Una presentación de los números negativos

Carlos Julio Luque Arias
Profesora Universidad Pedagógica Nacional
Profesora Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia
caluque@uni.pedagogica.edu.co

Lyda Constanza Mora Mendieta
Profesora Universidad Pedagógica Nacional
Profesora Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia
lmendieta@uni.pedagogica.edu.co

Johana Andrea Torres Díaz
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Profesor Universidad Sergio Arboleda
Bogotá D.C, Colombia
jotorres@uni.pedagogica.edu.co

Introducción

Los números negativos son tema de currículos escolares de la educación básica secundaria, y habitualmente son tratados sin tener en cuenta, la resistencia histórica a su inclusión en la matemática, las múltiples objeciones de matemáticos de renombre y en general su dificultad conceptual, ya que ellos rompen con muchas ideas que se generan cuando se estudian los números positivos.

Presentamos una manera de acercarnos al significado de los números negativos, comenzando con procesos y situaciones cotidianas, representándolos con dos tipos de números, y definiendo las operaciones básicas y una relación de orden entre ellos.

Esta presentación no incluye números irracionales negativos, pues ellos serán el motivo en otra ocasión.

1. Procesos Reversibles e Irreversibles

En nuestro mundo existen procesos en los que el arrepentimiento es posible, y por supuesto también en los que no! en los primeros podemos ejecutar una acción y deshacer lo hecho hasta tener la misma situación inicial: tejer y deshacer el tejido como lo hacía Penélope en la Odisea, ensuciar la ropa para luego limpiarla, etc.

1.1. Procesos Irreversibles

Los procesos que no tienen reversa se llaman *irreversibles*, por ejemplo:

1. Envejecer, como casi todos los procesos biológicos, es un proceso irreversible, no es posible volver a nuestros años mozos; es cierto que hoy día la ciencia tiene descubrimientos asombrosos (cirugías plásticas, estéticas, lipoesculturas, etc.) pero tal proceso no es, por ahora, reversible.

2. Romper un papel, el paso del tiempo, disparar un arma, cantar, hablar, cortarse el cabello, etc.

3. Los procesos de combustión en química.

4. El proceso de inferir la verdad de una proposición q a partir de la de otra p, asegurando la de $p \to q$, no permite asegurar la verdad de p a partir de la de q y la de $p \to q$.

5. Si a partir de un número digamos x, lo elevamos a la quinta potencia, le sumamos 4 veces el cuadrado de x, le restamos 7, y obtenemos como resultado 0, no es posible a partir del resultado, deshacer lo hecho y encontrar el valor de x.

Los procesos irreversibles no son nuestro interés de este momento, sí en cambio los procesos reversibles.

1.2. Procesos Reversibles

1. Partiendo de un sitio, caminar cierta distancia en una dirección y luego regresar en dirección contraria hasta llegar al lugar inicial.

Podemos representar esta situación con los dos sentidos: derecho e izquierdo[1] de una recta, cuando se fija en ella un punto de referencia, que corresponde con el punto de partida que notaremos con 0.

Si notamos con números rojos el número de pasos[2] que se recorren hacia la derecha, con números negros, el número de pasos que se recorren hacia la izquierda, con el signo + hacer un proceso a continuación de otro, y con el símbolo =, es equivalente a, tendremos por ejemplo que:

$$5 + 5 = 0$$

Debemos enfatizar que 0 no representa "nada", como en los números naturales, sino *una posición inicial de referencia*; en esta situación, cualquier posición sobre la recta se puede representar con 0. Este 0 no es absoluto[3], es relativo!, no existe un único 0, existen infinitos ceros[4]!

2. Elevar la temperatura de una sustancia no orgánica y luego dejarla enfriar[5] hasta obtener la temperatura inicial.

[1] O arriba y abajo, o en cualquier posición, siempre que haya dos sentidos contrarios.

[2] Si escogemos como unidad de distancia, un paso; el procedimiento también es válido si usamos fracciones de paso.

[3] En la escala Kelvin de temperatura el cero se escoge de forma que no haya posibilidad de una temperatura bajo él. (SERWAY, R, *Física*, Tomo 1, 4 Edición, McGraw Hill, 1998. p. 562)

[4] Curiosamente en física también cuando se pensaba de manera clásica en el vacío, se le consideraba absoluto y único; la mecánica cuántica, por el contrario, considera infinitos estados vacíos, todos equivalentes. RYDER, L., *Quantum field theory*, Cambridge, 1984, p.p. 290-296.
El matemático francés Lazare Carnot (1753 - 1823) señala que el cero absoluto es una cantidad por debajo del cual no hay nada. "Para obtener realmente una cantidad negativa aislada, sería necesario restar una cantidad efectiva de cero, quitar algo de nada: operación imposible".
En el siglo XIX, F. Busset, enfatiza en la existencia de varios tipos de ceros, el cero absoluto y ceros relativos, el cero como origen en un sistema de coordenadas.

