Sobre la ecuación diferencial de segundo orden y Maple

Cesar Augusto Gómez
Profesor Universidad Nacional de Colombia
Profesor Universidad Antonio Nariño
Bogotá D.C, Colombia
cagomezsi@unal.edu.co

Resumen

No todos los algoritmos que se implementan en un lenguaje como Maple, en el caso de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, son tomados textualmente; algunos algoritmos requieren de técnicas más sofisticadas, las cuales no aparecen en los textos tradicionales.

Introducción

Maple, utiliza para solucionar la mayor parte de las ecuaciones diferenciales, los algoritmos que aparecen en los textos clásicos. Así por ejemplo en las ecuaciones de primer orden, intenta hacer la separación de variables, o estudia la homogeneidad de la ecuación, o su exactitud, o utiliza factores integrantes en el caso de las lineales. En otras ecuaciones, como Riccati y Bernoulli, hace las tranformaciones que se sugieren en los textos, y despues regresa a la solución de la ecuación original. Todo ello se logra hacer programando las respectivas manipulaciones algebraicas que se requieren. Existen otros procedimientos, llamados de Decisión, como el algoritmo de Kovacic, los cuales permiten decidir, si una ecuación diferencial admite cierto tipo de solución, y en caso afirmativo, da la solución en forma cerrada, caso contrario, demuestra, que dicha ecuación no admite dicho tipo de solución. Estos algoritmos, no aparecen en los textos tradicionales.

1. El Algoritmo de Kovacic

En el caso de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, con coeficientes en un cuerpo de funciones racionales, el algoritmo de Kovacic determina si una ecuación diferencial de la forma

$$a(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2} + b(x)\frac{dy(x)}{dx} + c(x)y(x) = 0$$

$a(x), b(x), c(x), \in C(x), C$ el cuerpo de complejos, tiene una solución cerrada, en una clase de funciones llamadas *Liovillianas*, las cuales pueden ser encontradas por medio de funciones elementales, como por ejemplo *logaritmos*, *exponenciales*, *funcionesalgebraicas*, y tomando integrales de las mismas. Mas precisamente, tenemos:

Definición 1. *Sea K un cuerpo diferencial, con derivado dado por $'$. Un cuerpo F es una extensión Liovilliana de K, si existen cuerpos*

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots \subset K_m = F$$

donde cada K_{i+1} es una extensión simple $K_i(\theta_i)$, tal que es cierto uno de los siguientes enunciados:

1. *θ_i es algebraico sobre K_i*
2. *$\theta_i^{‘} \in K_i$(es decir K_i ha sido extendido por una integral)*
3. *$\frac{\theta_i^{‘}}{\theta_i}$(es decir K_i ha sido extendido por la exponencial de una integral)*

Una función contenida en una extensión Liovilliana de K, es llamada una función Liovilliana *sobre K.*

Es claro que todas las funciones elementales estan incluidas. Las algebraicas en 1.), logaritmos en 2.) y exponenciales en 3.). La funcion *error* erf y la *exponencial integral* E_i son ejemplos de funciones Liovillianas no elementales.

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx$$

$$E_i(n,x) = -\int \frac{e^{-x}}{x^n}dx$$

Las funciones de *Bessel* son ejemplos de funciones que no son *Liovillianas*. Así por ejemplo tenemos:

1. Al resolver
$$y'' + \frac{x+1}{4x^2}y = 0$$
Maple produce
$$y(x) = C1\sqrt{x}\ Bessel\ J(0,\sqrt{x}) + C2\sqrt{x}\ Bessel\ Y(0,\sqrt{x})$$
Maple ha producido una solución en términos de funciones no Liovillianas. Es de tener en cuenta, que se han implementado otros algoritmos para obtener soluciones no liovillianas, para ciertos tipos de ecuaciones.

2. Al resolver
$$y'' + \frac{4x^3+x^2}{4}y = 0$$
Maple produce
$$y'' + \frac{4x^3+x^2}{4}y = 0$$
queriendo decir que la ecuación no es soluble según el algoritmo de Kovacic.

3. Al resolver
$$y'' + \frac{x^2+2x+3}{4x^2}y = 0$$
Maple produce
$$y(x) = \frac{C1e^{\frac{-x}{2}} + C2e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$
La cual es una solución Liovilliana.

