

# ANÁLISIS DIDÁCTICO Y FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES: ORGANIZACIÓN DE COMPETENCIAS Y CAPACIDADES DE LOS ESCOLARES EN EL CASO DE LOS NÚMEROS DECIMALES<sup>1</sup>

**Jose Luis Lupiáñez, Luis Rico**

Universidad de Granada

## Resumen

*En este trabajo describimos brevemente un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en el que usamos un significado preciso de los términos capacidad y competencia. Presentamos un procedimiento por el cual un grupo de futuros profesores reflexionan sobre el aprendizaje, y usan esas nociones cuando abordan la planificación de una unidad didáctica sobre números decimales.*

## Abstract

*In this paper we briefly describe a Secondary Mathematics Teacher Training Program in which we use a specific meaning for the notions of ability and competence. We present a procedure with which a group of prospective teachers can reflect on learning in the classroom and use these notions for planning didactical units about decimal numbers.*

En la Universidad de Granada se imparte una materia orientada a la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, cuya finalidad principal es que los futuros profesores adquieran y empleen conocimientos para diseñar unidades didácticas sobre un tema matemático concreto. Para el diseño de unidades didácticas esperamos que los futuros profesores pongan en juego un procedimiento denominado *análisis didáctico* (Gómez, 2002). Parte de ese análisis consiste en establecer, analizar y organizar las capacidades y competencias que los futuros profesores esperan desarrollar en los escolares en torno a ese tema matemático. En este trabajo presentamos cómo se organiza y se lleva a cabo esa parte del análisis didáctico.

Describiremos brevemente el procedimiento del análisis didáctico como noción central del programa de formación inicial, analizaremos el significado que le damos a los términos capacidad y competencia en ese marco, y mostraremos cómo los futuros profesores usan esas nociones para organizar el aprendizaje de sus escolares y diseñar tareas de aprendizaje.

## 1. Análisis Didáctico en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria

El análisis didáctico es un procedimiento cíclico que describe cómo el profesor debería idealmente diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje. Se puede articular en cuatro fases: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación (Gómez, 2002, pp. 262-285).

El análisis de contenido es el procedimiento en virtud del cual el profesor identifica, organiza y selecciona los significados de un tema matemático que considera relevantes a efectos de la

---

<sup>1</sup> Este trabajo se ha realizado en el seno del Grupo de Investigación “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” (FQM-193), del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía.

planificación de la instrucción. El análisis cognitivo, desde un planteamiento constructivista (Coll, 2002), capacita a los futuros profesores para que, a partir de la información obtenida en el análisis de contenido previo y del conocimiento sobre matemáticas escolares y sobre su aprendizaje, enuncien y organicen las capacidades que ellos esperan que desarrollen los escolares de secundaria sobre ese tema matemático. También analizan la contribución que realizan esas capacidades al desarrollo de competencias matemáticas globales. En Lupiáñez, Rico, Gómez y Marín (2005) hemos desarrollado un procedimiento que permite a los futuros profesores llevar a cabo estos dos aspectos del análisis cognitivo, que describiremos y ejemplificaremos más adelante en el caso de un grupo de profesores que lo aplicaron para una planificación sobre números decimales. En el análisis cognitivo, los profesores en formación también llevan a cabo un estudio de errores y dificultades, si bien no entraremos en este trabajo en su descripción.

Dado que los términos capacidad y competencia constituyen un organizador central del plan de formación inicial de profesores, a continuación caracterizamos el significado que asumimos en el marco del análisis cognitivo.

## 2. Capacidades y Competencias Matemáticas

En la actualidad existe una marcada preocupación por establecer los fines y metas de la educación en términos de las *competencias* que deberían desarrollar los estudiantes al término de su formación, tanto en el periodo obligatorio como durante la educación superior. En proyectos recientes como PISA (OCDE, 2005) se ha empleado el término competencia para expresar lo que deberían lograr los estudiantes al término de su Educación Obligatoria. Por tanto, competencia se refiere a objetivos a largo plazo que debieran ser observables al término de todo un ciclo de enseñanza. Esta caracterización nos permite relacionar las nociones de competencia y capacidad.