[5] Si en el intervalo de cambio de la temperatura no está ninguno de sus puntos críticos de cambios de estado.(SERWAY, R., op cit. p. 537).

A diferencia de las escalas para medir longitudes, donde a partir de un cero inicial, se inicia la medida y se avanza en un sentido único, pasando por $1, 2, 3, \dots$, etc, unidades; en la escala del termómetro *el cero no es extremo de la escala*, hay temperaturas por encima y por debajo de él[6].

Si partiendo de 0 grados *aumentamos la temperatura* en 5 grados y a continuación la disminuimos en 5 grados, obtenemos como temperatura final del proceso 0 grados, esto lo podemos representar como:

$$(+5) + (-5) = 0$$

Donde (+5) significa aumentar la temperatura en 5 grados, (-5) disminuirla en 5 grados, + hacer un proceso a continuación del otro. De nuevo, tenemos que aquí tampoco tiene un papel fundamental el 0, también es válida la afirmación, desde cualquier temperatura que tomemos como referencia.

3. La equivalencia lógica: En lógica dos proposiciones p y q se dice que son equivalentes cuando $p \to q$ y $q \to p$ son ciertas; esto significa que:

a. Si asumimos la verdad de p y demostramos $p \to q$ podemos asegurar la verdad de q

y viceversa:

b. Si asumimos la verdad de q y demostramos $q \to p$ podemos asegurar la verdad de p.

Estos dos procesos son *inversos*, en el sentido de que si aplicamos a y luego b, partiendo de la verdad de p llegamos a la verdad de p; y si aplicamos b y luego a, llegamos a la verdad de q.

4. Solución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Si a partir de un número digamos x, lo multiplicamos por un número a, le sumamos otro número b y obtenemos como resultado 0, es posible a partir del resultado, deshacer lo hecho y encontrar el valor de x.

[6] El primer termómetro científico fue construido por René Réaumur en 1730, incluía temperaturas por debajo de 0; en 1713, Daniel Fahrenheith evita esas temperaturas escogiendo un punto de referencia para el cero, más bajo.

1.3. Entes Opuestos

Aparte de los procesos inversibles que hemos mencionado, también existen cosas opuestas, que pueden ser representadas con el mismo modelo matemático, por ejemplo:

1. **La carga eléctrica** de la materia aparece de dos formas; cuando ellas son contrarias los cuerpos se atraen, si son del mismo tipo se rechazan, cuando se juntan cargas iguales de distinto tipo, las dos se compensan y la carga resultante es nula, o neutra.

2. **La interferencia de las ondas:** Cuando dos o más ondas concurren en el mismo espacio sus amplitudes se suman, de manera que si sus fases se acomodan de manera conveniente puede obtenerse una onda de amplitud 0, en lo que se llama *interferencia destructiva*. De esta manera es posible obtener oscuridad sumando luces y silencio sumando sonidos; es lo que sucede cuando una señal de televisión o de radio no es clara.

3. **Pasivos y activos:** En contabilidad desde tiempos muy antiguos[7], era costumbre escribir las deudas con color rojo y las ganancias y todo lo que le es pertenencia con color negro.

[7]Los chinos desde el primer siglo de nuestra era, representaban con varillas negras y rojas, activos y pasivos respectivamente. Sin embargo, aparecen solamente *como auxiliares de cálculo*; no hay *números negativos* en los enunciados de los problemas, tampoco los hay en las respuestas.
La primera vez que aparecen de forma explícita las reglas que rigen la aritmética con los números negativos es, hacia el año 628 de nuestra era, en una obra del matemático hindú Brahmagupta, En ella se explican los algoritmos para efectuar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, con lo que llamaba "los bienes", "las deudas"y la "nada", es decir con lo que hoy llamamos números positivos, negativos y cero; dice por ejemplo "*Una deuda restada de la nada se convierte en un bien, un bien restado de la nada se convierte en una deuda*". Sin embargo, los aceptaron con reservas, por ejemplo Braskara, obtuvo como soluciones de un problema 50 y -5, y dice: "el segundo valor no debe considerarse, porque es inadecuado; la gente no aprueba las soluciones negativas". La misma idea la aplicaron los comerciantes alemanes al escribir de un color lo que tenían y de otro lo que debían y al final del mes sumaban todo lo que tenían y le restaban todo lo que debían y escribían el resultado del color que fuera el número mayor. KLINE, M., *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Vol II, 1994, Alianza Universidad, Cap 25.

4. **El juego de las escondidas francesas:** Juegan hombres y mujeres, se esconden por parejas y nadie busca; si alguien es solicitado por alguno de los jugadores activos, debe regresar al juego en pareja.

   El número de mujeres activas en el juego las representamos con números en negrilla y los hombres con números normales, entrar al juego lo representamos con + y salir del juego con −.

