

LA COMBINATORIA EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICA DE EDUCACIÓN SECUNDARIA EN ESPAÑA

Combinatory in Mathematics' textbook for Secondary Education in Spain

Jonathan Espinoza^a, Rafael Roa^b

^aUniversidad Nacional de Costa Rica, ^bUniversidad de Granada

Resumen

Los problemas combinatorios tienen profundas implicaciones tanto en el desarrollo de algunas ramas de la Matemática como en otras disciplinas (Batanero, Godino y Navarro-Pelayo, 1994). Una mención especial merece el papel de la Combinatoria en la Probabilidad, ya que una escasa capacidad del razonamiento combinatorio reduce la aplicación del concepto de Probabilidad a casos muy sencillos o de fácil enumeración (Piaget e Inhelder, 1951). Debido a la importancia del tema, decidimos concentrarnos en su tratamiento en algunos libros de texto de Matemáticas de Educación Secundaria. Nos basamos en el desarrollo de la teoría de los significados sistémicos, desarrollada por Godino y colaboradores, para considerar el libro de texto como una institución y, en ese contexto, el problema de investigación abordado es la caracterización del significado institucional del objeto matemático "Combinatoria" en los libros de texto citados.

Palabras clave: Educación, Combinatoria, libros de texto.

Abstract

The combinatorial problems have profound implications for both, the development of some branches of mathematics and other disciplines (Batanero, Navarro-Pelayo, and Godino, 1994). Special mention deserves the role of Combinatory in Probability, because a limited capacity in combinatorial reasoning reduces the application of the concept of probability in very simple or easy enumeration cases (Piaget and Inhelder, 1951). Due to the importance of the subject, we decided to concentrate on its treatment in some textbooks of Secondary Math Education. We rely on the theory of systemic meanings, developed by Godino y colleagues, to consider the textbook as an institution, and in this context, the research problem addressed is the characterization of the institutional meaning of the mathematical object "Combinatory" in the textbooks cited.

Keywords: Education, Combinatory, textbook.

INTRODUCCIÓN

Esta comunicación forma parte de un estudio más amplio que se realizó en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada en España, específicamente en el grupo de investigación "Didáctica de la Probabilidad, Estadística y Combinatoria", en la línea de investigación "Análisis de libros de texto y el currículo".

La investigación se realizó en dos etapas. En la primera identificamos, en todos los libros de texto seleccionados, aquellas tareas en las cuales puede aplicarse un contenido combinatorio en su resolución. En la segunda etapa describimos el desarrollo teórico del tema de Combinatoria incluido en algunos de los libros de texto de Matemática que conforman la muestra. Además, en esta misma etapa, seleccionamos uno de estos manuales para clasificar y describir las tareas propuestas en dicho capítulo. En la presente comunicación nos limitaremos a presentar los resultados obtenidos en la segunda etapa.

Esta comunicación se divide en cinco secciones. En la primera se presenta el problema de investigación, en la segunda sección se muestran los fundamentos teóricos que sirven de base para el estudio. En la tercera se encuentra la metodología empleada. En la cuarta sección se presentan los resultados obtenidos. Por último se incluyen las conclusiones obtenidas y sus posibles implicaciones.

Es importante indicar que no se busca realizar una evaluación de dichos textos para enaltecerlos o devaluarlos, sino que se pretende analizarlos y discutirlos desde un punto de vista crítico y con objetivos meramente investigativos.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La Combinatoria es un componente básico del razonamiento formal y constituye un recurso para la elaboración de la lógica proposicional en los adolescentes (Piaget e Inhelder, 1951). También contribuye al desarrollo del pensamiento sistémico, pues en la resolución de problemas combinatorios generalmente se deben examinar todas las posibilidades y enumerarlas. Además brinda oportunidades de realizar actividades características de la Matemática como hacer conjeturas, generalizar, indagar la existencia de soluciones, cuestiones de optimización, entre otros (Kapur, 1970).

Aunque la Combinatoria es un tema de importancia en la literatura, en el currículo actual de Educación Secundaria en España (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007) y en el correspondiente a la Comunidad Autónoma de Andalucía (Junta de Andalucía, 2007) su papel es poco significativo. En estos documentos no aparecen, de forma explícita, contenidos relacionados con la temática en ninguno de los cursos y bloques que lo componen, solo se puede encontrar, de modo indirecto y de forma implícita, referencias a recuentos de casos y a la construcción del espacio muestral de un experimento principalmente aplicadas al cálculo de probabilidades.