El algoritmo de Kovacics, es usualmente utilizado para resolver una ecuación de la forma reducida
$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} - r(x)y(x) = 0$$

dada que la forma general

$$a(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2}+b(x)\frac{dy(x)}{dx}+c(x)y(x)=0$$

siempre puede ser llevada a la reducida. La idea del algoritmo de Kovacic, radica en el hecho que si existe una solución Liovilliana de la ecuación reducida, entonces, ella debe tener una de las formas siguientes:

1. La ecuación diferencial, tiene una solución de la forma
$$y(x)=e^{\int w}$$
donde $w \in C(x)$.

2. La ecuación diferencial tiene una solución de la forma
$$y(x)=e^{\int w}$$
donde w es algebraico de grado 2 sobre $C(x)$ y el caso 1 no se da,

3. Todas las soluciones de la ecuación diferencial son algebraicas sobre $C(x)$, y el caso 1 y 2 no se da. En este caso, las soluciones son de la forma
$$y(x)=e^{\int w}$$
con w algebraico de grado 4 o 6 o 12 sobre $C(x)$.

Finalmente, si no existen soluciones de las formas descritas anteriormente, entonces no existen soluciones Liovillianas.

Es claro que la transformación que lleva la ecuación general a la reducida, se ha utilizado la exponenciación de una cuadratura, asi que la solubilidad de la ecuación reducida es equivalente a la solución de la general. (en general, los grupos de Galois de las dos ecuaciones, no son los mismos). Los hechos fundamentales del algoritmo de Kovaci'c, estan basados en los hechos siguientes:

- El grupo de Galois de la ecuación reducida esta contenido en $SL(2,C)$

- El cambio de variable $v = \frac{y'}{y}$ transforma la ecuación reducida, en la Ecuación de Riccati Asociada

  $$v' = r(x) - v^2$$

  entonces la ecuación reducida es soluble, si y sólo si, la Riccati Asociada tiene una solución algebraica. El punto fundamental ahora, es que el grado n del polinomio minimal asociado $Q(v)$(con coeficientes en C(x)), pertenece al conjunto

  $$L_{max} = \{1, 2, 4, 6, 12\}$$

  La determinación de este conjunto, es precisamente el primer paso del algoritmo de Kovacic, el segundo y tercer paso del algoritmo, están dedicados al calculo de $Q(v)$ (si existe), finalmente, la ecuación reducida no es soluble si su grupo de Galois es $SL(2, C)$.

Sea $r(x) = \frac{s(x)}{t(x)}$, siendo $r(x), t(x)$ primos relativos, y $t(x)$ mónico. Se define la función $h(x)$ sobre $L_{max} = \{1, 2, 4, 6, 12\}$ como $h(1) = 1, h(2) = 4$, $h(4) = h(6) = h(12) = 12$

- PRIMER PASO.

  1. Sea $\Gamma^{‘}$ el conjunto de raíces de $t(x)$ (es decir los puntos singulares en el plano complejo) y sea $\Gamma = \Gamma^{‘} \cup \infty$ el conjunto de puntos singulares. Entonces el orden en un $c \in \Gamma^{‘}$ es $o(c) = i$ si c es raiz de multiplicidad i de $t(x)$ y el orden en el infinito es definido por $o(\infty) = max(0, 4 + grado(s) - grado(t))$. Entonces escribimos m^+ para el valor máximo de los órdenes que aparecen en los puntos singulares en Γ, y escribimos Γ_i el conjunto de puntos singulares de orden $i \leq m^+$.
  2. Si $m^+ \geq 2$ se escribe $\gamma_2 = card(\Gamma_2)$, caso contrario $\gamma_2 = 0$. Entonces se calcula

     $$\gamma = \gamma_2 + card(\bigcup_{\substack{h\ impar \\ 3 \leq h \leq m^+}} \Gamma_h)$$