   Supongamos que el juego inicia con 5 hombres, y 3 mujeres, esto lo simbolizamos:

   $$5 + \mathbf{3}$$

   3 hombres forman parejas con **3** mujeres y se esconden, quedan 2 hombres en el juego, esto lo representamos:

   $$5 + \mathbf{3} = 2$$

   De la misma manera:

   $$\mathbf{5} + 5 = \mathbf{0}$$
   $$\mathbf{5} + \mathbf{3} = \mathbf{8}$$
   $$5 + 3 = 8$$
   $$\mathbf{3} + 5 = 2$$

2. Números Opuestos

Para representar situaciones donde aparezcan procesos inversos o cosas opuestas debemos usar dos clases de números que llamaremos números *opuestos*[8], cada clase se comporta como los números naturales o racionales que conocemos cuando se suman o restan entre ellos de la manera usual, pero abren nuevas posibilidades cuando se mezclan; por ejemplo al juntar dos números que representen la misma cantidad pero que *sean de clase diferente se eliminan unos a otros.*

[8]Es más usual el nombre de *números negativos y positivos*, pero esta connotación es peyorativa; lo negativo se asocia con lo malo, adicionalmente los números negativos se dibujan en el lado izquierdo de la recta numérica, y también la izquierda es siniestra, lo siniestro es malo, la izquierda es la revolución y la derecha es el orden, el estudio de la ley se llama derecho, etc. La primera vez que en el renacimiento aparece un número negativo aislado en una ecuación algebraica es en la obra *Triparty*, del matemático francés Nicolás Chulet, escrita en 1484.

2.1. Operaciones con Números Opuestos

2.1.1. Adición

Cuando tenemos números del mismo tipo y los sumamos obtenemos números del mismo tipo, así:

$$\mathbf{12454} + \mathbf{325} = \mathbf{12779}$$
$$\mathbf{458,\ 2} + \mathbf{500,\ 4} = \mathbf{958,\ 6}$$

y

$$1352 + 4581 = 5933$$
$$432,1 + 123,4 = 555,5$$

La regla de combinación de los dos tipos de números es: cuando las cantidades o las magnitudes sean las mismas pero de diferente tipo las dos se eliminan, y obtenemos 0 como resultado[9]:

$$\mathbf{75} + 75 = \mathbf{0}$$

Pero, cuando sumamos números de diferente tipo[10] obtenemos:

$$\mathbf{1235} + 325 = \mathbf{910}$$

[9]El número 0 está en ambos conjuntos y por lo tanto lo podemos escribir rojo o negro, indistintamente.

[10]En sus *Elementos de Álgebra* de 1746, Clariaut establece: Uno se imagina un libro de cuentas en el cual se escribe en una columna los gastos, en otra los ingresos, *cuidando sobre todo no mezclarlos*. "Se preguntará quizás si se puede sumar negativo con positivo, o más bien, *si se puede decir que se suma algo negativo*. A lo que yo respondo que *esa expresión es exacta cuando no se confunde sumar con aumentar*. Que dos personas, por ejemplo, sumen sus fortunas, cualesquiera que sean estas, yo diría que esto significa sumar sus bienes; que uno tenga deudas y efectos reales, si las deudas superan a los efectos, significa que lo que tiene es negativo; y la unión de esta fortuna con la del primero disminuirá los bienes de éste, de manera que la suma será menor que lo que poseía el primero, o incluso, enteramente negativa."

y esto equivale a:

$$= 1235 - 325$$

porque 325 elimina **325** de los **1235**.

Como la cantidad que representa el número negro es mayor a la del número rojo, entonces el resultado es un número negro, lo mismo sucede si el número rojo es mayor:

$$\mathbf{1452} + 3745 = 2293$$

lo que equivale a:

$$= 3745 - 1452$$

El resultado final es equivalente a restar el número menor del mayor, como si fueran de la misma clase y la diferencia es de la misma clase del número mayor[11].

¿Es cierto, en general, que

$$\mathbf{a} + b = b + \mathbf{a}$$
$$\mathbf{a} + b = \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

y

$$b + \mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{a}?$$

[11]Cardano en su *Ars Magna* de 1545, insiste: "Es un sencillo consejo no confundir las cantidades defectuosas (ausentes) con las cantidades abundantes. Es preciso añadir entre sí las cantidades abundantes, añadir también entre sí las cantidades defectuosas, y restar las cantidades defectuosas de las abundantes, pero teniendo en cuenta las especies, es decir, no operar más que con semejantes; combinar los números entre sí, lo mismo con los cuadrados, e incluso con los cubos, etc."

2.1.2. Sustracción

Si restamos dos números de la misma clase y la resta es posible en el sentido de los números naturales, esto es que el minuendo es mayor o igual al sustraendo, la situación es ya conocida y la solución es la misma:

$$\mathbf{325} - \mathbf{215} = \mathbf{110}$$
$$548 - 324 = 224$$

Si suponemos que las operaciones entre números rojos y negros tienen las mismas propiedades que las de los números racionales positivos, podemos entonces efectuar sustracciones donde el minuendo es mayor que el sustraendo, recurriendo al truco de escribir:

$$\begin{aligned} \mathbf{325} - \mathbf{847} &= \mathbf{325} - \mathbf{847} + \mathbf{0} \\ &= \mathbf{325} - \mathbf{847} + (\mathbf{847} + 847) \\ &= \mathbf{325} + (\mathbf{847} - \mathbf{847}) + 847 \end{aligned}$$

lo que nos lleva a una situación que ya sabemos resolver.

$$= \mathbf{325} + 847 = 522$$

O sea, que cuando restamos números de la misma clase y el minuendo es menor que el sustraendo, la diferencia es un número de la clase opuesta. Y un resultado sorprendente

$$\mathbf{0} - \mathbf{4} = 4$$

No, como decía Pascal[12] que **0 - 4** = **0**.