Aunado a lo anterior, el tema es considerado difícil por los propios profesores que lo enseñan (Navarro-Pelayo, 1994). Por su parte Roa (2000) en un estudio sobre el razonamiento combinatorio de estudiantes con preparación matemática avanzada, encontró que los problemas combinatorios son difíciles incluso para este tipo de estudiantes.

Debido a que este tema se encuentra aislado del currículo español; a la dificultad intrínseca que presenta y que por lo general su enseñanza se realiza sin conexión con los demás temas del currículo, provoca que en algunos casos se omita su enseñanza y cuando se enseña se basa principalmente en el aprendizaje de las fórmulas de combinatoria y en la realización de ejercicios estereotipados (Batanero et al., 1994).

La problemática descrita nos motivó a investigar el tema de Combinatoria concentrándonos en su tratamiento en libros de texto de Matemática de Educación Secundaria, principalmente porque el libro de texto es considerado por diversos autores como uno de los recursos didácticos más utilizados por los profesores y alumnos en los procesos de Enseñanza y Aprendizaje. Así el problema de investigación abordado es la caracterización del significado institucional del objeto matemático “Combinatoria” presente en la institución de los libros de texto de Matemática utilizados en la Educación Secundaria en España.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DEL ESTUDIO

En la investigación se aplicaron algunas nociones desarrolladas por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino y Font, 2007; Godino, Batanero y Font, 2009) quienes proponen un sistema teórico integrativo para la Didáctica de las Matemáticas desde un enfoque Ontológico y Semiótico. Principalmente nos concentramos en las nociones sobre los significados sistémicos.

Tomando como primitiva la noción de situación-problema, Godino y Batanero (1994) introducen las nociones de sistemas de prácticas, objetos emergentes de los sistemas de prácticas y significado

(personal e institucional) de un objeto matemático, entendido en términos de los sistemas de prácticas que un sujeto (persona o institución) pone en juego en las cuales el objeto desempeña un papel relevante.

Godino y colaboradores consideran como práctica matemática toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Las prácticas pueden ser propias de una persona o compartidas en el seno de una institución.

Para estos autores el concepto de institución es muy amplio. Una institución especial es la Matemática (M) formada por los productores del saber matemático. Otras posibles son las instituciones de enseñanza en los diversos niveles. En un sentido amplio podemos considerar los libros de texto como instituciones, ya que en ellos se proponen problemas matemáticos y se describen prácticas específicas para resolverlos usando medios expresivos con frecuencia propios de la Matemática.

En cada institución se realizan ciertos tipos de prácticas asociadas a un campo de problemas, los autores descritos las llaman prácticas institucionales. Están constituidas por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I. Su carácter social indica que son observables. Como tipos de tales prácticas se citan: descripciones de problemas o situaciones, representaciones simbólicas, definiciones de objetos, enunciados de proposiciones, procedimientos que son invariantes característicos del campo de problemas, argumentaciones, entre otras (Godino y Font, 2006).

Además de las prácticas institucionales hay que considerar también las prácticas realizadas por las personas en su intento de resolver situaciones-problema (prácticas personales).

De esta forma en cada campo de problemas e institución (persona) hay un sistema de prácticas institucionales (personales) significativas asociadas al campo de problemas. Los objetos institucionales (personales) son los emergentes de este sistema de prácticas que son indicadores empíricos que nos permiten caracterizar estos objetos. El sistema de prácticas de donde emerge un objeto institucional (personal) se define como el significado institucional (personal) del objeto dado.

En el estudio de las matemáticas tiene mayor interés considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante cierto tipo de problemas, que una práctica particular ante un problema concreto (Godino et al., 2009). Así por ejemplo a la pregunta qué es el objeto matemático "Combinatoria" se propone como respuesta: el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal) compartidas en el seno de una institución (Significado institucional) para resolver situaciones-problemas en los cuales interviene dicho objeto.

METODOLOGÍA

El enfoque del estudio se enmarca en el paradigma cualitativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2006). Por otra parte los datos se analizan desde el punto de vista descriptivo (Hernández et al., 2006).

