Coordenadas y solución de ecuaciones diferenciales con el programa Regla y Compás

Carlos Abel Álvarez Pérez
Profesor Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito
Bogotá D.C, Colombia
calvarez@escuelaing.edu.co

Resumen

Lo que se pretende en la conferencia es mostrar las bondades del paquete de geometría dinámica *Regla y Compás* para estudiar algunas curvas en coordenadas paramétricas y ver cómo con esta idea de trabajo se puede llegar a ilustrar en forma dinámica el campo de pendientes o plano de fases para una ecuación diferencial de primer orden o un sistema dos por dos autónomo. También, utilizando un método de Euler modificado, mostrar que es posible hallar la curva aproximada de solución de una ecuación diferencial.

Introducción

Lo que permite trabajar en coordenadas con el paquete de geometría dinámica *Regla y Compás* es el hecho de que cada punto que se genera está referenciado con un sistema de coordenadas interno y además existe la posibilidad de crear una dependencia funcional entre un punto y otro. Por ejemplo podemos tomar un segmento y sobre él un punto que funcionará como parámetro y luego crear un punto arbitrario que dependa del punto parámetro y utilizar las coordenadas paramétricas para describir algunas curvas básicas.

Por otro lado, el algoritmo de Euler para resolver ecuaciones diferenciales utiliza la dependencia entre un punto y el siguiente. Este hecho que regularmente se utiliza para resolver en forma numérica la ecuación es posible utilizarlo en un paquete de geometría dinámica para generar una curva solución y también para describir e ilustrar el plano de pendientes de la ecuación.

Por ultimo, es importante resaltar una de las grandes bondades del paquete *Regla y Compás* es que permite la generación automática de applets interactivos y este hecho facilita presentaciones a través de la web en las que el visitante puede interactuar con la página y comprender mejor los fenómenos que se estén trabajando en la presentación. Un ejemplo de dicha interactividad es la presente conferencia.

1. Trabajo en Coordenadas

Cada objeto geométrico que se genera en la pantalla de trabajo con el paquete de geometría dinámica Regla y Compás tiene una ventana en la que se identifican y también se pueden modificar sus propiedades, en el caso de un punto se tienen los elementos que se pueden observar en el siguiente dibujo.

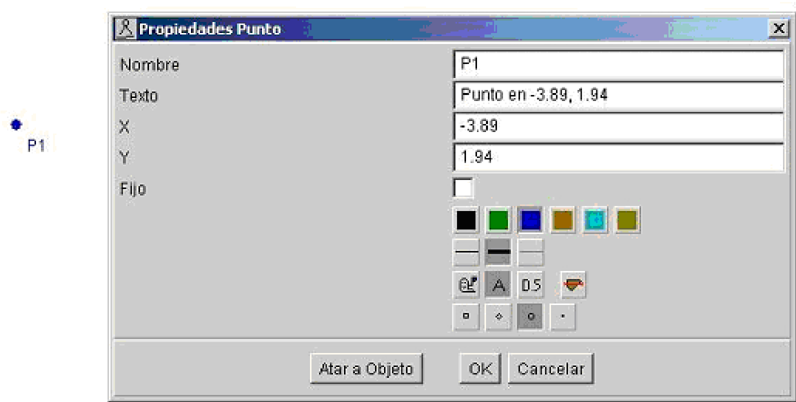

Figura: 1

Las casillas correspondientes a $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son las coordenadas del punto y este hecho es lo que permite generar una dependencia funcional entre un punto y otro.

A continuación se presentaran un par de ejemplos en los que se ilustra el trabajo que se puede realizar en coordenadas. En cada uno de los applets[1] se muestra una barra superior con algunas herramientas disponibles, al colocar el cursor sobre ellas se desplegará el nombre y al hacer click sobre alguna de ellas se podrá utilizar sobre el applet.

Ejemplo 1. *En el siguiente applet se muestra la construcción de una elipse en coordenadas paramétricas. Se toma como dominio un segmento S de longitud 2π y en él el punto P que será el parámetro o variable independiente y un punto dependiente de P, Q como variable dependiente que describirá la elipse, el punto Q tiene como coordenadas:*

$$x = 4\cos(t), \quad y = 2\,\mathrm{sen}(t), \quad \text{con} \quad t = d(P_1, P_2) * 180/\pi$$

veámoslo.

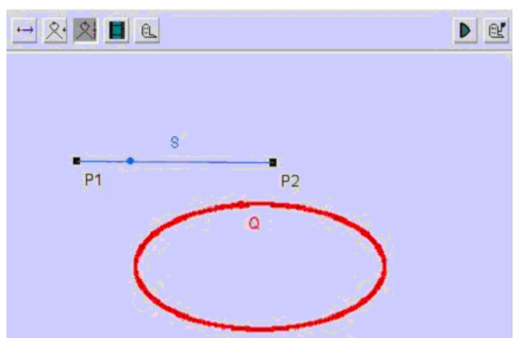

Figura: 2

Ejemplo 2. *Para trabajar en coordenadas polares, podemos tomar una circunferencia $C1$ y en ella dos puntos $P1$ y $P2$ y el ángulo $P1$, O y $P2$, como $a1$, que será la variable independiente y luego una recta r que pase por O y $P2$ que será el eje polar y en ella un punto Q que depende de $a1$ y será la variable dependiente. En el applet la dependencia es:*

[1]Un Applet es una construcción interactiva que funciona en lenguaje HTML, en este formato es presentada la conferencia, pero en este documento es simplemente una imagen del applet.

