# La fracción. una noción importante para la matemática escolar

**Yancy Dilene Campos Lozano**
*Universidad Pedagógica Nacional*
*Bogotá D.C, Colombia*
yancy_dilene_c@hotmail.com

**Giovanna Castiblanco Alvarez**
*Profesora titular Gimnasio Moderno*
*Bogotá D.C, Colombia*
mgcastiblanco@yahoo.es

**Resumen**

En este artículo se muestra algunas relaciones de la fracción con otros conceptos matemáticos, para así hacer explicita la importancia de esta en la matemática escolar. Se presenta brevemente la fracción desde el punto de vista matemático (como representación de los números racionales positivos), así como también una pequeña reseña de estudios que han justificado la permanencia de la fracción en la escuela. Por último el análisis de un ejemplo de proporcionalidad simple directa que tradicionalmente aparece en los libros de texto o que se discute en clase, éste con el fin de mostrar que la fracción no puede interpretarse únicamente como parte-todo, ya que es uno de los conceptos que cobra importancia por su utilidad en el análisis y solución de situaciones de este tipo, interpretada ya sea como operador escalar, operador funcional, razón o medida, interpretaciones que explicitan relaciones matemáticas con otros conceptos.

## 1. Construcción de los Números Racionales Positivos.

Sea $\mathbf{P} = N \times (N - \{0\})$; por lo tanto los elementos de $\mathbf{P}$ son parejas de la forma $(a, b)$ con $b \neq 0$. En este conjunto se define una *relación*:

$$(a, b) \approx (c, d) \quad \text{si y sólo si} \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Esta relación es de equivalencia ya que es:

1. Reflexiva, porque para todo $a$ y $b$ que pertenece a los naturales, $b \neq 0$ se tiene, $(a, b) \approx (a, b)$ ya que $a \cdot b = b \cdot a$, por la conmutatividad de la multiplicación entre números naturales.

2. Simétrica, porque para todo $a, b, c, d$ que pertenecen a los naturales, $b \neq 0$ y $d \neq 0$ se tiene, $(a, b) \approx (c, d)$ por lo que $a \cdot d = b \cdot c$ ; utilizando la propiedad simétrica de la igualdad y la conmutatividad de la multiplicación de los números naturales se tiene que $c \cdot b = d \cdot a$ , luego $(c, d) \approx (a, b)$.

3. Transitiva, porque para todo $a, b, c, d, e, f$ que pertenecen a los naturales $b \neq 0, d \neq 0$, y $f \neq 0$ se tiene: Si $(a, b) \approx (c, d)$ y $(c, d) \approx (e, f)$ entonces $a \cdot d = b \cdot c$ y $c \cdot f = d \cdot e$, multiplicando la primera igualdad por $f$ se obtiene: $(a \cdot d) \cdot f(b \cdot c) \cdot f$; aplicando la propiedad asociativa de la multiplicación de números naturales y remplazando $c \cdot f$ por $d \cdot e$ se tiene $b \cdot (c \cdot f) = b \cdot (d \cdot e)$; por la propiedad transitiva de la igualdad, $(a \cdot d) \cdot f = b \cdot (d \cdot e)$, luego cancelando $d$, se obtiene que $a \cdot f = b \cdot e$, lo que significa que $(a, b) \approx (e, f)$

Entonces, esta relación es de equivalencia y define en el conjunto $\mathbf{P}$ clases de equivalencia, es decir, genera en $\mathbf{P}$ particiones. El conjunto de todas las clases de equivalencia es el conjunto de los Números Racionales, denotado $\mathbf{Q}$.

Cada clase de equivalencia esta formada por un conjunto infinito de elementos (parejas ordenadas). De todas las parejas de una misma clase de equivalencia sólo hay una en la que sus dos componentes son primos entre si (esto es, el máximo común divisor entre ellos es 1). A este elemento se le reconoce como el representante canónico de la clase de equivalencia. Cada clase de equivalencia es un número racional, es decir el representante de la clase puede tomarse como una representación simbólica del número racional. Por ejemplo, las parejas $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{8}{16}, \cdots$ (las cuales se pueden escribir como $(1, 2), (2, 4), (4, 8), (8, 16), \cdots$ ) forman una clase de equivalencia. El representante de la clase es $\frac{1}{2}$, por lo tanto $\frac{1}{2}$ es una representación simbólica del número racional que expresa la clase de equivalencia $\Big($cualquier elemento de esta clase equivalencia es $\frac{1}{2}\Big)$.

Los elementos de las clases de equivalencia son fracciones. Las fracciones, por así decirlo, son una forma de expresión simbólica para los números racionales. Por ejemplo fracciones como $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ son distintas, pero expresan el mismo número racional.

