Factorización algebraica

Johana Andrea Torres Díaz
Profesora Universidad Pedagógica Nacional
Profesora Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia
jotorres@uni.pedagogica.edu.co

Lyda Constanza Mora Mendieta
Profesora Universidad Pedagógica Nacional
Profesora Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia
lmendieta@uni.pedagogica.edu.co

Carlos Julio Luque Arias
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Profesor Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia
caluque@uni.pedagogica.edu.co

Resumen

Se presenta la necesidad de la factorización de números y expresiones algebraicas haciendo un recorrido por la historia de las matemáticas, específicamente con la solución de ecuaciones polinómicas con coeficientes racionales. Finalmente se muestra cómo el problema de encontrar la solución de una ecuación algebraica lleva al estudio de dominios de factorización única.

La factorización es uno de los procesos más difíciles de comprender por los estudiantes de la escuela secundaria, llegando a no reconocer la necesidad de emplearla o la posibilidad de aplicarla y, al mismo tiempo, es una de las herramientas más empleadas en el trabajo matemático para “transformar”una expresión algebraica de manera conveniente, para resolver algún problema. Pero su real utilidad, vista a través de la historia, es la solución de ecuaciones algebraicas; de hecho, en un primer momento, la factorización surge ante la necesidad de solucionar ecuaciones de segundo grado.

Los babilonios, fueron los primeros que resolvieron, ecuaciones cuadráticas. En unas tablillas descifradas por *Neugebaver*en 1930, cuya antigüedad es de unos 4000 años, se encontraron soluciones a varias de estas ecuaciones, empleando el método conocido actualmente como "completar el cuadrado", en cuyo desarrollo, los babilonios, se valieron de factorizaciones simples que ya conocían.

En términos modernos, este método los llevó a la fórmula cuadrática:

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2} \quad \text{, como solución de la ecuación} \quad x^2 - px = q$$

El trabajo de los babilonios constituyó un logro notable, teniendo en cuenta que no contaban con la notación moderna y por su alto nivel de abstracción, al considerar las ecuaciones cuárticas como ecuaciones cuadráticas "disfrazadas"y resolverlas como tales.

Posteriormente, los griegos y los árabes consiguieron resolver ecuaciones de segundo grado utilizando, también, el método de completar el cuadrado con aplicación de áreas; ambas civilizaciones se valieron de representaciones geométricas para mostrar hechos algebraicos, como se evidencia en el II libro de los *Elementos* de Euclides, por ejemplo:

Proposición 1. *"Si hay dos rectas y una de ellas se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos obtenidos por la (recta) no cortada y cada uno de los segmentos."*

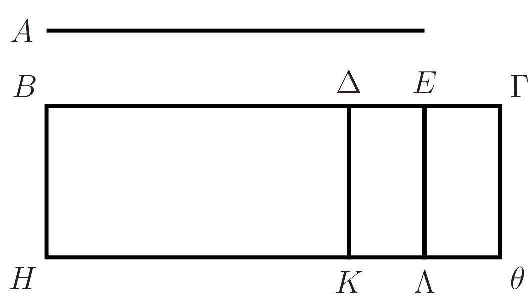

Figura: 1

Que, en notación moderna, la proposición equivale a la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición:

$$ab + ac + ad = a(b + c + d).$$

Para resolver ecuaciones de la forma

$$ax^2 + bx = c$$

los griegos (Euclides) y los árabes[1] (Al- khowarizmi y Tabit Ben Qurra), desarrollaron el siguiente procedimiento; para encontrar, por ejemplo, un número x tal que

$$x^2 + 4x = 140$$

consideraban x como el lado de un cuadrado de área x^2 y $4x$ como el área de un rectángulo de lados 4 y x, respectivamente; en consecuencia, $x^2 + 4x$ es el área de la figura:

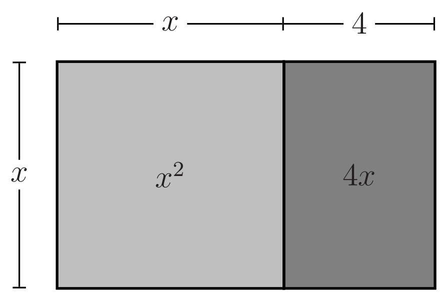

Figura: 2

Posteriormente, cambiaban este dibujo por otra figura con la misma área, dividiendo el rectángulo de área $4x$ en dos rectángulos de área $2x$ y colocando uno de ellos a la derecha del de área x^2 y el otro debajo para formar la siguiente figura:

[1] Van der WAERDEN, B. L., *A History of Algebra*, Springer, Berlin, 1985.

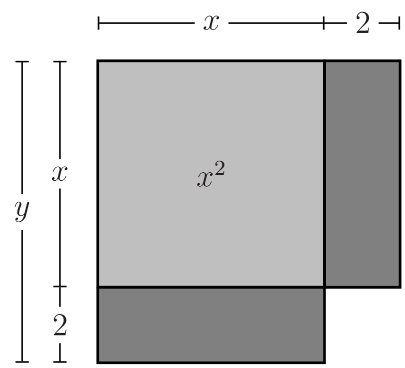

Figura: 3

Esta figura puede completarse para formar un cuadrado, agregando en la esquina inferior derecha, un cuadrado, cuya área se conoce:

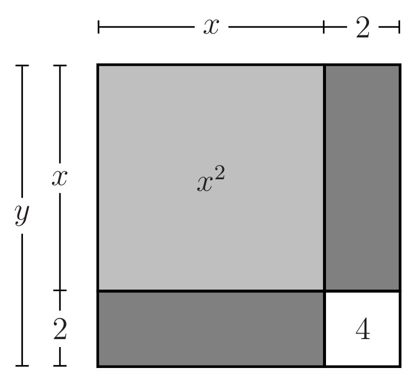

Figura: 4

De esta manera, el área de la región sombreada equivale a 140 (pues corresponde a $x^2 + 4x$) unidades cuadradas y el área del cuadrado en blanco es 4 unidades cuadradas; es así, como el área total corresponde 144, luego el lado del cuadrado grande, llamémoslo y, es 12, de donde $x = 10$ unidades.

Euclides de Alejandría fue el primer matemático que planteó y recopiló los conceptos básicos de la factorización de números, en los libros VII, VIII y IX de los *Elementos*.En conjunto, estos libros constan de 23 definiciones y 102 proposiciones, donde se trata a los números como objetos que se representan por medio de segmentos y en consecuencia, *Euclides* emplea las expresiones "está medido por" y "mide a", para referirse a los conceptos múltiplo y divisor, respectivamente.

En estos tres libros, se reúne toda la aritmética de la época, conceptos relacionados con la divisibilidad, propiedades y teoremas de números primos, múltiplos, divisores, mínimo común múltiplo, máximo común divisor y algoritmo de Euclides. En términos y notación moderna, si a,b y c son números enteros tales que cumplen la igualdad $ab = c$, se dice que a y b son factores o divisores[2] de c, y que c es un múltiplo de a y de b. Si a tiene únicamente dos divisores distintos (1 y él mismo), se dice que a es un número primo, los demás son números compuestos.

Euclides enuncia[3] también el que se conoce en la actualidad como teorema fundamental de la aritmética, demostrado formalmente, siglos después, por *Carl Friedrich Gauss*:

> *Si a es un número entero tal que $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1$, entonces a se puede expresar como el producto de números primos por ± 1:*
>
> $$a = (\pm 1)p_1 p_2 \cdots p_n,$$
>
> *y esta descomposición es única salvo el orden de los factores.*

El desarrollo moderno de la factorización se inicia en el Renacimiento Italiano, hacia el año 1545, con la publicación del *Ars Magna* de *Girolamo Cardano* (1501-1576) en el cual se muestran las soluciones para la ecuación cúbica y cuártica, desarrolladas por *Nicolo Fontana Tartaglia* (1500-1557), *Ludovico Ferrari* (1522-1565) y él mismo, obtenidas a partir de un procedimiento sistemático completando el cuadrado, de una manera conveniente, para llegar a la solución. Probablemente esta fue la mayor contribución al álgebra, desde que los babilonios aprendieron a completar el cuadrado para solucionar ecuaciones cuadráticas, debido a la motivación que generó para el estudio de la solución de ecuaciones polinómicas de grado mayor.