Partimos de la noción de capacidad. En el contexto de las matemáticas escolares, utilizamos este término para referirnos a la actuación de un estudiante con respecto a cierto tipo de tarea. Esta noción es coherente con las posiciones de Grant (1996) y Schulze (1994), que relacionan capacidad con los conocimientos, experiencias y habilidades necesarias para desarrollar una tarea o actividad (Gómez y Lupiáñez, en prensa).

Por tanto, las capacidades relacionan los aspectos cognitivo, de contenido y de instrucción pues son específicas a un tema concreto, pueden incluir o involucrar otras capacidades, y están vinculadas a tipos de tareas (Figura 1):

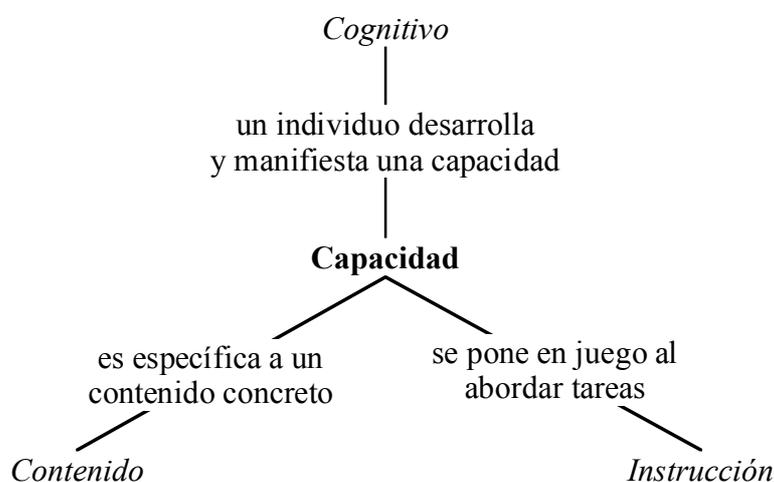


Figura 1. Relaciones de la noción de capacidad (Gómez y Lupiáñez, en prensa).

Las capacidades se desarrollan y movilizan por medio de las actuaciones de los escolares cuando resuelven tareas. Pero al ir desarrollando capacidades relativas a diferentes temas matemáticos, los escolares se hacen paulatinamente más competentes en matemáticas. Esta relación entre competencias, capacidades y tareas se describe en la Figura 2:

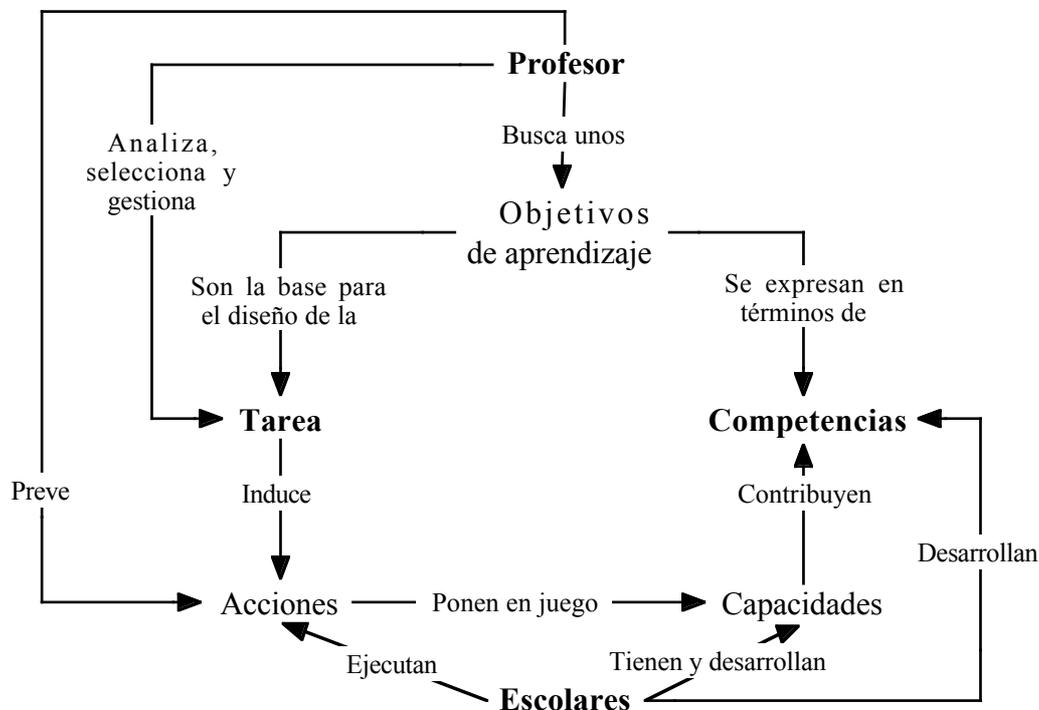


Figura 2. *Relación entre competencias, capacidades y tareas.* (Gómez y Lupiáñez, en prensa).

En el proyecto PISA, el ser competente en matemáticas es un objetivo a largo plazo que se conseguirá a través de toda la formación escolar obligatoria. En la evaluación que se llevó a cabo, se enfrentó a los escolares a problemas en diferentes contextos y situaciones, y para resolverlos debían activarse diversas competencias matemáticas. Las competencias caracterizadas fueron: *pensar y razonar, argumentar, comunicar, modelizar, plantear y resolver problemas, representar, y utilizar lenguaje simbólico, formal y técnico, y operaciones.* (Rico, 2005).

### 3. Capacidades y Competencias en el Análisis Cognitivo

“En el análisis cognitivo los futuros profesores describen sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento cuando se enfrenten a las tareas que componen la instrucción sobre un tema matemático concreto” (Gómez, 2002, p. 271). Este análisis implica, entre otros aspectos, describir y relacionar:

- las capacidades que los escolares tienen antes de la instrucción;
- qué capacidades deben desarrollar los escolares;
- la contribución de esas capacidades al desarrollo de competencias matemáticas;
- los posibles grados de desarrollo de esas competencias;

Para describir las capacidades que se espera que el escolar desarrolle durante la implementación de la unidad didáctica, hay que delimitar y concretar el nivel educativo al que se dirige esa planificación. Una revisión curricular en ese nivel permite delimitar unas prioridades de contenidos, de objetivos y de aspectos a evaluar. Pero sólo es posible concretar las capacidades que se desea que los escolares desarrollen cuando, después de haber realizado el análisis de contenido, se han identificado, organizado y seleccionado los significados relevantes del tema matemático en cuestión (Gómez y Lupiáñez, en prensa).

La Tabla 1 recoge un ejemplo de capacidades relativas al tema de los números decimales para escolares de 4º de ESO. Este ejemplo ha sido realizado por un grupo de profesores en formación en el programa de formación desarrollado en el curso 2005-06:

CAPACIDADES		PR	AJ	C	M	RP	R	LS
1	Expresar un número decimal en potencia de 10	X		X		X		X
2	Leer y escribir los números decimales	X		X				X
3	Reconocer y clasificar distintos tipos de números decimales				X	X		
4	Realizar operaciones básicas con números decimales					X	X	
5	Ordenar distintos números decimales y representarlos en la recta real	X				X		
6	Aproximar y redondear números decimales	X	X			X		
7	Saber aplicar los algoritmos de transformación: 1. Pasar de fracción a decimal 2. Pasar de decimal a fracción 3. Utilizar porcentajes tanto en forma decimal como fracción				X		X	X
8	Manejar la notación científica							X
9	Utilizar y reconocer números decimales en situaciones reales	X		X	X	X		

