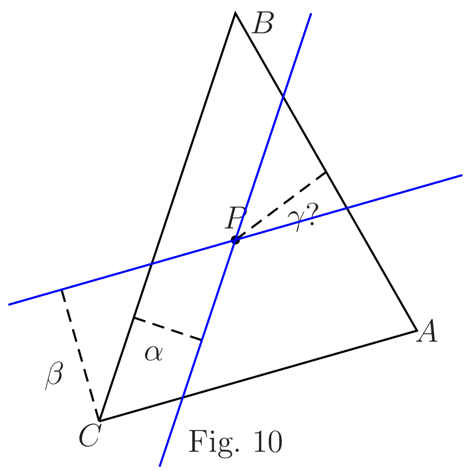

Fig. 10

4.2. El signo de las componentes.

En el sistema de coordenadas cartesianas le asignábamos un signo al número de las componentes indicando la dirección de los ejes coordenados. En el sistema de coordenadas trilineales, por facilidad, convendremos asignar el signo de las componentes dependiendo de la ubicación del punto de la siguiente manera:

α	positivo cuando está al mismo de lado del punto	A	respecto	$\overline{BC}$
β	...	B	...	$\overline{AC}$
γ	...	C	...	$\overline{AB}$

De esta manera podemos decir que las componentes trilineales de los puntos tendrán los siguientes signos respecto a su ubicación en el plano.

4.3. Ecuaciones de rectas básicas.

En esta sección nos concentraremos en deducir las ecuaciones de tres rectas importantes: Los ejes de referencia, las rectas paralelas a los ejes de referencia y las bisectrices de los ángulos de referencia.

En cuanto a las líneas de referencia tomremos el segemnto $\overline{CB}$ como ejemplo. Podemos ver (Fig.11) que la distancia desde cualquier P que se encuentre sobre la línea de referencia $\overline{CB}$ a esta misma es 0 ; por lo tanto podemos decir que la condición -más adelante aclararemos esto- para que un punto esté sobre la línea de referencia $\overline{CB}$ es $\alpha = 0$

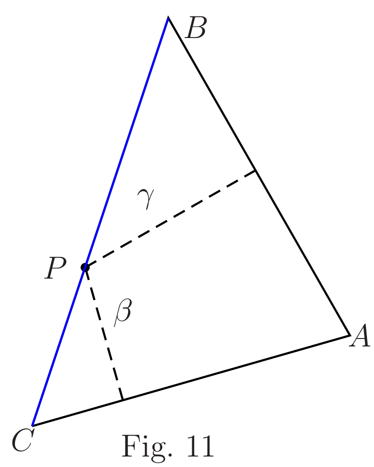

Fig. 11

Por lo tabto se puede decir que:

$$\begin{array}{lcc} \overline{BC} & \text{tiene como ecuación} & \alpha = 0 \\ \overline{AC} & \ldots & \beta = 0 \\ \overline{AB} & \ldots & \gamma = 0 \end{array}$$

Para deducir la fórmula de cualquier recta que sea paralela a alguna línea de referencia tomeremos el ejemplo de una línea que sea paralela a $\overline{AC}$ (Fig.12).

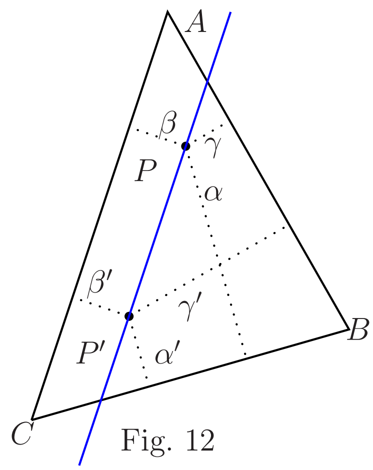

Fig. 12

Evidentemente $\beta = \beta' = k$, donde k es una constante; esto cual nos da la condición para que unos puntos estén sobre una recta que es paralela a una de las líneas de referencia.

una recta paralela a	$\overline{BC}$	tiene como ecuación	$\alpha = k$
...	$\overline{AC}$	...	$\beta = k$
...	$\overline{AB}$	...	$\gamma = k$

Finalmente tomaremos la bisectriz del ángulo BCA como ejemplo para deducir las ecuaciones. Como se puede ver (Fig.13) si tomamos un únto sobre la bisectriz del ángulo BCA y trazamos las distancia a los ejes formamos dos triángulos congruentes debido a que tienen ángulos rectos; por la definición de bisectiz tienen un ángulo de la misma medida y comparten un mismo lado (la bisectriz).

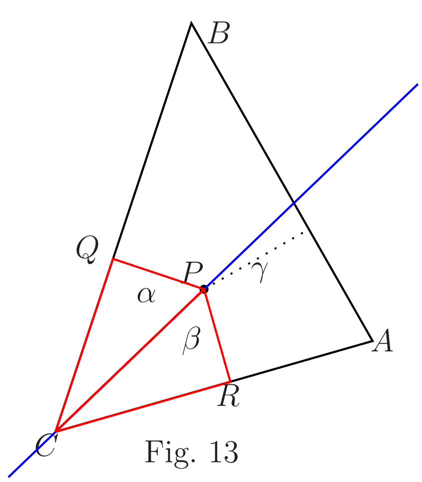

Fig. 13

Por lo tanto se puede decir que $\overline{PQ} = \overline{PR}$; ees decir $\alpha = \beta$ que es la condición que estábamos buscamdo. De esta manera:

La bisectriz del ángulo	BCA	tiene como ecuación	$\alpha = \beta$
...	CAB	...	$\beta = \gamma$
...	CBA	...	$\gamma = \alpha$

Así damos las condiciones para que los puntos estén sobre algunas rectas básicas. Sin embargo, como los decíamos anteriormente tenemos que aclarar si es única la condición que presentamos anteriormente. Esto nos remite a una pregunta que es válido hacerse: ¿Todo punto que cumpla la condición está sobre le plano de las coordenadas triineales? Para resolver esto podemos establecer unha relación entre los puntos que se encuentran en el plano y el triángulo de referencia. Para hacer esto podemos ver que (Fig.14) teniendo un punto arbitraio P en el plano, trazamos las sebianas, para ver que forman tres triángulos que cumplen una característica muy especial que veremos a continuación.