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad x(0) = x_0$$
$$\frac{dy}{dt} = x, \qquad y(0) = y_0$$

veámoslo:

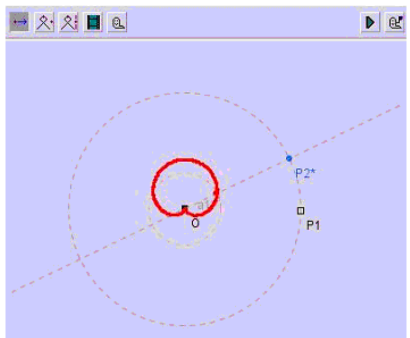

Figura: 3

2. Ecuaciones Diferenciales

Una ecuación diferencial de primer orden es una expresión de la forma:

$$\frac{df}{dt} = f(t, y)$$

en donde $\boldsymbol{y}$ es una función incógnita y $\boldsymbol{t}$ es la variable independiente, regularmente el tiempo, obsérvese que la anterior relación realmente lo que informa es el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva solución $\boldsymbol{y(t)}$ en cualquier instante $\boldsymbol{t}$, este hecho es el que se explota en el algoritmo de Euler para resolver ecuaciones diferenciales en forma aproximada. Con más precisión, el método de Euler utiliza la iteración:

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ t_{n+1} &= t_n + h \\ y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n) \end{aligned}$$

En forma gráfica se tiene la siguiente situación:

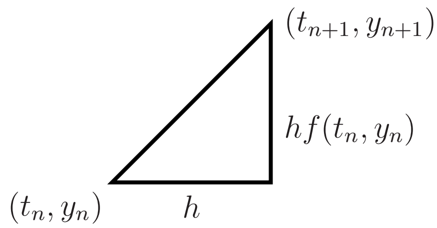

Figura: 4

Pero claramente la efectividad del método depende directamente del valor de la función, si es muy grande el valor de la función, la aproximación será mala y si es pequeño el valor de la función, la aproximación será buena. A continuación se presenta un método de Euler modificado (este método fue estudiado en el seminario de regla y compás, en la Escuela Colombiana de Ingeniería, coordinado por el Dr. Ernesto Acosta), la idea es tomar el valor del paso $\boldsymbol{h}$ en la hipotenusa del anterior triángulo y no en uno de sus catetos como se ve en la figura. El método será explicado simultáneamente con la solución de un ejercicio.

Ejercicio 1. *Mediante el método de Euler modificado resolver el problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}y(3-y), \qquad y(t_0) = y_0.$$

También construir el campo de pendientes para la ecuación.

Solución:
Lo primero es generar una macro para construir un pequeño segmento de longitud $\boldsymbol{h}$ y pendiente $f(t,y) = \dfrac{1}{4}\,y(3-y)$ para ello tomaremos un segmento de longitud $\boldsymbol{h}$, un punto $P1$ y un punto $P2$ que dependa de $P1$ de forma que $x(P_2) = x(P_1) + 1, \qquad y(P_2) = y(P_1) + \dfrac{1}{4}\,y(P_1)(3 - y(P1))$ y luego cortamos la semirrecta $P1P2$ a una longitud $\boldsymbol{h}$ del punto $P1$ y nos quedamos con éste segmento, en el siguiente applet se ve la construcción.

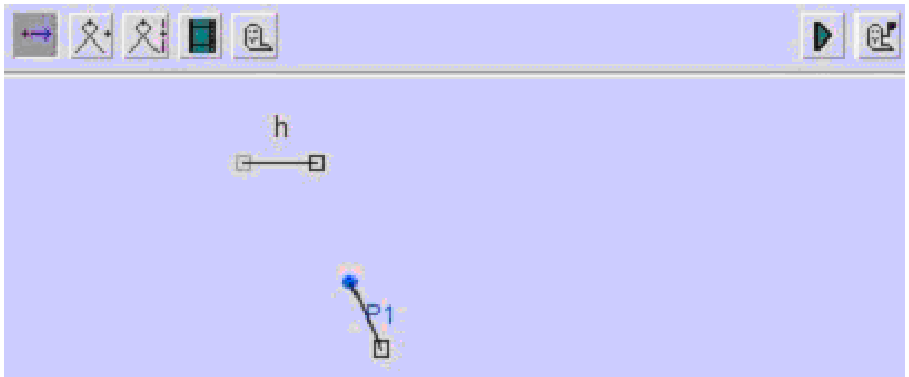

Figura: 5

Ahora podemos iterar varias veces la macro y el resultado será la solución gráfica aproximada de la ecuación diferencial, como se muestra en el siguiente applet:

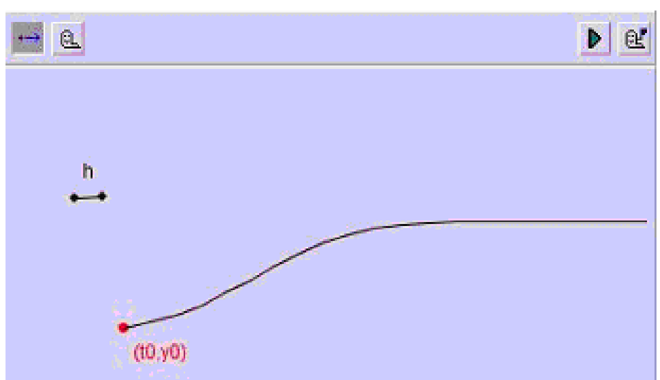

Figura: 6

Ahora, para construir el campo de pendientes correspondiente, podemos crear una cuadrícula de puntos y en cada punto aplicar la anterior macro para construir un “pelo”y así tendremos el campo de pendientes, en el siguiente applet se muestra el resultado:

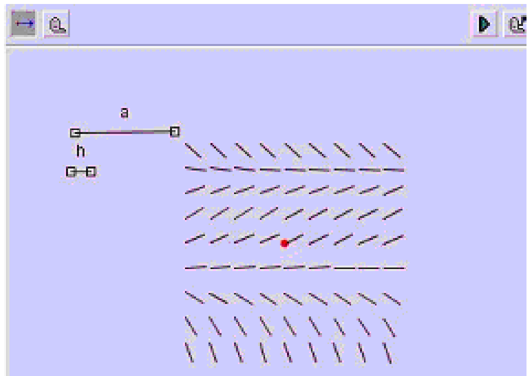

Figura: 7

Por último, podemos integrar la solución y el campo de pendientes para obtener:

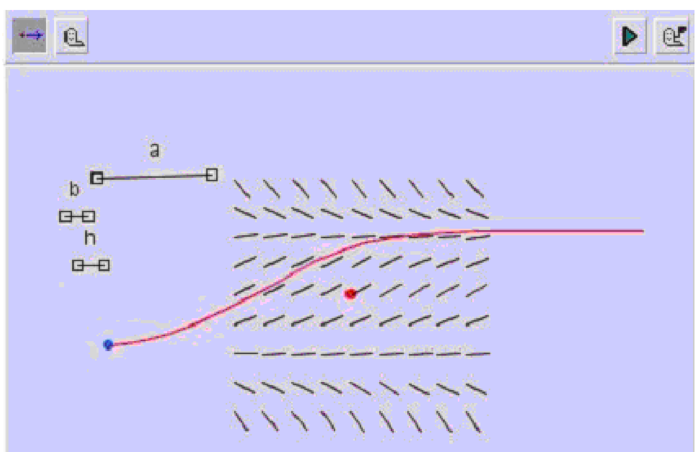

Figura: 8

Ejercicio 2. *Construir la solución del sistema con valor inicial*

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad x(0) = x_0$$
$$\frac{dy}{dt} = x, \qquad y(0) = y_0$$

además graficar el campo vectorial asociado al sistema.

Solución:
Similar al ejercicio anterior debemos construir un pequeño segmento que corresponda al campo vectorial asociado al sistema y luego iterararlo varias veces para obtener una solución aproximada del sistema, el resultado de dicho proceso se puede observar en el siguiente applet.

Además el applet permite estudiar el tipo de punto crítico que resulta ser el origen, en este caso es un punto de silla. Al desocultar se pueden observar los vectores propios y las soluciones de línea recta que tiene el sistema.

Figura: 9

Por último, podemos hacer la cuadrícula y en cada punto pintar un "pelo"del campo vectorial e integrar todo para obtener

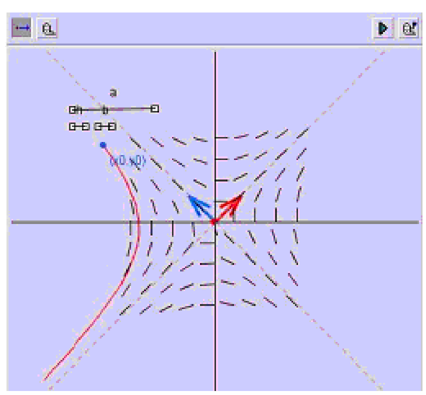

Figura: 10

Bibliografía

[1] Paul Blanchard, Robert L. Devaney y Glen R. Hall. *Ecuaciones Diferenciales*. Internacional Thomson Editores. México, 1999.

[2] Apuntes de grupo de trabajo en *Regla y Compás*, Escuela Colombiana de Ingeniería.