Se utilizó la metodología de análisis de contenido la cual se basa en la lectura (textual o visual) como instrumento de recogida de información (Andréu, 2000). Los libros de texto que conforman la muestra son los de cuarto curso (Opción A y B) de Educación Secundaria en España, de las editoriales SM, Anaya y Santillana publicados en el 2008. En la tabla 1 se muestra la referencia de cada uno.

Para determinar variables asociadas a algunas de las prácticas descritas por Godino y Font (2006) recurrimos a estudios previos relacionados con la temática abordada. Tres investigaciones llamaron nuestra atención, las realizadas por Navarro-Pelayo (1991, 1994) y la elaborada por Ortiz (1999).

Las variables que empleamos para describir el desarrollo teórico del tema son: Ubicación del capítulo de Combinatoria en el libro de texto, Contenidos incluidos, notación empleada y orden de presentación, Tratamiento dado a las definiciones, Modelo combinatorio considerado en el enunciado del concepto combinatorio, Utilización de recursos didácticos, Presencia de consideraciones históricas y Ejemplos/ejercicios introductorios y posteriores a los contenidos sobre Combinatoria.

Tabla 1. Referencia de los libros de texto de Matemática seleccionados

N°	Referencia
1	Vizmanos, J. R., Anzola, M., De los Santos, I. y Hervás, J. C (2008). Matemáticas 4 ESO opción A, colección Esfera. Madrid: Ediciones SM.
2	Vizmanos, J. R., Anzola, M., Alcaide, F. y Peralta, J. (2008). Matemáticas 4 ESO opción B, colección Ábaco. Madrid: Ediciones SM.
3	Colera, J., Martínez, M., Gaztelu, I. y Oliveira, M.J. (2008). Matemáticas 4 opción A, Educación Secundaria. Madrid: Anaya.
4	Colera, J., Oliveira, M.J., Gaztelu, I. y Martínez, M. (2008). Matemáticas 4 opción B, Educación Secundaria. Navarra: Anaya.
5	Dolores, M., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M, Parra, S., Redondo, M., et al. (2008). Matemáticas 4 opción A, proyecto la casa del saber. Madrid: Santillana.
6	Dolores, M., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M, Parra, S., Redondo, M., et al. (2008). Matemáticas 4 opción B, proyecto la casa del saber. Madrid: Santillana.

Las variables utilizadas para describir todas las tareas del capítulo de Combinatoria de uno de los manuales de Matemática de cuarto curso de Educación Secundaria son: Contenido combinatorio utilizado para resolver la tarea, Valor numérico de los parámetros m y n , Naturaleza (contexto) de los elementos inmersos en la tarea, Modelo combinatorio considerado en el enunciado de las tareas, Ausencia o presencia de variables en los parámetros m y n , Número de operaciones combinatorias ligadas a una misma tarea y Tipo de tarea combinatoria.

De la investigación realizada por Ortiz (1999) se utilizó únicamente la variable: tipo de actividad que se pide al alumno, a la cual en nuestra investigación se llama ejemplos/ejercicios introductorios y posteriores a los contenidos sobre Combinatoria.

En el caso de los trabajos realizados por Navarro-Pelayo (1991, 1994) se tomaron las siguientes variables: contenidos incluidos y orden de presentación, notación empleada, definiciones presentadas, recursos didácticos, presencia de consideraciones históricas, tipo de operación combinatoria, presencia de variables, magnitud de los parámetros, contexto de los elementos, tipo de ejercicio combinatorio y número de operaciones combinatorias.

En la tabla 2 se muestran únicamente las variables consideradas por Navarro-Pelayo (1991, 1994) a las cuales realizamos adaptaciones y que utilizamos para clasificar y describir las tareas combinatorias propuestas por los libros de texto de nuestra muestra.

RESULTADOS

Encontramos que de los libros que conforman la muestra seleccionada, únicamente el manual de Matemática de cuarto curso opción A de la editorial Anaya no contiene un capítulo dedicado al estudio de la Combinatoria. Además el capítulo sobre el tema presente en los libros de texto de cuarto curso opción A y B de la editorial Santillana son exactamente iguales. De esta forma los resultados obtenidos corresponden al análisis realizado a cuatro manuales de Matemática de

Educación Secundaria: el del cuarto curso opción A de la editorial SM; cuarto curso opción B de SM; cuarto curso opción B de Anaya y cuarto curso opción A de Santillana.