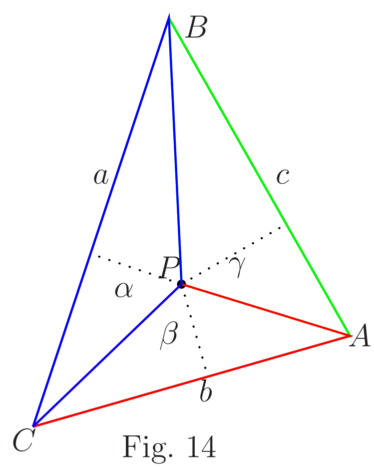

Fig. 14

El área del triángulo $BPC = \dfrac{a\alpha}{2}$; la del triángulo $BPA = \dfrac{c\gamma}{2}$; y la del triángulo $CPA = \dfrac{b\beta}{2}$. Sin embargo La suma de las áreas de estos tres triángulo es igual al area del triángulo de referencia ABC. De esta manera tenemos que: $\dfrac{a\alpha}{2} + \dfrac{c\gamma}{2} + \dfrac{b\beta}{2} = \Delta ABC$ Así que $a\alpha + b\beta + c\gamma = 2\Delta ABC$ Que es la relación que estábamos buscando[2].

[2]Nótese que cuando el punto P se encuentra fuera del triángulo de referencia tenemos que una de las coordenadas es bnegativa de manera que el área del triángulo que sobra se restará de las áreas de los otros dos triángulos, haciendo que la relación se mantenga aún en estos casos.

Gracias a esta relación podemos completar lo que había quedado pendiente en la parte anterior diciendo que un punto está sobre un recta siempre y cuando cumpla la condición específica de la recta u la anterior relación.

4.4. Puntos Notables.

Ahora nos concentraremos en encontrar las coordenadas de algunos de los puntos notables del triángulo de referencia.

4.4.1. Vértices

Para encontrar las coordenadas de los vértices tenemjos que es evidente que dos de las componentes de la coordenada son 0. En el caso de A, $\beta = 0$ y $\gamma = 0$; pero también que $a\alpha = 2\Delta$[3] así que $\alpha = \frac{2\Delta}{a}$.

De esta forma tenemos que:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2\Delta}{a}, 0, 0\right) \\ B &= \left(0, \frac{2\Delta}{b}, 0\right) \\ C &= \left(0, 0, \frac{2\Delta}{c}\right) \end{aligned}$$

Que son las coordenadas de los vértices.

4.4.2. Incentro

Debido a que éste es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo de referencia, las distancias perpendiculares a cada lado son iguales. Así, tenemos que $\alpha = \beta = \gamma$. Por ésto $\frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a+b+c} = \frac{2\Delta}{a+b+c}$. Así las coordenadas del incentro son:

$$\left(\frac{2\Delta}{a+b+c}, \frac{2\Delta}{a+b+c}, \frac{2\Delta}{a+b+c}\right)$$

[3]De ahora en adelante cuando aparezca el símbolo Δ nos referiremos al triángulo de referencia.

4.4.3. Circuncentro

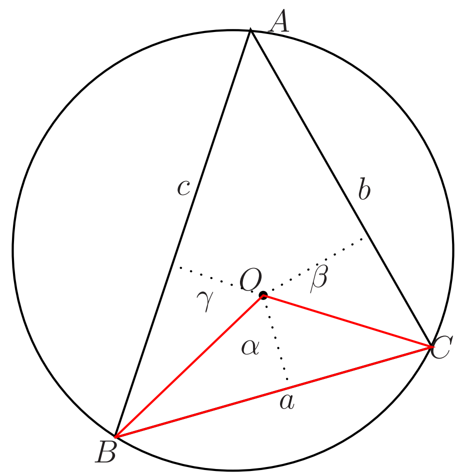

Fig. 15

Sea O el centro, α, β, γ, sus coordenadas. Si unimos OB con C, y trazamos OP perpendicular a BC, (figura 15), entonces BC es bisecado en P. Para los triángulos OPB y OPC el procedimiento es el mismo. También se tiene que la medida del ángulo BOC es igual a al doble de la medida del ángulo BAC Por esto se tiene que:

$$\angle BOP = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle A$$

$$\frac{OP}{BP} = \cot A$$

$$\alpha = \frac{a}{2}, \beta = \frac{b}{2}, \gamma = \frac{c}{2}$$

Que son las coordenadas del punto requerido.

Bibliografía

[1] Lehmann Charles, *Geometría Analítica*, Limusa, España.

[2] Withworth William, *Trilineal Coordinates and other methods of Modern Analytical Geometry,* Cambridge: Deighton, Bell and CO, Inglaterra.

[3] Coxeter H.S.M., *Some Applications of Trilinear Coordinates*