## 2. Aspectos Didácticos de la Fracción.

La distinción entre fracción y número racional es importante, ya que desde la didáctica de las matemáticas varios autores le otorgan a la fracción diferentes significados; entre ellos, Freudenthal plantea que las *"...fracciones son el recurso fenomenológico*[1] *del número racional -una fuente que nunca se seca -. 'Fracción'-o lo que corresponda en otras lenguas- es la palabra con la que entra el número racional"* (Freudenthal, 1983).

La afirmación anterior podría constituirse en una justificación de la permanencia de la fracción en el currículo escolar y el porque se inicia su enseñanza a tan temprana edad. Aspectos que han sido tratados en distintas épocas y por diferentes investigadores, al respecto Wilson y Dalrympe (1937) llevaron a cabo una investigación sobre los usos sociales y comerciales de las fracciones planteando la necesidad de mantenerlas dentro del currículo. Dienes Z. (1970), Kieren (1975), Joy, R. (1981) y Cable, J. (1981), mostraron que las fracciones son básicas para el posterior desarrollo de otros contenidos matemáticos o de otras disciplinas; y una última justificación obedece a que son parte importante de nuestro bagaje cultural, pues no seria lógico restringir los conocimientos de las generaciones futuras respecto a las presentes (Llinares y Sánchez, 1997).

A partir de estas estudios es posible cuestionarse acerca del ¿por qué se enseñan las fracciones?, ¿a que se le debe dar prioridad, en su enseñanza?, ¿por qué la fracción aparece diseminada en distintos años del currículo escolar? ¿qué aspectos de está deben ser abordados en cada año?, las respuestas a estas y otras preguntas posiblemente darán criterios para establecer la frac-

[1] Para Freudenthal describir un concepto en su relación con aquello para lo que es un medio de organización es hacer el análisis fenomenológico del concepto, es decir, mostrar como los conceptos matemáticos son medios para organizar fenómenos. (Freudenthal, 1983)

ción como una noción importante para la matemática escolar.

A partir de las diferentes interpretaciones de la fracción[2], se vislumbra la complejidad no solamente matemática sino cognitiva de su enseñanza y aprendizaje. En este artículo se presenta brevemente el modelo teórico de la construcción del conocimiento del número racional, planteado por Kieren (1988), el cual puede ser pensado como una red que contiene seis niveles de conocimiento:

1. Conocimientos conectados con hechos y experiencias.
2. Constructo de partición, equivalencia y formación de unidades divisibles.
3. Constructo de medida, cociente, razón y operador.
4. Relaciones escalares y funcionales.
5. Campo Conceptual Multiplicativo (sintetiza los constructos de los números racionales y conceptos relacionados).
6. Campo cociente de los números racionales.

Esta red enfatiza en que el conocimiento del número racional es interactivo y que conocer los números racionales como elementos de un campo de cocientes -el más alto nivel-permite no solo probar teoremas acerca de la estructura de los sistemas matemáticos, sino que también permite explicar fenómenos en los niveles más bajos de la red. (Behr et al. 1992)

La solución de la siguiente situación muestra como el uso de la fracción denota diferentes interpretaciones de esta y a la vez como se relación con otros conceptos matemáticos.

“3 madejas de lana pesan 200 gramos. Se necesitan 8 madejas para hacer un saco. ¿Cuánto pesa el saco?”(Vergnaud, 1985).

[2]En el artículo *Significados y significantes relativos a las fracciones* (Mancera, 1992), se encuentra un estado de arte al respecto.

Esta situación se puede representar en una tabla de correspondencia entre dos tipos de cantidades (número de madejas y número gramos), la cual permite analizarla desde dos perspectivas.

## 3. Análisis Vertical (Escalar)

Este procedimiento se basa en la noción de operador escalar, el cual permite pasar de una fila a otra, dentro de la misma cantidad de medida. Para este caso el operador escalar que permite pasar de 3 madejas a 8 madejas es el operador fraccionario $x\frac{8}{3}$ que no tiene dimensión; nótese que si se multiplica a tres madejas por el operador fraccionario también se debe multiplicar al peso de tres madejas por el operador fraccionario $x\frac{8}{3}$ (ya que estas dos cantidades están directamente correlacionadas), para obtener así el peso de 8 madejas (x), encontrando de esta manera la solución. Como se muestra en la siguiente tabla.