Pero, con el mismo truco también podemos restar números de clases diferentes, por ejemplo, para efectuar:

$$3 - \mathbf{5}$$

sumamos 0 en forma de un par de números de la misma magnitud pero de diferente tipo, para que las sustracciones usuales sean posibles, en nuestro caso:

[12]Pascal (1623 - 1662), en sus "Pensamientos" afirma: "*Demasiada verdad nos asombra; yo sé que no pueden comprender que, a quien de cero resta cuatro, le queda cero*".

$$\begin{aligned} 3 - \mathbf{5} &= \mathbf{0} + (3 - \mathbf{5}) \\ &= (5 + \mathbf{5}) + (3 - \mathbf{5}) \end{aligned}$$

y si insistimos en que estos números cumplan por lo menos con las mismas propiedades de los números naturales y racionales, entonces

$$\begin{aligned} 3 - \mathbf{5} &= (\mathbf{5} - \mathbf{5}) + (5 + 3) \\ \mathbf{5} - \mathbf{5} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

y

$$5 + 3 = 8$$

de donde podemos conjeturar que:

$$3 - \mathbf{5} = 8$$

de la misma forma obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{3} - 2 &= 0 + (\mathbf{3} - 2) \\ &= (\mathbf{2} + 2) + (\mathbf{3} - 2) \\ &= (2 - 2) + (\mathbf{2} + \mathbf{3}) \\ &= \mathbf{5} \end{aligned}$$

y también podemos efectuar:

$$\begin{aligned} 5 - 8 &= (\mathbf{8} + 8) + (5 - 8) \\ &= 5 + \mathbf{8} = \mathbf{3} \end{aligned}$$

Los números naturales, ni los racionales solos, pueden expresar esta idea de oposición, lo que hace necesario emplear números de dos tipos.

2.1.3. Multiplicación

Hasta ahora los dos tipos de números estudiados tienen un comportamiento igual que los números racionales que conocemos y en particular de los números naturales, en lo que respecta a las operaciones de suma y resta cuando se opera al interior de cada uno, y cuando se operan entre ellos. *Convengamos* que un tipo de números, por ejemplo *los normales representan los números naturales o racionales convencionales.*

Así, la multiplicación

$$3 \times 5$$

significa, como en los números naturales,

$$3 \times 5 = 5 + 5 + 5 = 15$$

y de la misma forma podemos asumir que

$$3 \times \mathbf{5} = \mathbf{5} + \mathbf{5} + \mathbf{5} = \mathbf{15}$$

Pero ¿cuál significado le asignamos a

$$\mathbf{5} \times 3?$$

podemos, como en ocasiones anteriores, y *para que la multiplicación de estos números sea conmutativa*, decir que

$$\mathbf{5} \times 3 = 3 \times \ \mathbf{5}.$$

O sea

$$5 \times \mathbf{3} = \mathbf{5} + \mathbf{5} + \mathbf{5}$$

que, curiosamente, coincide con

$$5 \times \mathbf{3} = \mathbf{3} + \mathbf{3} + \mathbf{3} + \mathbf{3} + \mathbf{3} = \mathbf{15}$$

Pero el caso que no tiene interpretación directa es

$$\mathbf{3} \times \mathbf{5} = \mathbf{?}$$

Para abordar este caso, necesitamos acudir de alguna forma a los números normales que son los que para nosotros tienen significado, por ejemplo podemos sumar 0, en forma de:

$$\mathbf{3} \times \mathbf{5} = \mathbf{3} \times \mathbf{5} + (\mathbf{15} + 15)$$

y expresar

$$\begin{aligned} \mathbf{15} &= 3 \times \mathbf{5} \\ 15 &= 3 \times 5 \end{aligned}$$

Para obtener

$$\mathbf{3} \times \mathbf{5} = \mathbf{3} \times \mathbf{5} + (3 \times \mathbf{5}) + (3 \times 5)$$

y si, como venimos haciendo, *suponemos que para estos números también se cumple la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, y la propiedad asociativa de la suma*, obtenemos:

$$\mathbf{3} \times \mathbf{5} = (\mathbf{3} \times \mathbf{5} + 3 \times \mathbf{5}) + 3 \times 5$$

o lo que es igual,

$$\mathbf{3} \times \mathbf{5} = \mathbf{5}(3 + \mathbf{3}) + (3 \times 5)$$

con el sorprendente resultado!

$$\mathbf{3} \times \mathbf{5} = \mathbf{5} \times 0 + 15 = 15$$

El truco puede parecer artificial, pero es indudable que funciona.