Tabla 1. *Capacidades sobre números decimales y su contribución al desarrollo de competencias matemáticas.*

Cada una de las siete últimas columnas corresponde a las siete competencias caracterizadas en el estudio PISA. La contribución prioritaria de cada capacidad a las diferentes competencias se expresa poniendo una marca en la celda correspondiente. Esa marca indica si las capacidades se orientan a contribuir ó no al desarrollo de esas competencias. En Lupiáñez y Rico (2006) caracterizamos varios criterios para tomar esa decisión, que tienen que ver con el diseño curricular global de la asignatura, con las relaciones entre los diferentes significados descritos en el análisis de contenido previo, y con decisiones propias del profesor acerca de métodos de resolución, formas de razonamiento, etc. Esta asignación de capacidades a competencias se hace visible posteriormente en el diseño de tareas.

En resumen, este procedimiento brinda importante información sobre el tipo de aprendizaje que se persigue con las capacidades enunciadas, pues pone de manifiesto unas prioridades y énfasis acerca de lo que se pretende que los escolares aprendan. Al mismo tiempo, sienta las bases para el posterior diseño de las tareas que harán parte de la instrucción.

#### 4. Clasificación de Tareas y Niveles de Desarrollo de Competencias

Hasta ahora hemos sostenido que los objetivos de aprendizaje acerca de un tema de matemáticas pueden describirse en términos de capacidades. Esas capacidades se movilizan, desarrollan, y evalúan según las diferentes tareas que los escolares pueden afrontar. Pero es

posible diseñar tareas de diferente dificultad que están relacionadas con el mismo grupo de capacidades, y que sin duda amplían la posibilidad de promover el aprendizaje.

También hemos visto que los objetivos generales de la enseñanza de las matemáticas pueden describirse en términos de competencias. Esas competencias ponen de manifiesto el conocimiento que se posee acerca de las matemáticas y el uso que se le da al resolver problemas; a su desarrollo contribuyen las capacidades específicas sobre cada uno de los temas matemáticos. Pero un sujeto no tiene porqué ser totalmente competente o del todo incompetente en matemáticas. Entre ambos extremos hay todo un espectro de posibilidades.

En este apartado caracterizaremos diferentes tipos de tareas según su complejidad y distintos niveles de competencia, y ejemplificaremos su uso en el diseño de tareas sobre los números decimales.

### ***Clasificación de tareas***

La resolución de tareas pone en juego el conocimiento matemático de los escolares; promueve la ejecución de determinadas acciones; y exige determinadas demandas cognitivas a los que las afrontan. La Tabla 2 distingue esas demandas cognitivas según tres grados de complejidad de tareas (OCDE, 2005, p. 40). Las tareas de cada uno de esos bloques movilizan diferentes capacidades y por tanto contribuyen al desarrollo de diferentes competencias.

<b>REPRODUCCIÓN</b>	<b>CONEXIÓN</b>	<b>REFLEXIÓN</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Contextos familiares</li> <li>• Conocimientos ya practicados</li> <li>• Aplicación de algoritmos estándar</li> <li>• Realización de operaciones sencillas</li> <li>• Uso de fórmulas elementales</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Contextos menos familiares</li> <li>• Interpretar y explicar</li> <li>• Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación</li> <li>• Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Tareas que requieren comprensión y reflexión</li> <li>• Creatividad</li> <li>• Ejemplificación y uso de conceptos</li> <li>• Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos</li> <li>• Generalizar y justificar resultados obtenidos</li> </ul>

Tabla 2. *Clasificación de tareas según la complejidad de las capacidades que movilizan (estructurada a partir del documento OCDE [2005]).*

### ***Niveles de competencia***

Una vez realizada la evaluación de PISA, y según las diferentes respuestas que dieron los escolares a las tareas, para informar y analizar los resultados, se establecieron 6 niveles de competencia matemática (OCDE, 2005, p. 46). Cada uno de esos niveles está relacionado con capacidades que el alumno necesita para alcanzarlos. La Tabla 3 sintetiza esas capacidades para cada una de las siete competencias (C) y niveles (N):