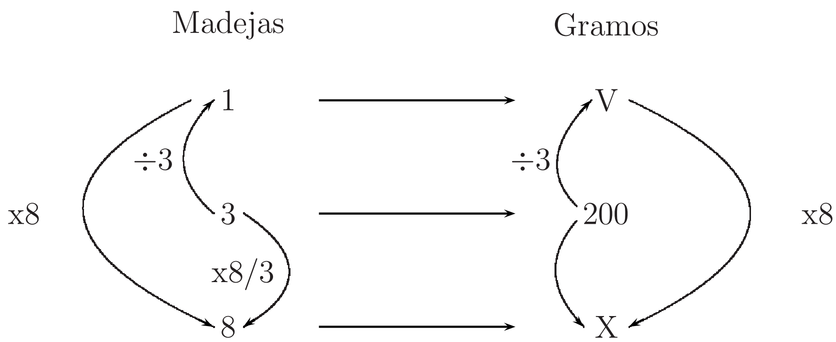
| Número de madejas | Número de gramos |
|---|---|
| 3 | 200 |
| x8/3 | x8/3 |
| 8 | x |

Tabla: 1

El operador fraccionario $x\frac{8}{3}$ puede ser interpretado por lo menos de cuatro maneras distintas:

1. Este operador corresponde a la composición de dos operadores multiplicativos simples, una división y una multiplicación; comenzando ya sea por la división o por la multiplicación. De esta manera, para encontrar el peso de una madeja, se aplica el operador $\div 3$, el cual permite pasar de 3 madejas a 1 madeja, y al mismo tiempo permite pasar del

peso de tres madejas al peso de una madeja (v). Para encontrar el peso de 8 madejas se aplica el operador $x8$, el cual permite pasar de 1 madeja a 8 madejas y de la misma manera pasar del peso de 1 madeja (v) al peso de 8 madejas (x). Como se muestra a continuación.




2. El operador fraccionario $x\frac{8}{3}$ representa la multiplicación por la razón entre dos cantidades $\frac{8\,madejas}{3\,madejas}$, de esta manera el problema se puede plantear utilizando la proporción $\frac{8\,madejas}{3\,madejas} = \frac{peso\ de\ 8\,madejas}{peso\ de\ 3\,madejas}$ es decir,

$$\frac{8\,madejas}{3\,madejas} = \frac{x\ gramos}{200\ gramos}$$

$$\frac{8\,madejas}{3\,madejas} \cdot 200\ gramos = \frac{x\ gramos}{200\ gramos} \cdot 200\ gramos$$

$$\frac{8}{3} \cdot 200\ gramos = x\ gramos$$

Nótese que la razón $\frac{8\,madejas}{3\,madejas}$ es interna, puesto que relaciona dos cantidades de la misma magnitud, por ello se convierte en el operador escalar $x\frac{8}{3}$ que se aplica al peso de 3 *madejas* en el tercer paso del procedimiento anterior.

3. Cuando se piensa en cuantas unidades compuestas por 3 madejas se necesitan para componer una unidad de 8 *madejas*, se esta reinterpretando una medida (8 *madejas*) en términos de otra (3 *madejas*), lo que puede expresarse así: $8 = 2(3) + \frac{2}{3}(3) = 2\frac{2}{3}(3)$, en donde la unidad esta compuesta por 3 *madejas*, y $2\frac{2}{3}$ corresponde al operador fraccionario $x\frac{8}{3}$; entonces, se han formado unidades de unidades compuestas por 3 *madejas* -porque se conoce su peso y teniendo este como referencia se puede hallar el peso de las ocho *madejas*-, este procedimiento se llama *unitización*[3]; luego se ha formado una nueva unidad de 8 *madejas* compuesta por unidades -paquetes- de 3 *madejas*, este procedimiento se conoce como *normación*[4].

   En este caso se han necesitado 2 unidades completas de tres *madejas* y $\frac{2}{3}$ de otra unidad de tres para componer una unidad de 8 *madejas* para llegar a la solución (este análisis puede ser fácilmente comprendido puesto que es una magnitud discreta).Luego

$$\begin{aligned}
3 \to (3) &= 200 \\
8 \to (8) &= f\left(2(3) + \frac{2}{3}(3)\right) = f(2(3)) + f\left(\frac{2}{3}(3)\right) \\
&= 2f(3) + \frac{2}{3}f(3) \\
&= 2(200) + \frac{2}{3}(200) = 200\left(2\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

4. Desde otro punto de vista, el operador escalar $x\frac{8}{3}$ puede ser interpretado como “el operador medida”es decir, el peso de 8 madejas es “$\frac{8}{3}$ veces”el

[3]El proceso de unitización consiste en construir una unidad de referencia, la cual permite reelaborar una situación en términos de una unidad más colectiva. Esta estrategia exige un pensamiento más complejo, porque invoca un esquema parte-todo que permite pensar en el agregado así como en el ítem individual que lo compone. (Lamon, 1988)

[4]Normación es el proceso de recontextualizar un sistema en relación con alguna unidad fija o estandarizada es decir, una unidad compuesta es formada y entonces la situación dada es reinterpretada en términos de esta unidad. (Freudenthal, 1983)

peso de 3 madejas.