Y no se crea que el truco es invento nuestro; históricamente, este resultado también tuvo dificultades para ser aceptado, por ejemplo August De Morgan objetaba:

Si suponemos que las cantidades negativas corresponden con las deudas de un hombre, ¿cómo se explica que multiplicando 10 000 pesos de deuda, por otra deuda de 500 pesos, este hombre tendrá o llegará a tener una fortuna de cinco millones de pesos?

La mismas cantidades negativas fueron rechazadas durante largo tiempo; por ejemplo, "el matemático inglés Francis Maseres (1731-1824), miembro del Clare College en Cambridge y miembro de la Royal Society, quien escribió ensayos aceptables en matemáticas y un tratado sustancial sobre la teoría de seguros de vida, publicó en 1759 su *Dissertation on the use if the negative sign in Álgebra* (Disertación sobre el uso del signo negativo en álgebra), donde muestra cómo evitar los números negativos (excepto para indicar la sustracción de una cantidad mayor de una menor), y en particular de ecuaciones cuadráticas de tal forma que aquellas con raíces negativas son consideradas separadamente; y , por supuesto, las raíces negativas deben ser rechazadas. El hace lo mismo con las cúbicas. Más adelante dice de las raíces negativas:

[...] sirven únicamente, en lo que yo puedo juzgar, para confundir toda la doctrina de ecuaciones y para volver en cosas oscuras y misteriosas las que son en su propia naturaleza excesivamente simples y ordinarias [...]. Se debería desear, por lo tanto, que las raíces negativas nunca hubieran sido admitidas dentro del álgebra o que fueran, de nuevo, descartadas de ella; ya que, si esto fuera hecho, hay razón de sobra para imaginar que las objeciones que muchos hombres cultos e ingeniosos ahora hacen de los cómputos algebraicos, como ser oscurecidos y confundidos con nociones casi inteligibles, serían por consiguiente suprimidas; siendo inevitable que el álgebra o la aritmética universal sea, por su propia naturaleza una ciencia no menos simple, clara y capaz de demostración que la geometría"[13].

Con respecto a las cantidades negativas, Descartes en *La Geometría* de 1637, afirma:

"A menudo ocurre que algunas de estas raíces, de una ecuación, *son falsas, o menores que nada*, como si se supusiese que x designa también el defecto de una cantidad, que si es 5, se tiene que

$$x + 5 = 0,$$

[13]KLEIN, M., *op. cit.*

que si (esta ecuación) es multiplicada por

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$$

se convierte en

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

una ecuación, en la cual hay cuatro raíces, a saber, tres verdaderas que son 2, 3, 4, y una falsa que es 5".

Augustus De Morgan en 1831, profesor de matemáticas en el University College de Londres, famoso matemático y con trabajos en álgebra , en su *On the Study and Difficulties of Mathematics* (Sobre el estudio y dificultades de las matemáticas) dijo: ante las soluciones negativas de un problema[14] :

"La expresión imaginaria $\sqrt{-a}$ y la expresión negativa[15] $-b$ se parecen en que cada una de ellas, cuando aparece como solución de un problema, indica que hay alguna inconsistencia o absurdo. En lo que respecta a la realidad de su significación, las dos son igualmente imaginarias puesto que $0 - a$ es tan inconcebible como $\sqrt{-a}$".

Mac Laurin en su *Tratado de las Fluxiones de* 1742, dice: "El uso del signo negativo en álgebra da lugar a varias consecuencias, en principio, difíciles de admitir y han ocasionado ideas que parecen no tener ningún fundamento real".

Y sin embargo, argumenta, "si

$$(+a) - a = 0$$

entonces podemos multiplicar esta igualdad por cualquier cantidad, y el producto debe ser 0; si lo multiplico por n, tendría por primer término $+na$, y

[14]KLEIN, M., *op. cit.*

[15]Las letras escritas en letra normal representan los números normales o en negrilla.

por segundo $-na$, puesto que es preciso que los dos términos se cancelen. Así que los signos diferentes dan $-$ para el producto.

Pero si multiplicamos por $-n$, por el caso anterior, tendremos $-na$ para el primer término; por tanto tendremos $+na$ para el segundo, puesto que es necesario que los dos términos se cancelen: en consecuencia $-$ multiplicado por $-$ da $+$ en el producto".