Tabla 2. Variables consideradas por Navarro-Pelayo (1991, 1994) para analizar ejercicios a las cuales realizamos adaptaciones

Variables	Adaptaciones
Tipo de operación combinatoria.	Se incluyeron otros contenidos combinatorios como los números combinatorios o el factorial de un número, etc. La nueva variable recibe el siguiente nombre: contenido combinatorio utilizado para resolver la tarea
Magnitud de los parámetros.	Se agregó una nueva categoría para el caso de los valores de los parámetros de la regla del producto. El nombre de esta variable se reformula como valor numérico de los parámetros m y n .
Contexto de los elementos.	Se separó la categoría, letras y números, elaborada por Navarro-Pelayo (1991), en dos categorías mutuamente excluyentes. También se reformuló el nombre de la categoría “grafos” por el de caminos. Además se agregó una nueva categoría llamada “cálculo combinatorio” y se reformuló el nombre por el de naturaleza (contexto) de los elementos inmersos en la tarea.
Tipo de ejercicio combinatorio.	Se agregó el caso en que además de identificar la operación combinatoria se deba resolver una ecuación. También se incluyó dos nuevas categorías: “construcción o invención de un problema” y “tarea aplicada a la probabilidad”. Se reformuló el nombre por el de tipo de tarea combinatoria.
Presencia de variables	Se reformuló el nombre por el de ausencia o presencia de variables en los parámetros m y n .

Para simplificar la presentación de los resultados se utilizará la siguiente notación: [A]: Cuarto curso opción A SM, [B]: Cuarto curso opción B SM, [C]: Cuarto curso opción B Anaya y [D]: Cuarto curso opción A Santillana.

Resultados del análisis del desarrollo teórico del tema de Combinatoria

Con relación a la ubicación del capítulo sobre Combinatoria presente en los manuales mencionados se observó que en tres de ellos ([A], [B] y [D]) el capítulo anterior es el Estadística y el posterior Probabilidad. Únicamente [C] presenta el tema después de Probabilidad y como último capítulo del libro.

Respecto a los contenidos sobre Combinatoria desarrollados en dichos manuales (Tabla 3), encontramos que todos contienen las variaciones ordinarias o con repetición, las permutaciones ordinarias, las combinaciones ordinarias y el diagrama en árbol. Solo [B] no contiene la regla del producto. Además ninguno incluye la regla de la suma o las combinaciones con repetición. Las permutaciones con repetición solo se encontraron en [A] y las permutaciones circulares únicamente en [B]. El libro de texto con mayor cantidad de contenidos es [D] con 10, seguido por [B] y [A] y el que presenta la menor cantidad es [C] con seis.

Dos de los textos hacen referencia al concepto de Combinatoria. Por ejemplo [C] menciona “La Combinatoria se ocupa de contar agrupaciones realizadas con distintos criterios” (p. 228) y [D] “Los métodos de conteo son estrategias utilizadas para determinar el número de posibles resultados que existen al realizar un experimento” (p. 230).

La notación empleada para las operaciones combinatorias es similar en todos los manuales. Solo uno de los textos utiliza dos notaciones diferentes para algunos contenidos combinatorios, llegando incluso a mezclarlas en el desarrollo teórico del tema.

Tabla 3. Contenidos combinatorios presentes en los manuales

Contenido	Manual				Total
	[A]	[B]	[C]	[D]	
Regla del producto	1	0	1	1	3
Regla de la suma	0	0	0	0	0
Variaciones ordinarias	1	1	1	1	4
Variaciones con repetición	1	1	1	1	4
Permutaciones ordinarias	1	1	1	1	4
Permutaciones con repetición	1	0	0	0	1
Permutaciones circulares	0	1	0	0	1
Combinaciones ordinarias	1	1	1	1	4
Combinaciones con repetición	0	0	0	0	0
Diagrama de árbol	1	1	1	1	4
Factorial de n	1	1	0	1	3
N° combinatorios	0	1	0	1	2
Propiedades de N° Combinatorios	0	1	0	1	2
Binomio de Newton	0	0	0	1	1
Total	8	9	6	10	33

0: Ausente 1: Presente

En tres de los manuales ([A], [C] y [D]) las operaciones combinatorias se presentan en el siguiente orden: variaciones (ordinarias y con repetición), permutaciones (ordinarias y con repetición) y por último combinaciones.

