ELEMENTOS DE ARITMÉTICA EN LOS EGIPCIOS

Cesar Augusto Gómez
Profesor Universidad Nacional de Colombia
Profesor Universidad Antonio Nariño
Bogotá D.C, Colombia
cagomezsi@unal.edu.co

Resumen

Los egipcios, han sido considerados por mucho tiempo, como una de las civilizaciones, que mas alto conocimiento tuvieron en matemáticas en la antiguedad, en realidad para la construcción de las pirámides, ellos ya contaban con sofisticados cálculos matemáticos. Se presentarán algunos hechos de su aritmética.

Introducción

Existen diversos métodos de numeración, pero tal vez el más antiguo y universal, utilizado desde la aparición del hombre, es el de contar con los dedos.

Entre las primeras formas de contar, encontramos por ejemplo:

- contar con palitos
- utilización de conchas
- inciciones sobre un madero
- utilización de semillas o huesos
- nudos hechos a una cuerda
- otros más

Otro método de contar que apareció antiguamente (islas Muralay) consitía, en lo siguiente:

empezaban con el dedo meñique izquierdo, para indicar el número 1, seguían ascendiendo, hasta que el dedo pulgar indicaba el 5, la muñeca indicaba el 6, el codo el 7, el hombro 8, el pecho izquierdo el 9, el externon el 10, y continuaban descendiendo por el brazo derecho, hasta que el meñique indicaba el 19. De todas maneras, cada sistema de numeración en cada tribu, involucraba un largo proceso de adaptación, hasta llegar a adoptar simbolos.

Numeración Primitiva

En un principio, el hombre cavernícola vivía solo, y por tanto no necesitaba de números, pero posteriormente, se fueron formando tribus, familias, clanes, etc., y entonces fue necesrio que y cuanto pertenecía a cada familia, persona o tribu.

En un principio, fue suficiente con la palabra *poco, algo, mucho* pero posteriormente necesito precisar más.

Para contar el número de animales de un rebaño, el hombre utilizó los diez dedos, uno por cada animal, cuando completaba diez animales, colocaba una piedrita pequeña para indicar los diez, y volvía a comenzar hasta volver a llegar a otros diez, colocaba otra piedrita, y cuando completaba diez piedritas, colocaba una más grande para indicar cien. Posteriormente, remplazó los dedos por palitos y con el tiempo adoptó símbolos.

Métodos para Establecer una Numeración

1. Agrupamiento Simple

   Fue utilizado para indicar pequeñas cantidades, por ejemplo:

$$|\rightarrow 1,\ ||\rightarrow 2,\ |||\rightarrow 3,\ ||||\rightarrow 4,\ \wedge \rightarrow 5,\ \wedge\wedge \rightarrow 10,$$

2. Agrupamiento multiplicativo.

   Consiste en introducir un nuevo simbolo que indique el producto de varias unidades asi por ejemplo:

   $$\text{Ⓢ} \mid \rightarrow S \quad \text{veces} \quad \mid$$
   $$\text{Ⓢ}\wedge \rightarrow S \quad \text{veces} \quad 5$$

3. Metodo posicional

   En este sistema, cada número adquiere un valor determinado, de acuerdo a su posición, y a la base del sistema utilizado. Así por ejemplo en un sitema de base 5 tendríamos:

   $$\text{ⓈⓈⓈ} \rightarrow S + S(5) + S(5^2) = 31(S)$$

   con S entre 0 y 4

1. Sistema de Numeración Egipcio

Como la mayoría de las civilizaciones, utilizaron palitos (rectas verticales), para representar los primeros nueve números, y posteriormente adoptaron nuevos símbolos. Tuvieron dos sitemas de numeración, uno *geroglífico* y otro *hierático*. Utilizaron los siguientes símbolos:

1. **Geroglífico**

   $$\mid \rightarrow 1, \text{ recta vertical para unidades de } 1 \rightarrow 9$$
   $$\cap \rightarrow 10, \text{ talón o arco}$$
   $$? \rightarrow 100, \text{ espiral o voluta}$$
   $$\bar{\wedge}^{\checkmark\clubsuit} \rightarrow 1000, \text{ flor de loto}$$

   utiliza además la imagen de un **dedo señalando**, para indicar 10.000, la imagen de una **mustela o renacuajo** para indicar 100.000, y la imagen de un **hombre asombrado** para indicar 1.000.000

Nótese que los egipcios, utilizaron el sistema de agrupamiento simple de base 10.

$$| \rightarrow 10^0, \cap \rightarrow 10^1, ? \rightarrow 10^2, \overline{\barwedge}^{\checkmark\clubsuit} \rightarrow 10^3,$$

y así sucesivamente con los otros símbolos.

Nótese además que el orden de escribir una cantidad no es relevante, por ejemplo

$$|| \cap\cap ?? = | \cap ? \cap ? |$$

sin embargo los egipcios, escribían de derecha a izquierda

$$111 = | \cap ?$$

1.1. Las Cuatro Operaciones Aritméticas

1. **Suma**

   El proceso es como la suma común y corriente, se suman primero las unidades, después las decenas, después las centenas, y así sucesivamente, teniendo en cuenta, que diez unidades forman una decena, diez decenas forman una centena, y así sucesivamente, por ejemplo:

   $$111 + 111 = | \cap ? + | \cap ? = || \cap\cap ?? = 222$$

2. **Resta**

   La resta tiene el mismo proceso que la suma, por ejemplo

   $$222 - 111 = || \cap\cap ?? - | \cap ? = | \cap ? = 111$$

3. **Multiplicación**

   Los egipcios manejaban un sistema de base 10, así que la multiplicación por 10 es muy sencilla, bastaba realizar el cambio de símbolo correspondiente, por ejemplo

   $$10(3) = 10(|||) = \cap\cap\cap = 30$$

   Desarrollaron dos técnicas de multiplicación

- Primer método

  Supongamos que se quiere multiplicar 9 por 7, se disponen en una columna, y al frente se colocan los excedentes de cada número respecto de 10, en este caso 1 y 3. Se multilican estos excedentes entre si (tenían tablas de valores conocidos), y se busca la diferencia entre las diagonales enfrentadas, en nuestro caso 6. El resultado es 63.

9	1
7	3
6	3

- Segundo método

  Este método requería solamente el conocimiento de sumar y multiplicar por 2., por ejemplo, ,la multiplicación anterior se realizaba así: Se enfrentan el 1 y el 9, y en columna se van duplicando cada uno, hasta que en la primera columna, aparezcan números cuya suma sea 7, después se suman los números correspondientes a esta descomposición que se encuentran en la segunda columna. Este será el resultado final.

1	9
2	18
4	36
7	63

Claramente, los egipcios conocían el hecho de que cualquier entero puede ser descompuesto como suma de algunos elementos de la serie

$$1, 2, 4, 8, 12, \cdots ,$$

4. **División**

   Para los egipcios, el proceso de dividir, estaba ligado al de multiplicar. Por ejemplo, al dividir 63 entre 9 se dispone todo como en la multiplicación del segundo método.

1	9
2	18

4	36
7	63

como $9 + 18 + 36 = 63$ entonces el resultado buscado es $1 + 2 + 4$. Por ejemplo dividir 117 entre 9, se procede así:

1	9✓
2	18
4	36✓
8	72✓

Como 117=6+36+72, entonces el resultado pedido es 1+4+8=13.