El matemático flamenco Simón Stevin (1548 - 1620), recurre a una interpretación geométrica: En el rectángulo de la figura

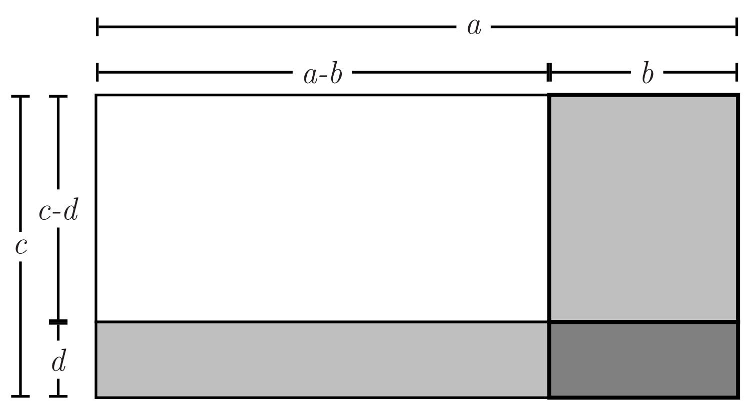

Figura 1

tenemos que el área del rectángulo blanco es

$$(a-b)(c-d)$$

que se puede escribir como el área del rectángulo mayor menos el área de los rectángulos lateral e inferior, más el área del rectángulo de intersección que fue restado dos veces, o sea:

$$ac-bc-ad+bd$$

lo que significa que:

$$(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$$

y por lo tanto

$$(-b)(-d) = (b)(d).$$

Euler, por su parte dice:

"Nos queda aún por resolver el caso en que $-$ es multiplicado por $-$, por ejemplo,

$$-a \text{ por } -b.$$

Es evidente en principio que en cuanto a las letras, el producto será ab; pero es incierto aún si el signo que debe ponerse delante de este producto es + o bien -; todo lo que sabemos es que será uno de estos dos signos.

Ahora bien, digo, que éste no puede ser el signo -; pues $-a$ por $+b$ da $-ab$ y $-a$ por $-b$ no puede producir el mismo resultado que $-a$ por $+b$; en consecuencia tenemos la regla: + multiplicado por + produce +, igual que - multiplicado por -".

Estas son reglas para manejar signos, pero sólo hay cantidades negativas, designadas por un número positivo, y precedido de un signo -. No se trata de números negativos.

Cauchy a comienzos del siglo XIX insiste en definir una regla para operar sobre los símbolos + y -, y no sobre números negativos.

"A partir de estas convenciones, si se representa por A tanto sea un número como una cantidad cualquiera, y hagamos: $a = +A$, $b = -A$ Se tendrá: $+a = +A$, $+b = -A$, $-a = -A$, $-b = +A$

Si en las cuatro últimas ecuaciones se sustituye a y b por sus valores entre paréntesis, se obtendrán las fórmulas:

$$+(+A) = +A; +(-A) = -A; -(+A) = -A; -(-A) = +A$$

En cada una de estas fórmulas el signo del segundo miembro es lo que se llama el producto de los dos signos del primero. Multiplicar dos signos uno por otro es formar su producto. Es suficiente la observación de la fórmula para establecer la regla de los signos".

Cauchy usa el hecho de que el opuesto del opuesto es el número mismo; pero no hace consideraciones sobre el producto de números negativos.

Cuando Herman Hankel alrededor de 1867, en su obra *Teoría del sistema de los números complejos*, establece que "la condición para construir una aritmética universal es, la de una matemática intelectual, separada de todo tipo de percepciones sensibles y afirma que la matemáticas son una creación humana, y por tanto sus conceptos no se deducen de manera empírica, sino que son construcciones intelectuales y como tales, *no han sido descubiertas sino inventadas*; que el número no es una cosa, una sustancia que exista independientemente fuera del sujeto o de los objetos que los causan; que no es un principio independiente como creyeron los pitagóricos; que matemáticamente una idea es imposible en sentido estricto solamente si es lógicamente imposible, es decir que implique una contradicción y que si los números considerados son lógicamente posibles, si su concepto está definido de forma clara, si es libre de toda contradicción, la cuestión no puede ser, el saber si existe en el dominio de lo real o en lo que es intuitivo; formula el principio de permanencia de las leyes formales, que establece un criterio para ampliar el concepto de número:

1. La palabra número responderá a símbolos o agregados de símbolos que no necesariamente representan números del campo numérico previamente dado o conocido; sino que su significado puede ser cualquiera.

2. Se definirán para el nuevo campo numérico las operaciones fundamentales de la aritmética (adición y multiplicación) y el concepto de igualdad, de manera que se conserven las definiciones en el campo menos amplio como caso particular de las nuevas definiciones y que subsistan las leyes fundamentales de uniformidad, asociativa, conmutativa, distributiva y conservación del elemento neutro.

Y con eso abrió el camino para que los números negativos fueran admitidos y ocuparan un sitio reconocido dentro de las matemáticas, aunque no tuvieran una definición rigurosa y explicita. Sólo eran símbolos con los que se operaba respetando unas leyes preestablecidas.