3. Para los puntos singulares de orden 1 o 2 , $c \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ se calcula la parte principal de $r(x)$ así:
   si $c \in \Gamma^{‘}$
   $$r(x) = \alpha_c (x-c)^{-2} + O((x-c)^{-1})$$
   y en el punto en el infinito
   $$r(x) = \alpha_\infty x^{-2} + O(x^{-3})$$
4. Se define el subconjunto $L^{‘}$ (de los posibles valores del grado del polinomio minimal $Q(v)$) así:
   $\{1\} \subset L^{‘}$ si $\gamma = \gamma_2$, $\{2\} \subset L^{‘}$ si $\gamma \geq 2$ y $\{4, 6, 12\} \subset L^{‘}$ si $m^+ \leq 2$.
5. Ocurren tres casos mutuamente excluyentes:
   a) Si $m^+ \geq 2$, entonces $L = L^{‘}$.
   b) Si $m^+ \leq 2$, y para algun $c \in \Gamma$, $\sqrt{1+4\alpha_c} \in Q$ $\sum_{c \in \Gamma^{‘}} \beta_c = 0$, entonces $L = L^{‘}$
   c) Si los casos (a) y (b) no son ciertos, entonces $L = L^{‘} - \{4, 6, 12\}$
6. Si $L = \emptyset$ entonces la ecuación reducida no es integrable con grupo de Galois $SL(2, C)$ caso contrario, se escribe un n para el valor mínimo en L.

- SEGUNDO PASO.

  Se considera un valor fijo de n.

1. Si ∞ tiene orden 0, se escribe el conjunto
   $$E_\infty = \{0, \frac{h(n)}{n}, 2\frac{h(n)}{n}, 3\frac{h(n)}{n}, \cdots, n\frac{h(n)}{n}\}$$
2. Si c tiene orden 1, entonces $E_c = \{h(n)\}$.
3. Si $n = 1$ y para cada c de orden 2, se define
   $$E_c = \{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4\alpha_c}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1+4\alpha_c})\}$$
4. Si $n \geq 2$, para cada c de orden 2, se define
   $$E_c = Z \cap \{\frac{h(n)}{2}(1 - \sqrt{1+4\alpha_c}) + \frac{h(n)}{n} k(\sqrt{1+4\alpha_c}) : k = 0, 1, 2, \cdots, n\}$$

5. Si $n = 1$, para cada punto singular par de orden $2v$ se calculan los números α_c y los β_c definidos, (salvo por el signo) por las siguientes condiciones:

   a) Si $c \in \Gamma^{‘}$,

   $$r(x) = \{\alpha_c((x-c)^{-v}) + \sum_{i=2}^{v-1} \mu_{i,2}((x-c)^{-i})\}^2 + \beta_c((c-c)^{-v-1}) \\ +O((x-c)^{-v})$$

   y se escribe

   $$\sqrt{r_c} := \alpha_c((x-c)^{-v}) + \sum_{i=2}^{v-1} \mu_{i,2}((x-c)^{-i})$$

   .

   b) Si $c = \infty$,

   $$r(x) = \{\alpha_\infty(x^{v-2}) + \sum_{i=0}^{v-3} \mu_{i,\infty} x^i\}^2 - \beta_\infty x^{v-3} + O(x^{v-4})$$

   y se escribe

   $$\sqrt{r_\infty} := \alpha_\infty(x^{v-2}) + \sum_{i=0}^{v3} \mu_{i,\infty} x^i$$

   Entonces

   $$E_c = \{\frac{1}{2}(v + \epsilon\frac{\beta_c}{\alpha_c}) : \epsilon = \pm 1\}$$

   y el signo de de E_c es definido por

   $$sign(\frac{1}{2}(v + \epsilon\frac{\beta_c}{\alpha_c})) = \epsilon$$

   siendo $+1$ si $\beta_c = 0$.

   c) Si $n = 2$, para cada c de orden v, con $v \geq 3$, se escribe $E_c = \{v\}$.

- TERCER PASO

    1. Para n fijo, se trata de obtener elementos $e = (e_c)_c \in \Gamma$ los cuales pertenezcan al producto cartesiano $\prod_{c\in\Gamma} E_c$, tal que

        a) $d(e) := n - \frac{n}{h(n)} \sum_{c\in\Gamma} e_c$ es un número natural, y

        b) Si $n = 2$ entonces en e existe al menos un número impar.

        si ningún elemento e es obtenido, entonces se selecciona el siguiente valor en L y se regresa al paso 2,en otro caso, n es el máximo valor en L y el Grupo de Galois es $SL(2C)$. (es decir, la ecuaación reducida no es soluble).