El tratamiento dado a las definiciones de las operaciones combinatorias es equivalente en todos los manuales. Con frecuencia se inicia la definición con la frase “distintos grupos o agrupaciones que se pueden formar”, “formar agrupaciones ordenadas” o “distintas formas que se pueden ordenar”, por lo que está implícita en todos los casos la noción de muestra (ordenada o no).

Por ejemplo, en los manuales [A] y [B] definen las variaciones ordinarias de la siguiente forma:

Las variaciones ordinarias o sin repetición de m elementos tomados de n en n (de orden n) son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que en cada grupo entren n elementos distintos, dos grupos son distintos si difieren en algún elemento o en el orden de colocación. ([A], p. 252 y [B], p. 282)

Además todas las definiciones utilizan al menos el modelo de selección.

Respecto a los recursos didácticos [A], [B] y [D] promueven el uso de la calculadora principalmente como un recurso para facilitar los cálculos. Solo [C] propone para introducir el tema el uso de material manipulativo.

Con relación a las consideraciones históricas, solo [D] introduce el tema con un breve relato histórico sobre el matemático Blaise Pascal y la máquina que inventó para contar; sin embargo no se relaciona con la construcción de los conceptos combinatorios. Ninguno de los manuales menciona cómo surge la Combinatoria, qué tipos de problemas motivaron su estudio o quiénes son sus principales precursores, por nombrar algunos aspectos relevantes.

En general la estructura de los ejemplos y ejercicios presentes en [A] y [B] es similar: ejemplos introductorios-ejemplos posteriores a la definición-ejercicios posteriores a la definición. En [C] ejemplos introductorios-ejercicios posteriores a la definición y en [D]: ejemplos posteriores a la definición-ejercicios posteriores a la definición.

Resultados del análisis de las tareas propuestas en el capítulo de Combinatoria de uno de los libros seleccionados

Después de realizar el análisis del desarrollo teórico del tema en los cuatro manuales mencionados, se seleccionó al azar uno de éstos para analizar todas las tareas que se deben resolver en el capítulo de Combinatoria. El texto seleccionado fue el del cuarto curso de Educación Secundaria opción A de la Editorial Santillana.

El manual descrito contiene 87 tareas planteadas para ser resueltas por los estudiantes, sin embargo algunas de ellas incluyen bajo una misma numeración varias tareas independientes, por lo que consideramos cada una de ellas como unidades de registro distintas entre sí. En total encontramos 170 tareas que se han resuelto y se les ha efectuado un análisis de contenido tanto del enunciado como del procedimiento utilizado en su solución.

La clasificación de las 170 situaciones según el tipo de tarea combinatoria se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 4. Tipo de tarea combinatoria

Tipo de tarea	Frecuencia	%
Reconocimiento de la fórmula	94	55,3
Identificación de la operación combinatoria	66	38,8
Enumeración	6	3,5
Demostración o búsqueda de propiedades	4	2,4
Total	170	100

Como se puede observar, la mayor cantidad de tareas (55%) corresponden al reconocimiento de la fórmula combinatoria, como por ejemplo: “Calcula $8!$ ” (Tarea 8a, p. 232) y “Halla las variaciones con repetición de 20 elementos tomados de 5 en 5” (Tarea 48e, p. 241). Un porcentaje considerable de tareas (alrededor del 39%) se relacionan con la identificación de una operación combinatoria como la siguiente: “¿De cuántas formas podemos colocarnos 2 anillos diferentes en una mano de modo que no estén en el mismo dedo?” (Tarea 28, p. 237).

Respecto al concepto combinatorio que se puede utilizar para resolver las tareas (Tabla 5), se encontró que hay una distribución casi homogénea de los contenidos combinatorios utilizados para resolverlas, ya que ninguno se utiliza en más del 17%. El Binomio de Newton es el que aparece con mayor frecuencia (16,5%). 57% se resuelven utilizando la regla del producto, las variaciones, las permutaciones, el diagrama de árbol o las combinaciones ordinarias, siendo ésta última la más usada entre ellas (13,5%). Además una de cada cinco pide calcular el factorial de un número o un número combinatorio.