Hankel propone esta explicación:

$$0 = a \times 0 = a \times (b + op\, b) = a\, b + a \times (op\, b)$$
$$0 = 0 \times (op\, b) = (a + op\, a) \times (op\, b) = a \times (op\, b) + (op\, a \times op\, b)$$

por lo tanto

$$(o\,p\,a) \times (o\,p\,b) = a\,b.$$

Debieron pasar más de 1.000 años entre la aparición y la aceptación de los números negativos, fue necesario que los matemáticos abandonaran la necesidad de descubrirlos en la naturaleza y comenzar a verlos como creaciones intelectuales, luego de esto se vio que los negativos solo provienen de leyes lógicas y aritméticas. Con esto se modificó la creencia de que las matemáticas constituían un cuerpo de verdades acerca de la naturaleza y se produjo una ruptura entre el mundo de las matemáticas y el mundo real. Hamilton, en 1835, en su obra: *Theory of conjugate functions; on álgebra as the science of Pure Time*, insiste en la dificultad para comprender los números negativos y en particular las reglas de los signos del producto, y sugiere permanecer en un dominio puramente formal, y evitar toda referencia al mundo físico.

Al contrario, insiste, que en el dominio de la geometría, es esta referencia al mundo físico lo que nos permite admitir, sin discusión, por ejemplo, el quinto postulado de Euclides sobre las paralelas. El postulado de las paralelas es admitido por todos sin discusión, porque puede "verificarse"físicamente todos los días; la regla de los signos, por el contrario, choca contra el sentido común, por lo tanto demanda una justificación sólida.

De todo lo expuesto podemos inferir que las reglas que usamos para manejar números opuestos a los números naturales, se pueden usar para los opuestos de los números racionales, pues los argumentos no dependen de la naturaleza de los números, sino de sus propiedades.

2.1.4. División

La división es sólo otra manera de escribir la multiplicación y por lo tanto, podemos inferir las reglas para la división de la de aquella, por ejemplo:

$$8 \div 2 = 4 \text{ es otra forma de decir que } 4 \times 2 = 8$$

similarmente[16],

$$\begin{aligned} 8 \div \mathbf{2} &= \mathbf{4} \text{ porque } \mathbf{4} \times \mathbf{2} = 8 \\ \mathbf{8} \div 2 &= \mathbf{4} \text{ porque } \mathbf{4} \times 2 = \mathbf{8} \\ \mathbf{8} \div \mathbf{2} &= 4 \text{ porque } 4 \times \mathbf{2} = \mathbf{8} \end{aligned}$$

Y lo mismo vale con decimales, puesto que

$$\mathbf{3} \div 2 = \mathbf{1.5} \text{ es lo mismo que decir } \mathbf{1.5} \times 2 = \mathbf{3}.$$

De la misma forma, concluimos que:

$$\mathbf{3}/2 + 3/2 = (\mathbf{6} + 6)/4 = 0/4 = 0.$$

2.2. Una Relación de Orden

Para dar significado a las relaciones de "ser mayor que"o "ser menor que", notamos Q al conjunto de los números racionales positivos y $\boldsymbol{Q}$ al de sus números opuestos y, de nuevo, separamos los casos:

El primer caso ya está resuelto:

$$a < b \quad \text{si y sólo sí, existe un} \quad c \in Q \quad \text{tal que} \quad a + c = b.$$

pues los números normales son los racionales positivos que conocemos.

Para comparar un número en negrilla con uno normal, establecemos con el mismo criterio[17] anterior que:

[16] Antoine Arnauld un teólogo amigo de Pascal dice, a propósito de la igualdad

$$\frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$$

¿Cómo un número más pequeño podría ser a uno más grande como una más grande a uno más pequeño?

[17] ¿Qué sucede si escogemos $c \in \mathbf{Q}$?

$$\mathbf{a} < b \quad \text{si y sólo sí, existe un} \quad c \in Q \quad \text{tal que} \quad \mathbf{a} + c = b.$$

y tenemos que siempre existe $c = b + a$, que cumple la condición; de manera que *todos lo números en negrilla son menores que todos los números normales.*

Si queremos comparar el normal con el de negrilla, con el mismo criterio, obtendremos que

$$a < \mathbf{b} \quad \text{si y sólo sí, existe un} \quad c \in Q \quad \text{tal que} \quad a + c = \mathbf{b}.$$

pero esta situación no se presenta, pues la suma de dos números normales siempre es un número normal, nunca uno en negrilla.

Y finalmente cuando comparemos dos números en negrilla, obtenemos que

$$\mathbf{a} < \ \mathbf{b} \quad \text{si y sólo sí, existe un} \quad c \in Q \quad \text{tal que} \mathbf{a} + c = \ \mathbf{b}.$$

2.2.1. Propiedades del orden

Observemos que en el conjunto formado por los números racionales positivos, los opuestos de ellos y el 0, el criterio para decidir, cuándo un número cualquiera, es menor que otro, es que exista un número normal que sumado con el menor nos de el mayor.

Para demostrar que esta relación es *transitiva* debemos probar que dados números cualesquiera a, b y c, si se cumple que $a < b$ y también se cumple que $b < c$ entonces se cumple que $a < c$.

Demostración. Si se cumple que $a < b$ entonces existe un número k tal que $a + k = b$, y si además se cumple que $b < c$, existe también un número d tal que $b + d = c$.