    2. Para cada familia e como antes, se trata de lobtener una función racional Q y un polinomio P, tal que

        a)
        $$Q = \frac{n}{h(n)} \sum_{c\in\Gamma^{‘}} \frac{e_c}{x-c} + \delta_{n1} \sum_{c\in\cup_{v>1}\Gamma_{2v}} sign(e_c)\sqrt{r_c}$$

        b) P es un polinomio de grado $d(e)$ y sus coeficientes son encontrados como una solución del sistema de ecuaciones
        - $P_{-1} = 0$,
        - $P_{i-1} = -(P_i)^{‘} - QP_i - (n-i)(i+1)rP_{i+1}$, $n \geq i \geq 0$,
        - $P_n = -P$.

Si un par (P, Q) como se describio antes es encontrado, entonces la ecuación reducida es soluble, y la Ecuaci ón asociada de Riccati tiene una solución v dada por alguna raíz v de ;a ecuación

$$\sum i = 0^n \frac{P_i}{(n-1)!} v^i = 0$$

Si ningún par es encontrado, se toma el siguiente valor en L y se pasa al segundo paso. Si n es el mayor valor en L , entonces la ecuación reducida no es soluble, y su grupo de Galois es $SL(2, C)$.

Ejemplo 1. *Sea*

$$r(x) = -(\frac{1}{4(x-1)} + \frac{5}{4(x-1)^2} + \frac{3}{16x^2}) := \frac{s(x)}{t(x)}$$

- PRIMER PASO.

  1. Los conjuntos Γ y $\Gamma^{'}$ son
  $$\Gamma^{'} = \{0,1\} \text{ y } \Gamma = \{0,1,\infty\},$$
  con ordenes
  $$o(0) = o(1) = 2, o(\infty) = max(0, 4 + grado(s) - grado(t)) = 3$$
  y definimos $m^{+} := max(m, o(\infty)) = max(2, o(\infty)) = 3$, ($m$ es el cardinal de $\Gamma^{'}$).
  Entonces, el conjunto de puntos singulares es clasificado por el orden:
  $$\Gamma_2 = \{0,1\}, \text{ y } \Gamma_3 = \{\infty\}.$$
  2. Como $m^{+} > 2$, tomamos $\gamma_2 := 2$ y $\gamma := \gamma_2 + card(\Gamma_3) = 3$.
  3. $\alpha_0 = -\frac{3}{16}$, $\alpha_1 = -\frac{5}{4}$.
  4. $L = \{2\}$, $n = 2$

- SEGUNDO PASO.

  1. Como $n = 2 \geq 2, h(2) = 4$ y $E_0 = Z \cap \{1,2,3\} = \{1,2,3\}$, $E_1 = Z \cap \{2(1-\sqrt{-4}), 2, 2(1+\sqrt{-4})\} = \{2\}$
  2. $E_\infty = \{3\}$

- TERCER PASO.

  Si $e_1 = (1,2,3)$, $e_2 = (2,2,3)$, $e_3 = (3,2,3)$, (los elementos de $E_0 \times E_1 \times E_\infty$), entonces los números $d(e_1)$, $d(e_2)$, $d(e_3)$, no son números naturales. Entonces el Grupo de Galois de la ecuación reducida, con este $r(x)$ es $SL(2,C)$. Asi la ecuación no es soluble.

2. Programas

1. El siguiente programa,transforma la ecuación reducida a la de Riccati Asociada, haciendo los trámites paso por paso

```
f1:=diff(y(x),x$2)-r(x)*y(x)=0;
> f2:=subs(diff(y(x),x)=y(x)*v(x),f1);
> f3:=simplify(f2/diff(y(x),x));
> f4:=solve(f3,diff(v(x),x));
> f5:=simplify(subs(diff(y(x),x)=v(x)*y(x),f4));
```

2. El siguiente programa, ilustra lo mismo del primero, pero es más reducido

```
t1:=simplify(subs(diff(y(x),x)=v(x)*y(x),solve(simplify((
subs(diff(y(x),x)=y(x)*v(x),diff(y(x),x$2)-r(x)*y(x)=0))
/diff(y(x),x)),diff(v(x),x))));
```

3. El siguiente programa, realiza la transformación que lleva la ecuación general a la reducida, paso por paso.

```
A:=diff(y(x),x$2)+p(x)*diff(y(x),x)+q(x)*y(x)=0;
> B:=exp((-1/2)*int(p(t), t=x0..x))*v(x);
> F:=subs(y(x)=B,A);
> G:=simplify(F);
> H:=exp((-1/2)*int(p(t), t=x0..x));
> J:=simplify(G/H);
> K:=collect(J,v(x));
> M:=subs(-1/2*diff(p(x),x)-1/4*p(x)^2+q(x)=-r(x),K);
```