[2]Para denotar que b es un factor de c se escribe $b \mid c$

[3]Por supuesto, sin incluir a los números negativos.

A partir de esta publicación, los matemáticos centraron sus esfuerzos en la búsqueda de la solución para la ecuación de quinto grado durante más de dos siglos y medio. *Niels Henrik Abel* (1802-1829) creyó haber encontrado la solución; él mismo encontró el error en su demostración y en 1824 publicó "Sobre la resolución algebraica de ecuaciones", donde demuestra la imposibilidad de hallar alguna solución por radicales para la ecuación de quinto grado[4], acabando de esta manera con la búsqueda infructuosa de muchos matemáticos.

A raíz de esta publicación el problema fue reformulado, ahora se intentaba determinar las condiciones que deben cumplir las raíces de una ecuación polinómica, para que ésta tenga solución, dado que algunas ecuaciones de quinto grado u otros grados superiores si tenían solución.

En este sentido, y a partir de los trabajos de *Lagrange, Legendre, Gauss y Abel, Evariste Galois* (1811-1832) logró determinar cuáles ecuaciones polinómicas de grado superior a cuatro eran solubles por radicales y cuáles no, estudiando las permutaciones de las raíces de la ecuación. El conjunto de estas raíces conforman una estructura de grupo, concepto introducido por él e incorporado a la teoría de ecuaciones algebraicas. Así, el objeto de estudio del álgebra trascendió de la solución de ecuaciones, al estudio de estructuras como la de grupo y posteriormente, la de campo.

En este contexto, crece el interés por encontrar mejores métodos para resolver ecuaciones algebraicas de cualquier grado; la búsqueda de la solución de ecuaciones de grado mayor que cuatro, llevó a encontrar los teoremas de factorización en el dominio de integridad[5] de los polinomios y en general, para cualquier dominio de integridad.

El problema de determinar la solución de una ecuación algebraica general, tiene su sustento teórico en el estudio de dominios de factorización única[6] (DFU). Si un anillo D es un DFU, cumple dos condiciones:

[4]En una publicación anterior de 1799, *Paolo Ruffini* demostró "la solución algebraica de la ecuación general de grado mayor que cuatro es siempre imposible". Esta demostración no tuvo, inicialmente la divulgación pertinente, por lo cual fue poco conocida.

[5]Un dominio de integridad es un anillo conmutativo, con identidad y sin divisores de cero. (PÉREZ, E. *Estructuras algebraicas*)

[6]El término dominio de factorización única, se usa para dominios de integridad en los que la factorización completa de elementos compuestos es posible y única. (Ibid).

1. Todo elemento $a \in D$ diferente de cero y que no es una unidad, se puede expresar como producto de una unidad y un número finito de elementos primos.

2. Si $a = p_1p_2\cdots p_n = q_1q_2\cdots q_m$ son factorizaciones de a en elementos primos, entonces $m = n$ y existe una permutación π de los subíndices tal que p_i y $q_{\pi(i)}$ son asociados $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Existen dos vías para determinar si un dominio de integridad es un DFU. La primera consiste en estudiar la forma de los ideales en el dominio de integridad y con esto se determina que todo dominio de ideal principal es un DFU. La otra, lleva a los dominios de integridad Euclidianos, en los cuales se generaliza el algoritmo de división del dominio de los números enteros, y se demuestra que:

1. Todo dominio de ideal principal es un dominio de factorización única.

2. Todo dominio Euclidiano es un dominio de ideal principal.

3. Todo dominio Euclidiano es un dominio de factorización única.

Si F es un campo, el dominio de integridad de los polinomios en x con coeficientes en F, se denota $F[x]$. Para $F[x]$ se pueden demostrar las tres proposiciones anteriores, con lo cual se puede enunciar el teorema de factorización única en $F[x]$:

> *Cada polinomio $p(x) \in$ **F[x]** , de grado positivo, es el producto de un elemento diferente de cero de F y polinomios mónicos irreducibles en F[x]. Excepto por el orden de los factores, esta factorización es única.*

Este teorema se vuelve importante, cuando se aplica a polinomios sobre el campo de los números complejos, en el cual se contemplan los coeficientes de las ecuaciones algebraicas. En este caso, la herramienta decisiva para ver la factorización se conoce como *"Teorema Fundamental del Álgebra":*

Sea C el campo de los números complejos. Si $p(x) \in C[x]$ y es de grado positivo, entonces $p(x)$ tiene al menos una raíz en C.

Este teorema fue planteado como una conjetura en el siglo XVI y desde entonces, se publicaron varias demostraciones incorrectas. La primera demostración rigurosa la consiguió *Gauss* en 1797, quién presentó cinco pruebas diferentes[7]. Es importante mencionar que éste es un "teorema de existencia", es decir que afirma que existe al menos una raíz compleja para cada polinomio con coeficientes complejos de grado $n \geq 1$, pero no muestra un método para calcular dicha raíz.

Del teorema fundamental del álgebra, se deriva que si $p(x) \in C[x]$ es un polinomio de grado $n > 0$, entonces $p(x)$ se puede expresar como un producto de n factores lineales (no necesariamente diferentes) y por cada uno de estos factores se obtiene un cero del polinomio o, lo que es lo mismo, una solución de la ecuación algebraica $p(x) = 0$. Así, el problema de determinar las soluciones de una ecuación algebraica es equivalente al problema de factorizar completamente el polinomio.

Puesto que el anillo de los polinomios es un domino euclidiano, el comportamiento algebraico del dominio de integridad de los polinomios, es idéntico al del dominio de integridad de los enteros, con lo cual *teorema fundamental del álgebra* tiene su equivalente en los números enteros, el *teorema fundamental de la aritmética* juntos equivalentes con el teorema de factorización única para un dominio de integridad. La única diferencia entre los dos, es que en la aritmética existe un procedimiento sistemático para llegar a la factorización, basada en divisiones sucesivas, mientras que en los polinomios no existe procedimiento alguno. Esto muestra teóricamente, la correspondencia entre la factorización de enteros y polinomios, y por tanto, la posibilidad de estudiar los procesos de factorización desde la aritmética, para entender los procesos de factorización en el álgebra, valiéndose también de los procedimientos, problemas y explicaciones empleados por diversas civilizaciones y personajes, como se puede dilucidar en la historia de las matemáticas.

[7] Actualmente, se conocen muchas demostraciones del teorema fundamental del álgebra, pero ninguna de ellas es de naturaleza estrictamente algebraica, ya que emplean conceptos analíticos de la teoría de funciones en variable compleja.

Bibliografía

[1] Azarquiel, Grupo. *Ideas y actividades para enseñar álgebra*, Matemáticas: Cultura y aprendizaje, Editorial Síntesis, Madrid. 1993.

[2] Carl Boyer, *Historia de la Matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1992.

[3] Yancy Campos ; Johana Torres, *Causas de los errores en el proceso de factorizar,* Trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2000.

[4] Morris Kline, *El pensamiento matemático desde la antigüedad hasta nuestros días*, Alianza editorial, Madrid, 1992.

[5] Carlos Luque et al. Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 2002.

[6] Edgar Perez, *Estructuras algebraicas.* Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, 1998.

[7] Anthony Pettofrezzo ; Donald Byrkit , *Introducción a la teoría de números*, Editorial Prentice Hall Internacional, España, 1972.

[8] Martín Socas y otros, *Iniciación al álgebra.* Matemáticas: Cultura y aprendizaje, Editorial Síntesis, Madrid, 1989.

[9] Van Der Waerden ,*A history of algebra*, Springer-Verlag, Berlín, 1985.