Con relación al número de operaciones combinatorias ligadas a una misma tarea, 8 de cada 10 se resuelven utilizando solo una operación, mientras que en 8% es necesario aplicar 2 operaciones a la vez.

El valor de los parámetros es una de los factores que influye en la dificultad de las tareas. En aquellas que se resuelven mediante variaciones, permutaciones o combinaciones y en las cuales el valor de los parámetros no es una variable, se encontró que la mayoría de valores de m son menores

a 10 (68,5%), con mayor frecuencia pertenecen al intervalo discreto [6, 10] (38,4%). Alrededor del 15% está entre 16 y 20. En el caso del parámetro n la mayoría de valores son menores a 5 (67,1%) y aproximadamente el 90% es menor a 10.

Tabla 5. Contenido combinatorio utilizado para resolver la tarea

Operación	Frecuencia	%
Regla del producto	15	8,8
Variaciones ordinarias	18	10,6
Variaciones con repetición	13	7,6
Combinaciones ordinarias	23	13,5
Permutaciones ordinarias	19	11,2
Diagrama en árbol	9	5,3
Factorial	18	10,6
Nº Combinatorio	24	14,1
Binomio de Newton	28	16,5
Ninguna operación combinatoria	3	1,8
Total	170	100,0

Sobre el contexto o naturaleza de los elementos inmersos en las tareas, se encontró que el cálculo combinatorio es el que aparece con mayor frecuencia (34,7%) seguido por el algebraico (22,4%). Alrededor del 11% efectúa operaciones combinatorias con objetos, 10% con números, 8% con personas y 8% con letras.

Los modelos de selección y colocación son los que aparecen con mayor frecuencia y en similar proporción (20% y 19,4%, respectivamente). Se encontraron dos tareas del modelo de particiones, sin embargo una cantidad considerable no corresponde a ningún modelo (101).

Un aspecto que puede aumentar la dificultad de la tarea es la presencia de variables en los parámetros (Hadar y Hadass, 1981). Al respecto encontramos 38 (22,3%) en las cuales el parámetro n es una variable de tipo indeterminada dado que no se debe calcular su valor como en la siguiente:

“Demuestra con ejemplos que se verifica esta igualdad $\binom{n}{n \square 1} = n$ ” (tarea 40, p. 240).

Por último, es importante mencionar que las tareas propuestas se distribuyen dentro del texto según el contenido combinatorio que se debe aplicar para solucionarlas. Por ejemplo las que se resuelven por medio de las variaciones se presentan después de un título que indica “Halla estas variaciones”.

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

Conclusiones del análisis del desarrollo teórico del tema de Combinatoria

El capítulo sobre Combinatoria se ubica en los libros de texto analizados principalmente después del tema de Estadística y antes de Probabilidad. Esto podría llevar a que los estudiantes utilicen técnicas de recuento para el cálculo de probabilidades, sin embargo en los capítulos sobre Probabilidad no observamos tareas en las cuales se promueva el uso de algún contenido combinatorio. Debido a lo anterior se concluye que el estudio del tema de Combinatoria se realiza de forma aislada en los textos analizados.

Los resultados obtenidos sobre el orden en que se presentan las operaciones combinatorias coinciden con los de Navarro-Pelayo (1991). Solo uno de los manuales sigue las recomendaciones de Fischbein y Gazit (1988), quienes consideran que la primera operación combinatoria que se debe estudiar cuando se utiliza el diagrama en árbol es la de variaciones con repetición, seguido por las permutaciones y por último las combinaciones que ofrecen mayor dificultad a los alumnos.

Respecto a la notación que empleada, Hadar y Hadass (1981) mencionan que la dificultad que poseen los estudiantes de elegir una notación que represente de forma adecuada la información y condiciones dadas en las tareas, aumenta debido a que algunos textos emplean diferentes notaciones para las operaciones combinatorias, resultado que hemos obtenido en uno de los textos analizados.

Respecto a las expresiones algebraicas (fórmulas) que se presentan para calcular las operaciones combinatorias dos de los textos emplean expresiones más simplificadas. Consideramos que esto facilitan su aplicación por parte del estudiante.