4. El siguiente programa, hace lo mismo, que el inmediatamente anterior, pero es más simplificado

```
A2:=diff(y(x),x$2)+p(x)*diff(y(x),x)+q(x)*y(x)=0;
> F2:=collect(simplify(simplify(subs(y(x)=exp((-1/2)*int(p(t),
 t=x0..x))*v(x),A2))/exp((-1/2)*int(p(t), t=x0..x))),v(x));
> F3:=subs(-1/2*diff(p(x),x)-1/4*p(x)^2+q(x)=-r(x),F2);
```

```
                / 2        \
                |d         |         /d       \
         A2 := |--- y(x)| + p(x) |-- y(x)| + q(x) y(x) = 0
                |  2       |         \dx      /
```

```
            \dx       /



                                                                 / 2        \
       /      /d       \              2        \        |d          |
 F2 := |- 1/2 |-- p(x)| - 1/4 p(x)  + q(x)| v(x) + |--- v(x)| = 0
       \      \dx      /                           /        |  2        |
                                                                 \dx        /


                               / 2        \
                               |d          |
         F3 := -r(x) v(x) + |--- v(x)| = 0
                               |  2        |
                               \dx        /
```

5. Las siguientes ecuaciones, dejan ver el hecho que Maple no siempre resuelve la ecuación reducida

```
> ec1:=diff(y(x),x$2)+(1/(4*(x-1))+5/(4*(x-1)^2)+3/(16*x^2))*y(x);
> res1:=dsolve(ec1);
>
```

```
            / 2        \
            |d          |   /   1        5/4        3/16\
     ec1 := |--- y(x)| + |------- + -------- + ----| y(x)
            |  2        |   |4 x - 4          2      2 |
            \dx        /   \           (x - 1)     x  /


                              3        2
  res1 := y(x) = DESol({(4 x  + 19 x  - 6 x + 3) _Y(x)

                                        / 2        \
                4       3       2  |d          |
       + (16 x  - 32 x  + 16 x ) |--- _Y(x)|}, {_Y(x)})
                                        |  2        |
```

```
                              \dx       /

> ec2:=diff(y(x),x$2)+(4*x^3+x^2)/4*y(x);
> res2:=dsolve(ec2);

                   / 2      \
                   |d       |           3    2
            ec2 := |--- y(x)| + 1/4 (4 x  + x ) y(x)
                   |  2     |
                   \dx      /


                                              / 2       \
                           3    2             |d        |
  res2 := y(x) = DESol({(4 x  + x ) _Y(x) + 4 |--- _Y(x)|}, {_Y(x)})
                                              |  2      |
                                              \dx       /

> ec3:=diff(y(x),x$2)-((x^2+2*x+3)/(4*x^2))*y(x);
> res3:=dsolve(ec3);

                  / 2      \         2
                  |d       |       (x  + 2 x + 3) y(x)
           ec3 := |--- y(x)| - 1/4 -------------------
                  |  2     |                2
                  \dx      /               x


                   _C1 exp(- 1/2 x)   _C2 exp(1/2 x) (x - 1)
       res3 := y(x) = ---------------- + ----------------------
                         1/2                    1/2
                        x                      x

> ec4:=diff(y(x),x$2)+(4*x+1)/(4*x^2)*y(x);
> res4:=dsolve(ec4);
>

                   / 2      \
```

```
                 |d       |   1/4 (4 x + 1) y(x)
          ec4 := |--- y(x)| + ------------------
                 |  2     |            2
                 \dx      /           x
```

```
res4 := y(x) = _C1 sqrt(x) BesselJ(0, 2 sqrt(x))

       + _C2 sqrt(x) BesselY(0, 2 sqrt(x))
```

Bibliografía

[1] Gómez C. y Salas H., *Ecuaciones algebraicas de 2do y 3ro grado, Mathematica e Internet*,Coloquio Distrital de Matemáticas Enero 2003, Universidad Nacional de Colombia.

[2] ________________ *Ecuaciones diferenciales lineales de orden n*,Coloquio Distrital de Matemáticas Enero 2003, Universidad Nacional de Colombia.

[3] J. Morales y Ramis J. B., *Galoisian Obstructions to integrability of Hamiltonian System II* , Methods and Aplications of Analysis,**1**(2002),97–112.