<b>N C</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>
<b>PR</b>	Responder a cuestiones en contextos muy conocidos		Responder a cuestiones en contextos poco familiares		Responder cuestiones complejas en multitud de contextos	Formar y relacionar conceptos
<b>A</b>				Elaborar argumentos basados en sus acciones	Formular razonamientos desarrollados	Elaborar argumentos desde su propia reflexión
<b>C</b>		Describir resultados obtenidos	Realizar explicaciones sencillas		Comunicar conclusiones con precisión	
<b>M</b>				Usar modelos explícitos en situaciones concretas	Desarrollar y usar modelos en múltiples situaciones	
<b>RP</b>	Resolver problemas con datos sencillos		Seleccionar y aplicar estrategias sencillas		Seleccionar, comparar y evaluar estrategias	Generalizar resultados de problemas
<b>R</b>	Leer datos directamente de tablas o figuras	Usar un único tipo de representación	Conocer y usar diferentes sistemas de representación	Vincular diferentes SR, incluyendo el simbólico		Relacionar y traducir con fluidez diferentes SR
<b>LS</b>	Realizar operaciones básicas	Usar algoritmos y fórmulas elementales	Aplicar procedimientos descritos con claridad	Representar situaciones reales mediante símbolos		Dominar con rigor el lenguaje simbólico

Tabla 3. *Capacidades asociadas de los seis niveles de competencias (estructurada a partir del documento OCDE [2005]).*

La Tabla 3 recoge, según las siete competencias descritas, cuáles son los descriptores básicos de las capacidades que dominan los escolares que se encuentran en cada uno de los seis niveles. El significado de una celda en blanco es que el escolar que se encuentre en un nivel de competencia determinada, no es capaz de realizar ninguna acción relacionada con la competencia correspondiente. Eso ocurre, por ejemplo, en el nivel 1. En este nivel, los escolares no son capaces de justificar sus hipótesis o resultados, ni siquiera de una manera poco formal.

Por otro lado, los niveles son acumulativos, en el sentido de que a medida que se aumenta el nivel de competencia, se entiende que se domina las capacidades propias de los niveles anteriores. Así por ejemplo, los escolares que estén en el nivel 5, no son capaces de relacionar y traducir con fluidez diferentes sistemas de representación, pero sí pueden leer información sencilla de tablas y figuras, resolver problemas usando diferentes sistemas de representación, etc. Estos descriptores permiten establecer el nivel de competencia que poseen los escolares en matemáticas, por lo que también constituye una potente herramienta desde el punto de vista de la evaluación.

Esta caracterización de los niveles de competencia y la clasificación de las tareas según su complejidad, constituye un esquema organizador para los futuros profesores que participan en nuestro programa de formación cuando se diseñan una unidad didáctica.

En el curso 2005-06, un grupo de estos futuros profesores, a partir del análisis de contenido que realizaron previamente, y del enunciado de las capacidades de la Tabla 1, usó este esquema para diseñar un conjunto de tareas sobre los números decimales. Mostramos algunas de esas tareas a continuación. Después de cada enunciado de tarea aparecen entre paréntesis las capacidades que ellos entendían que promovían, según la numeración de la Tabla 1.

### ***Tareas de reproducción***

Tarea 1. *Tenemos 5 euros para gastar. Si compramos 5 chupa-chups a 25 céntimos la unidad, y tres bolsas de pipas a 65 céntimos:*

a) *¿Cuánto nos hemos gastado?*

b) *¿Cuánto nos ha sobrado?*

c) *¿Cuántos chicles deberíamos comprar, sabiendo que el chicle cuesta 5 céntimos la unidad, para que nos devuelvan un número entero de euros? (C4, C9)*

Tarea 2. *Representa en la recta real los siguientes números: 3'45, 3'045 y 3'00045. (C5)*

El grupo de profesores en formación relacionó estas dos tareas con las competencias de pensar y razonar, plantear y resolver problemas y con la de representar. Dado que su planificación estaba dirigida a escolares de 4º de ESO, entendían que estas tareas eran de dificultad baja. Asimismo, afirmaron que para realizarlas, los escolares tendrían que estar en un nivel 1 o 2 de desarrollo de tales competencias.