2. Fracciones

El método de escribir sus números, no les permitía tener fracciones como $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{9}$, las fracciones que utilizaban, tenían como numerador al 1; utilizaron el símbolo $\circ$, para colocarlo encima de un número, y de esta manera, indicar su recíproco, por ejemplo$||\overset{\circ}{\cap}\cap$, para indicar$\frac{1}{12}$. Existía una excepción, $\frac{2}{3}$, tenía una respresentación especial, $\overset{\circ}{||}$

Los egipcios conocían que $\frac{2}{3}$ era el recíproco de $1\frac{1}{2}$, así, si $\overline{\overline{3}} = \frac{2}{3}$ y $1\overline{2} = 1\frac{1}{2}$,por tanto, siendo$\overline{\overline{3}} \quad de \quad 42 = 28$, entonces $\overline{28} \quad de \quad 42 = \overset{\circ}{1}\overline{2}$

2.1. Multiplicacíon y división de fracciones

$\overline{5} = \frac{1}{5}$ era especialmente multiplicado por 10

1	5					
2	$\overline{3}$	$\overline{15}$				$\rightarrow \frac{2}{5}$
4	$\overline{\overline{3}}$	$\overline{10}$	$\overline{30}$			$\rightarrow \frac{4}{5}$
8	1	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{15}$		$\rightarrow \frac{8}{5}$
10	1	$\overline{\overline{3}}$	$\overline{5}$	$\overline{15}$	$\overline{15}$	$\rightarrow \frac{10}{5}$

notece que los resultados vienen escritos en terminos de $\overline{\overline{3}}$, y en terminos de recíprocos unicamente. Veamos otro ejemplo

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & \overline{2} & \overline{14} & & & \\
 & & \overline{2} & & \overline{4} & \overline{28} & & & \\
 & & \overline{4} & & \overline{8} & \overline{56} & & & \\
1 & \overline{2} & \overline{4} & & \overline{2} & \overline{4} & \overline{8} & \overline{14} & \overline{28} \quad \overline{56}
\end{array}
$$

ilustra la división de $\overline{2}\,\overline{14}$ por $1\overline{2}\,\overline{4}$. Tanto en la primera como en la segunda columna, se han tomado la división por dos. En la última fila, aparece el resultado.

2.2. Los Dos Tercios, Tabla de Fracciones

Para encontrar un tercio de un número, primero encontraban los dos tercios y después obtenian el resultado por simple división por 2. Ejemplo:

Si se quiere hallar un tercio de ocho

$$\overline{\overline{3}} \quad de \quad 8 = 5\overline{3}$$

por lo tanto

$$\overline{3} \quad de \quad 8 = 2\overline{\overline{3}}$$

$$\overline{\overline{3}} \quad de \quad 315 = 210$$

por lo tanto

$$\overline{3} \quad de \quad 315 = 105$$

Existían tablas que les permitían calcular los dos tercios de un número

$$
\begin{array}{cccc}
1\overline{2} & 1 & = & 1\overline{2} \\
1\overline{2} & 2 & = & 3 \\
1\overline{2} & 3 & = & 4\overline{2} \\
1\overline{2} & 4 & = & 6 \\
1\overline{2} & 5 & = & 7\overline{2} \\
1\overline{2} & 6 & = & 9 \\
1\overline{2} & 7 & = & 10\overline{2} \\
1\overline{2} & 8 & = & 12
\end{array}
$$

Nótese, que los elementos de la última columna,, forman una progresión aritmética, por adición de un $1\overline{2}$. La tabla anterior, puede ser escrita como

$\overline{\overline{3}}$	de	$1\overline{2}$	$=$	1
$\overline{\overline{3}}$	de	3	$=$	2
$\overline{\overline{3}}$	de	$4\overline{2}$	$=$	3
$\overline{\overline{3}}$	de	6	$=$	4
$\overline{\overline{3}}$	de	$7\overline{2}$	$=$	5
$\overline{\overline{3}}$	de	9	$=$	6
$\overline{\overline{3}}$	de	$10\overline{2}$	$=$	7
$\overline{\overline{3}}$	de	12	$=$	8
$\overline{\overline{3}}$	de	$13\overline{2}$	$=$	9
$\overline{\overline{3}}$	de	15	$=$	10

La tabla anterior, puede ser extendida colocando dos números igualmente espaciados entre cada par de elementos consecutivos de la segunda y tercera columna respectivamente, obteniéndose la tabla siguiente:

$\overline{\overline{3}}$	de	$1\overline{2}$	$=$	1
$\overline{\overline{3}}$	de	2	$=$	$1\overline{3}$
$\overline{\overline{3}}$	de	$2\overline{2}$	$=$	$1\overline{\overline{3}}$
$\overline{\overline{3}}$	de	3	$=$	2
$\overline{\overline{3}}$	de	$3\overline{2}$	$=$	$2\overline{3}$
$\overline{\overline{3}}$	de	4	$=$	$2\overline{\overline{3}}$
$\overline{\overline{3}}$	de	$4\overline{2}$	$=$	3
$\overline{\overline{3}}$	de	5	$=$	$3\overline{3}$
$\overline{\overline{3}}$	de	$5\overline{2}$	$=$	$3\overline{\overline{3}}$
$\overline{\overline{3}}$	de	6	$=$	4

De tal manera que

$$\frac{2}{3} \quad \text{de} \quad 60 = (\frac{2}{3} \quad \text{de} \quad 6) \times (10) = 4 \times 10 = 40$$

Los egipcios, poseían muchas otras tablas de fracciones, en especial para fracciones unitarias (con numerador 1).

- **Tabla de dos tercios**

$$
\begin{array}{ccccc}
\overline{\overline{3}} & \text{de} & \overline{2} & = & \overline{4}\ \ \overline{12} \\
\overline{\overline{3}} & \text{de} & \overline{3} & = & \overline{6}\ \ \overline{18} \\
\overline{\overline{3}} & \text{de} & \overline{4} & = & \overline{8}\ \ \overline{24} \\
\overline{\overline{3}} & \text{de} & \overline{5} & = & \overline{10}\ \ \overline{30} \\
\overline{\overline{3}} & \text{de} & \overline{6} & = & \overline{12}\ \ \overline{36} \\
\overline{\overline{3}} & \text{de} & \overline{7} & = & \overline{14}\ \ \overline{42} \\
\overline{\overline{3}} & \text{de} & \overline{8} & = & \overline{16}\ \ \overline{48} \\
\overline{\overline{3}} & \text{de} & \overline{9} & = & \overline{18}\ \ \overline{54} \\
\overline{\overline{3}} & \text{de} & \overline{10} & = & \overline{20}\ \ \overline{60}
\end{array}
$$

- **Tabla de un tercio**

$$
\begin{array}{ccccc}
\overline{3} & \text{de} & \overline{2} & = & \overline{8}\ \ \overline{24} = \overline{6} \\
\overline{3} & \text{de} & \overline{3} & = & \overline{12}\ \ \overline{36} = \overline{9} \\
\overline{3} & \text{de} & \overline{4} & = & \overline{16}\ \ \overline{48} = \overline{12} \\
\overline{3} & \text{de} & \overline{5} & = & \overline{20}\ \ \overline{60} = \overline{15} \\
\overline{3} & \text{de} & \overline{6} & = & \overline{24}\ \ \overline{72} = \overline{18} \\
\overline{3} & \text{de} & \overline{7} & = & \overline{28}\ \ \overline{84} = \overline{21} \\
\overline{3} & \text{de} & \overline{8} & = & \overline{32}\ \ \overline{96} = \overline{24} \\
\overline{3} & \text{de} & \overline{9} & = & \overline{36}\ \ \overline{108} = \overline{27} \\
\overline{3} & \text{de} & \overline{10} & = & \overline{40}\ \ \overline{120} = \overline{30}
\end{array}
$$