El único recurso didáctico que promueven los libros de texto es el uso de la calculadora y se utiliza principalmente para simplificar los cálculos. Sin embargo el currículo de Educación Secundaria para Andalucía recomienda que las calculadoras no deben suponer solo un apoyo para la realización de cálculos complejos, sino mucho más que eso, deben convertirse en herramientas para la construcción del pensamiento matemático y facilitar la comprensión de los conceptos, ya que permiten liberar de una parte considerable de carga algorítmica. Por otra parte no se promueve por ejemplo la metodología basada en juegos. Engel, Varga y Walser (1976) proponen usar para la enseñanza de la Combinatoria una metodología basada en juegos, el uso de diagrama en árbol y los materiales manipulativos. Esto para evitar sesgos en el razonamiento combinatorio de los estudiantes, no obstante en los textos estas orientaciones metodológicas no son reflejadas.

Los contenidos combinatorios son presentados primero con un ejemplo introductorio luego con uno o varios ejemplos después de la definición y por último diversos ejercicios posteriores a la definición. Ninguno de los manuales incluye ejercicios introductorios.

No se encontraron consideraciones históricas que se relacionen con la construcción de los conceptos combinatorios. Por lo tanto no se consideran los lineamientos del currículo de Educación Secundaria para Andalucía, donde se destaca que el conocimiento histórico de la Matemática debe entenderse como eje transversal en la enseñanza de las Matemáticas y ha de estar siempre presente en la construcción del conocimiento matemático durante la Educación Secundaria.

Conclusiones del análisis de las tareas propuestas en el capítulo de Combinatoria de uno de los libros seleccionados

Se da un mayor énfasis a tareas relacionadas con el reconocimiento de la fórmula combinatoria que se debe utilizar para resolverla. Sin embargo hay una cantidad considerable donde se debe identificar la operación combinatoria que la resuelve. Por el contrario se presentan pocas tareas de enumeración y de demostración o búsqueda de propiedades.

Hay una distribución homogénea de los contenidos combinatorios utilizados para resolver las tareas propuestas. La operación combinatoria más frecuente son las combinaciones ordinarias seguida por las permutaciones ordinarias y por último las variaciones con repetición. Hay pocas en las cuales se utilice el diagrama en árbol.

En la mayoría de las tareas propuestas solo es necesario aplicar una operación combinatoria para resolverlas.

Los valores de los parámetros m y n no son elevados y se encontró una gran cantidad considerable en las que los parámetros son variables, lo que según Hadar y Hadass (1981) aumenta su dificultad ya que los estudiantes pueden cometer el error de resolverlas usando valores concretos.

Se da gran importancia al contexto algebraico y al de cálculo combinatorio.

Existe correspondencia entre el modelo combinatorio usado para definir las operaciones combinatorias y los modelos implícitos en los enunciados de las tareas.

El texto en cuestión sugiere el concepto combinatorio que se debe emplear en la resolución de la tarea dado que las agrupa de acuerdo al contenido combinatorios que se deben utilizar. Esto impide la exploración e identificación del contenido combinatorio involucrado pues se infiere directamente.

Referencias

- Andréu, J. (2000). Las técnicas de análisis de contenido; una revisión actualizada. Recuperado el 22 de julio, 2011 de <http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf>
- Batanero, C., Godino, J. D. & Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento Combinatorio*. Madrid: Síntesis.
- Engel, A., Varga, T. & Walser, W. (1976). *Hasard ou strategie? Jeux de combinatoire, de probabilités et de statistique*. París: O.C.D.L
- Fischbein, E. & Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 5(1), 193-198.
- Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J.D. & Font, V. (2006). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. Recuperado el 11 de junio, 2014 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/anexo1_significados%20sistemicos.pdf.
- Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 12 de junio, 2014 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf.
- Hadar, N. & Hadass, R. (1981). The road to solving a combinatorial problema is strewn with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics*, 12(1), 435-443.
- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación*. (4 ed.). México: McGraw-Hill.
- Junta de Andalucía (2007). Orden de 10 de agosto por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. BOJA, 171, 23-65.
- Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics Education*, 3(1), 111-127.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE, 5, 677-773.
- Navarro-Pelayo, V. (1991). *La enseñanza de la Combinatoria en el bachillerato*. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada, España.
- Navarro-Pelayo, V. (1994). *Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.
- Ortiz, J. J. (1999). *Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.
- Piaget, J. & Inhelder, B. (1951). *La gènesis de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Roa, R. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación Matemática avanzada*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.