### ***Tareas de conexión***

Tarea 3. *Al lavar una tela su longitud reduce a 0'1 m. y su anchura en 0'06 m. ¿Qué longitud debe comprarse de una pieza de 0'9 m. de ancho, para tener después de lavarla 10'5 m<sup>2</sup> de tela? (C3, C4, C9)*

Tarea 4. *Demuestra que  $0\overline{3} + 0\overline{6} = 1$ . Busca otros dos decimales periódicos cuya suma sea un número decimal exacto. (C3, C7)*

Tarea 5. *Expresa en forma fraccionaria los siguientes decimales periódicos:  $5\overline{3}$ ,  $5\overline{)32}$ ,  $0\overline{0)52}$ ,  $32\overline{41)331}$ . (C3, C7)*

Tarea 6. *Realiza la siguiente operación:  $1 + 0'5 + 1/2 + 0'33$ . (C4, C7)*

En este bloque de tareas, el grupo de profesores en formación señaló como principales competencias las de pensar y razonar, plantear y resolver problemas, argumentar y justificar, y representar. Ellos sostenían que la dificultad de estas tareas es superior a las del bloque anterior, pues aquí, además de introducir la necesidad de justificar respuestas, los escolares deben dominar los principales métodos de conversión de decimal a fracción. Por tanto, para resolver estas tareas los escolares deben estar entre un nivel 3 y 4 de desarrollo de las competencias señaladas.

### ***Tareas de reflexión***

Tarea 6. *Explica porqué toda fracción irreducible da lugar a un número decimal exacto, si el denominador sólo tiene los factores 2 y 5, o periódico si el denominador tiene algún factor distinto de 2 y 5. (C2, C3, C4)*

Tarea 7. *Divide entre 3 varios números menores que 10 y observa los resultados. ¿Qué ocurre al hacer esas divisiones?*

- a) *¿Puedes predecir las cifras decimales de los cocientes  $30:3$ ,  $31:3$  y  $32:3$  ?*
- b) *¿Cual será el valor de  $a$  para que  $a : 30 = 0\widehat{6}$  ?*
- c) *¿Cual será la parte decimal de  $a + 1:3$  y  $a + 2:3$  ? (C2, C3, C7)*

En estas dos últimas tareas, las principales competencias que se movilizan son las de argumentar y justificar, comunicar, y pensar y razonar, según el grupo de profesores en formación. En este caso la complejidad de los argumentos que se necesitan para resolver las tareas es mayor, ya que en algunos casos se requieren llevar a cabo procesos de conjetura y generalización. El nivel de desarrollo de esas competencias necesario para resolverlas está entre 5 y 6.

## 5. Conclusiones

La descripción de capacidades y su contribución al desarrollo de competencias que realizan los grupos de profesores en formación al llevar a cabo el análisis cognitivo, pone de manifiesto algunas potencialidades de esta técnica.

En primer lugar, permite a los grupos de futuros profesores establecer una relación entre el currículo global de todo un nivel educativo, con el nivel local relativo a un tema específico. Partiendo de las directrices expresadas en el currículo oficial de un nivel educativo, los profesores en formación establecen las capacidades que deben desarrollar los escolares de ese nivel en torno a un tema concreto, y describen en qué medida esas capacidades contribuyen a la formación matemática general de esos escolares en términos de competencias.

En segundo lugar, con esa descripción de capacidades los futuros profesores ya no tratan con la generalidad que tiene cualquier tema de matemáticas, sino que ese tema se concreta en una serie de actuaciones, enunciadas en términos de habilidades y destrezas, que se espera que los estudiantes dominen al finalizar el desarrollo de la unidad didáctica.