- **Tabla de un medio**

$$
\begin{array}{ccccc}
\overline{2} & \text{de} & \overline{2} & = & \overline{4} \\
\overline{2} & \text{de} & \overline{3} & = & \overline{6} \\
\overline{2} & \text{de} & \overline{4} & = & \overline{8} \\
\overline{2} & \text{de} & \overline{5} & = & \overline{10} \\
\overline{2} & \text{de} & \overline{6} & = & \overline{12} \\
\overline{2} & \text{de} & \overline{7} & = & \overline{14} \\
\overline{2} & \text{de} & \overline{8} & = & \overline{16} \\
\overline{2} & \text{de} & \overline{9} & = & \overline{18} \\
\overline{2} & \text{de} & \overline{10} & = & \overline{20}
\end{array}
$$

Nótese la forma sencilla de construcción de las tablas, así al querer obtener $\frac{1}{3}$ *de* $\frac{19}{12}$ se procede a tomar primero los dos tercios, y el resultado se divide por dos.

$$\overline{\overline{3}} \quad de \quad 1 \quad \overline{3} \quad \overline{4} = \overline{\overline{3}}(\overline{6} \quad \overline{18})\overline{6} = \overline{\overline{3}}(\overline{6} \quad \overline{6})\overline{18} = \overline{\overline{3}}(\overline{3})\overline{18} = 1 \quad \overline{18}$$

por lo tanto, el resultado pedido es

$$\overline{2} \quad \overline{36}$$

3. Regla G de la Aritmética Egipcia

Consistía básicamente, en que si una fracción unitaria es el doble de otra fracción unitaria, entonces su suma es una fracción unitaria si y sólo si, el donominador mayor es divisible por 3, y este cociente es el donominador final. Ejemplos:

- $\overline{9} + \overline{18} = \overline{6}$
- $\overline{12} + \overline{24} = \overline{8}$
- $\overline{24} + \overline{48} = \overline{16}$

3.1. Primera Extensión de la Regla G

Si una fracción unitaria, es K veces otra fracción unitaria, entonces su suma puede ser encontrada como en el caso anterior,siendo el cociente mayor entre $K + 1$ el nuevo denominador. Ejemplo

- $\overline{4} + \overline{12} = \overline{3}$
- $\overline{10} + \overline{40} = \overline{8}$
- $\overline{24} + \overline{48} = \overline{16}$

3.2. Segunda Extensión de la Regla G

Si ocurre como en la primera extensión, entonces la diferencia se obtiene teniendo en cuenta la división por $K - 1$.

- $\overline{3} - \overline{12} = \overline{4}$
- $\overline{6} - \overline{24} = \overline{8}$
- $\overline{24} - \overline{48} = \overline{48}$

Los egipcios conocían muy bien la serie (progresión geométrica)

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \cdots$$

y el hecho que todo entero puede ser escrito como suma de algunos de sus términos, con lo cual pudieron crear tablas para determinar sumas de algunos términos. Sabían que en una progresión geométrica con primer término y razón 2, la suma de sus n primeros términos es

$$2 \times (1 + \sum_{1}^{n-1} a_n)$$

los a_n los términos de dicha progresión. La misma consideración puede hacerse cuando el primer término es 3 , 4, 5 $\cdots$ con las mismas razones respectivamente, así por ejemplo si la razón es 4 y primer término es 4 entonces

$$\sum_{1}^{n} a_n = 4 \times (1 + \sum_{1}^{n-1})$$

Contruyeron tablas para sumas de términos de progresiones con estas características. Utilizaron progresiones aritméticas de cinco términos, con propiedades tales como la suma de sus tres últimos términos, es K veces la suma de los dos primeros. Por ejemplo 1,2,3,4,5 en donde 3+4+5=4(1+2). La serie que los egipcios usaban era la siguiente

$$1, 6\overline{2}, 12, 17\overline{2}, 23$$

que cumple la propiedad mencionada anteriormente con $K = 7$.

Bibliografía

[1] Asger Aaboe, *Introducción a las ciencias*, **2**

[2] ____________, *Enciclopedia Sigma de las matemáticas.*

[3] ____________, *Matemáticas, Episodios históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo.*

[4] Richard Gillings, *Mathematic in the time of the pharaons.*

[5] Charles Miller, *Introducción al pensamiento matemático.*