Si reemplazamos b en la segunda igualdad, obtenemos:

$$(a + k) + d = c$$

suponiendo la propiedad asociativa de la adición, la igualdad se convierte en

$$a + (k + d) = c$$

lo que significa que $a < c$, puesto que $(k + d)$ es un número normal.

También sabemos ya que, para dos números diferentes cualesquiera, *sólo se tiene una de las situaciones siguientes,*

$$a < b \quad \text{ó} \quad b < a$$

puesto que si

$$a < b \quad \text{entonces existe un número } k \text{ tal que} \quad a + k = b,$$

y si además se cumple que

$$b < a, \quad \text{existe también un número } d \text{ tal que} \quad b + d = a.$$

Por lo tanto

$$(a + k) + d = a$$

lo que implicaría que

$$k + d = 0$$

lo cual es imposible. □

También se cumple la propiedad de *monotonía de la adición*, que establece: dados números cualesquiera a, b, c y d, si

$$a < b \quad \text{y} \quad c < d \quad \text{entonces} \quad a + c < b + d$$

Demostración. Si

$$a < b \quad \text{entonces existe un número } k \text{ tal que} a + k = b,$$

y si además

$$c < d, \quad \text{existe un número } n \text{ tal que} \quad c + n = d.$$

Si sumamos las dos igualdades, obtenemos:

$$(a+k)+(c+n)=b+d$$

y suponiendo las propiedades conmutativa y asociativa de la adición, la anterior igualdad toma la forma

$$(a+c)+(k+n)=b+d$$

lo que significa que

$$a+c<b+d.$$

□

Dejamos como ejercicio que el lector demuestre la propiedad monótona de la multiplicación por números normales:

Dados números cualesquiera a, b y c, si

$$a<b \quad \text{entonces} \quad a \cdot c<b \cdot c$$

y si $\boldsymbol{d}$ es un número en negrilla y

$$a<b \quad \text{entonces} \quad b \cdot \mathbf{d}<a \cdot \ \mathbf{d}$$

Este comportamiento diferente de los números en negrilla con respecto a los normales, también generó protestas en el mundo matemático de los siglos XVII, XVIII y XIX, por ejemplo Wallis (1616 - 1703) afirma: "Si a es un número positivo, y b un número negativo, el cociente $\dfrac{a}{b}$ es más grande que el infinito; por ser el denominador más pequeño que 0, pero el resultado, a su vez, es menor que 0 por ser negativo"

Tampoco se entendía ¿cómo si

$$-3<2$$

es posible que

$$(-3)^2>(2)^2 \text{ ?}$$

a no ser que los números negativos no se comporten como los positivos y sea necesario establecer nuevas reglas.

¿Hay diferencias entre los dos tipos de números: en negrilla y normales, positivos y negativos? o ¿existe algo que caracterice la positividad?

¿Podemos cambiar números en negrilla por normales y viceversa, o negativos por positivos y viceversa, o definitivamente lo negativo si existe, existen el bien y el mal o sólo son puntos de vista?

Sabemos que si sumamos números del mismo tipo el resultado es del mismo tipo, si sumamos dos números de distinto tipo el resultado es del tipo del mayor, si restamos dos del mismo tipo y el minuendo es menor que el sustraendo, la diferencia es del tipo opuesto; hasta aquí, no hay diferencia.

Pero, si multiplicamos dos normales, el resultado es normal y si multiplicamos dos en negrilla el resultado es un número normal! Ahí está la diferencia!

Diremos que un conjunto es de *números positivos* si tanto la suma como el producto de ellos es un elemento de ellos mismos, y el conjunto de todos los números está formado por el conjunto de los números positivos, el conjunto de sus opuestos y el 0.

En síntesis nuestros números normales son los números positivos, *aunque pudimos haber elegido desde el comienzo que fueran los números en negrilla!*

Bibliografía

[1] C. Boyer, *Historia de la matemática*, Alianza Universidad, 1987.

[2] R. Descartes, *La Geometría*, Espasa, 1947.

[3] Euclid., *The thirteen Books of the Elements*, vol 1, Books I and II, Dover, 1956.

[4] J. González, et. al., *Números enteros*, Editorial Síntesis, Madrid, 1990.

[5] M. Kline, *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Vol II, Alianza Universidad, 1994.

[6] C. Luque, L. Mora, y J. Paéz, *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Contar e Inducir*, Ediciones Antropos, Universidad Pedagógica Nacional, 2002.

[7] C. Luque, L. Mora, *Una aproximación a los números racionales positivos,* Universidad Pedagógica Nacional, 2003.

[8] C. Luque, L. Mora, J. Torres, *Una construcción de los números reales positivos*, Universidad Pedagógica Nacional, 2003.

[9] J. Newman, *Sigma, el Mundo de las Matemáticas*, Barcelona, Grijalbo, 1994.

[10] L. Ryder, *Quantum field theory*, Cambridge, 1984.

[11] R. Serway, *Física*, Tomo 1, 4 Edición, McGraw Hill, 1998.