En tercer lugar, como parte de la planificación de una unidad didáctica, los futuros profesores, merced a esta descripción de capacidades, y a los niveles de desarrollo de las competencias, relacionan el análisis de contenido con el análisis de instrucción, desde dos puntos de vista:

- Por una parte, los profesores en formación disponen de criterios para estudiar, seleccionar y diseñar las tareas que habrán de resolver los escolares a lo largo de la implementación de la unidad didáctica. Si el objetivo es que los escolares lleguen a desarrollar ciertas capacidades, esa capacitación ha de mostrarse en la ejecución de tareas que muestren de qué son ó no capaces esos escolares. Por eso, las tareas que se planteen a los escolares han de tener en cuenta el uso del conocimiento matemático que se describe en la selección de capacidades a desarrollar.
- Por otra parte, al delimitar qué capacidades desean que desarrollen sus escolares, los futuros profesores están sentando las bases para el diseño de actividades de evaluación. Estas actividades deben permitirles valorar el grado de desarrollo de las capacidades que desean evaluarse.

En cuarto lugar, mediante la descripción de capacidades y competencias que realizan los profesores en formación, éstos hacen explícitas la manera que tienen de entender las matemáticas y de cómo se aprenden.

Al hacer balance de las competencias que se desean desarrollar, puede ocurrir que éstas pongan su énfasis en aspectos más formales de las matemáticas, como las de *pensar y razonar* o *usar lenguaje simbólico*. Pero puede ocurrir que sean los aspectos de modelización los que más se persigan, en cuyo caso se pone de manifiesto una visión más aplicada de las matemáticas.

Además, los futuros profesores también explicitan qué tipo de actuaciones han de promoverse en el aula para lograr el aprendizaje de sus escolares. Por ejemplo, si enfatizan el desarrollo de las competencias de *argumentar* y *comunicar*, están mostrando cierto acercamiento a una visión social del aprendizaje más que por una perspectiva individual del mismo.

Finalmente, el estudio de capacidades y competencias se integra en el conjunto de organizadores curriculares que conforman el análisis didáctico (Rico, 1997; Gómez 2002). Este desarrollo conceptual mejora el programa de formación inicial para profesores de matemáticas de secundaria, ampliando y relacionando las diferentes herramientas conceptuales y metodológicas que desarrolla.

## 6. Referencias

- Coll, C. (2002). Constructivismo y Educación: la Concepción Constructivista de la Enseñanza y el Aprendizaje. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Comp.). *Desarrollo Psicológico y Educación. 2. Psicología de la Educación Escolar*, (pp. 157-186). Madrid: Alianza.
- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293.
- Gómez, P., y Lupiáñez, J. L. (en prensa). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En E. Castro & J. L. Lupiáñez (Eds.) *Investigación en Pensamiento Numérico: un Homenaje a Jorge Cázares Solórzano*. Granada: Universidad de Granada.
- Grant, R. M. (1996) *Dirección estratégica. Conceptos, técnicas y aplicaciones*. Madrid: Cívitas.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2006). *Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares*. Documento enviado al X Simposio de la SEIEM.
- Lupiáñez, J. L., Rico, L., Gómez, P., y Marín, A. (2005). *Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en V Congreso Ibero-americano de educação matemática, Oporto, Portugal.
- OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.
- Rico, L. (2005). *La competencia matemática en PISA*. Conferencia impartida en el VI Seminario de Primavera: la Enseñanza de las Matemáticas y el Informe PISA, Madrid, España.
- Rico, L. (Coord.) (1997). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.
- Schulze, W. S. (1994). Two Resource-based Theories of the Firm: Definitions and Implications. En P. Schrivistava, A. Huff y J. Dutton (Eds.), *Advances in Strategic Management, Vol. 10* ( pp. 127-151). Greenwich, CT: JAI Press.

*Agradecemos las sugerencias y aportes de Pedro Gómez a la elaboración de este documento.*