En donde $\frac{8}{3}$ veces de 200 *gramos* es $8(200 \div 3) = 8\left(\frac{200}{3}\right) = 8\left(200\left(\frac{1}{3}\right)\right)$, en donde $\frac{1}{3}$ es la unidad de medida y a partir de esta se establecen 3 unidades compuestas por *gramos*, entonces, se obtiene 3 unidades de aproximadamente 66,7 *gramos*,. Luego, se compone una nueva unidad de 8 formada por 8 unidades de $\frac{1}{3}$, aproximadamente 66,7 *gramos* y de esta manera se halla el peso de 8 *madejas*. Este procedimiento es mucho más complejo puesto que la magnitud que interviene es continua y por el tipo de números que involucra -decimales-.

# 4. Análisis Horizontal (Función)

Este análisis horizontal se basa en la noción $f$ operador-función, el cual representa una función que expresa el paso de una categoría de medida a la otra. Para este caso el operador función que hace corresponder a 3 *madejas* el peso de 200 *gramos*, es el operador- función $\times \frac{200\ gramos}{3\ madejas}$, el cual permite encontrar el peso de 8 madejas (x *gramos*). Como se muestra en el diagrama.

| Madejas | | Gramos |
|---|---|---|
| 3 | $\times \frac{200\ gramos}{3\ madejas}$ $\longrightarrow$ | 200 |
| 8 | $\times \frac{200\ gramos}{3\ madejas}$ $\longrightarrow$ | X |

Tabla: 2

Luego,

$$\begin{aligned} 3 \rightarrow f(3) &= \frac{200}{3} \cdot 3 \\ 8 \rightarrow f(8) &= \frac{200}{3} \cdot 3 \\ &\vdots \\ x \rightarrow f(x) &= \frac{200}{3} \cdot x \end{aligned}$$

En donde el operador-función $\times \dfrac{200\ gramos}{3\ madejas}$ representa la razón de cambio, por cada 3 *madejas*, el peso aumenta 200 *gramos*, es así como el operador-función es la pendiente de la recta $f(x) = \dfrac{200}{3} \cdot x$.

Por otra parte, el operador-función representa la multiplicación por la razón $\times \dfrac{200\ gramos}{3\ madejas}$ externa, pues relaciona dos magnitudes de diferente naturaleza, y al mismo tiempo origina una nueva magnitud, en este caso *gramos/madeja*. De esta manera, la situación puede plantearse a través la proporción

$\dfrac{peso\ de\ 3\ madejas}{3\ madejas} = \dfrac{peso\ de\ 8\ madejas}{8\ madejas}$, luego:

$$\begin{aligned} \frac{200\ gramos}{3\ madejas} &= \frac{x}{8\ madejas} \\ \frac{200\ gramos}{3\ madejas} \cdot 8\ madejas &= \frac{x}{8\ madejas} \cdot 8\ madejas \\ \frac{200\ gramos}{3\ madejas} \cdot 8\ madejas &= x \end{aligned}$$

La proporción anterior también puede ser solucionada por medio del procedimiento regla de tres, el cual no permite evidenciar el uso del operador-funcional, así como tampoco que éste es la constante de proporcionalidad y tiene el mismo valor numérico que el peso unitario que se obtiene aplicando a 200 gramos el operador $\div 3$.

Este análisis tiene un nivel conceptual complejo ya que implica el manejo de relaciones numéricas, de cocientes de dimensiones (en este caso *gramos/madejas*), de la noción de correspondencia y su representación en forma de tabla, puesto que el análisis de esta situación se hace en términos de funciones; la falta de claridad en él, hace que los estudiantes presenten dificultades para comprender la noción de función. En este sentido, Vergnaud propone diagramas de tablas y flechas para representar la información de las situaciones, ya que permiten establecer relaciones entre algunos conceptos, en particular, la relación de la fracción con la razón, la proporción y la función.

# Bibliografía


[1] M. J. Behr, G. Harel, T. Post, E. Silver, (1992), *Rational numbers, ratio, and proportion, En Douglas A, Grouws (Ed), Handbook of research on mathematics teaching and learning, A project of the National Council of Teacher of Mathematics,* (pp 296-333), USA: Macmillan Publishing Company.

[2] H. Freudenthal,(1983). Fracciones. En H. Freudenthal, *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* (pp. 7-54)

[3] H. Freudenthal,(1983). Razón y Proporción. En H. Freudenthal, *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.*

[4] S. Llinares y M. Sánchez,(1997) *Fracciones*. Ed. Síntesis, S.A.

[5] E. Mancera, (1992) *Significados y Significantes Relativos a las Fracciones*, Educación Matemática, 4 (2), 30-54.

[6] G. Vergnaud, (1985), *El niño, las matemáticas y la realidad*, México, Trillas.